결론은 생각=공부의 양이라는 것입니다.

그렇다면, 어떻게 그 생각을 정리할 수 있을까요?

여러분께서 매일같이 하고있는 공부. 도대체 어떻게 하고있나요?

이 얘기는 매우 당연한 얘기이지만, 여러분이 잘 느끼지 못하는 것입니다.

바로,

개념사이의 공통점과 차이점을 생각하면서 정리해야한다!

입니다.

단언컨대, 공통점과 차이점을 이용해 정리하는 것은 가장 유용한 정리방법입니다.

어떤 묶음이 가진 공통적인 특징으로 그 묶음을 정의하고,

차이점으로 각각의 개별적인 특징과 성격에 대해 생각해보는 것이죠.

이것은 모든 공부에 적용할 수 있는 기본적인 스킬입니다.

수학과목의 개념공부를 생각해봅시다.

미적분 1과 미적분 2에서 배우는 내용은 무엇일까요?

미적분 1은 함수의 극한과 연속, 미분과 적분을 배웁니다.

미적분 2에서는 지수, 로그함수와 삼각함수, 그리고 미분법 이계도함수, 그리고 적분법을 배우죠.

여기서 공통점은 무엇일까요? 바로

함수를 다룬다는 점.

입니다.

좌표평면에 나타낼 수 있는 함수를 다루는 과목이 미적분입니다.

좌표평면에 나타낼 수 있는 함수를 다루는 과목이 미적분입니다.

그렇다면 차이점은 무엇일까요? 우리는 미적분 1에서는 다항함수에 대한 내용만 배웁니다.

미적분 2에서는 더욱 복잡하고 어려운 함수를 배우게 됩니다. 어찌보면 미분하기 쉽지 않은 함수들을 배우게되지요.

이건 정말 문제인게, 적분은 미분의 거꾸로입니다. 미분은 공식이라도 있지, 적분은 공식도 없어요. 더 어렵겠죠.

즉, 매우 어려운 적분을 배운다는 것입니다!

매우 어려운 적분문제를 계산하기 위해서 우리는 적분법을 배울것입니다.

어떻게 적분할 수 있는지에 대한 스킬부분을 많이 배울거에요. 적분은 미분 거꾸로이기 때문에

미분법또한 배우게 됩니다. 결국 차이점은 간단한 다항함수인지, 어려운 함수인지가 되겠네요.

그렇다면 한가지 더 생각해볼까요?

기하와 벡터에서 배우는 내용은 미적분의 내용과 어떻게 다를까요?

혹은 확률과 통계에서 배우는 내용은 어떨까요? 이런 식으로 분류하고 정리하는것이 공부의 기본입니다.

이 물음의 답은 한번 여러분께서 생각해보셔요.

사실 시중에 이런 내용을 담고있는 공부법이 있습니다. 여러분이 잘 아시는 공부법이에요.

바로 [목차공부법] 입니다.

목차를 이용해서 공부하라는 말은, 개념들간에 공통점과 차이점을 생각하라는 말과도 같습니다.

또한 그 개념들이 어떻게 연결되는지까지 생각하면 충분합니다.

이제 여러분은 이렇게 공부하시면 됩니다.

1. 목차의 큰 제목들 안의 개념이 가지는 공통점이 무엇인가.

2. 그 안의 세부적인 개념의 차이점이 무엇인가. 특이한 점은 무엇인가.

3. 큰 제목으로 돌아와서, 그 개념이 말하고 싶은 것이 무엇인가.

이렇게 모든과목을 공부하시면 됩니다. (영어는 될런지 모르겠네요.)

이제 이렇게 공부하시면, 수학과 과탐에서 문제를 볼 때 어떤 개념을 써야하는지가 명확해질 것입니다.

국어의 비문학이나 문학에서는 내용을 더 정확하게 이해할 수 있게 될거구요.

어찌보면 매우 기본적인 것입니다. 모두가 알고있는 것이지요.
하지만 어찌보면 모두가 잊은 것일 수도 있지 않을까요?

기본에 충실한 공부를 한다면, 반드시 진짜 실력이 오르게됩니다. 그렇게 공부하도록 하세요.

이 글에서 개념을 연결해서 정리하라는 말을 했어요.

위 글에서도 말했지만,

개념의 공통점과 차이점을 찾아 정리하는것.

이 매우 중요하며, 그만큼 중요한 것이

개념과 개념간의 연관성을 찾아 정리하는 것.

입니다. 이 두가지를 **목차**를 통해서 공부를 하시면 충분히 독학 가능하실거에요.

그런 의미에서 어떻게 해야 실제로 정리할 수 있을지는 예전에 글로 쓴적이 있는데 재업합니다.

dx의 의미는 무엇일까요? 분명 미적분에서 많이 봤습니다.

합성함수의 미분법, 치환적분법..등 많이 쓰이는 식입니다. 이것의 의미에 대해 한번 살펴볼게요.

먼저 미분계수의 정의에서 dx는 아주 작은 x의 변화량입니다.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

이 식에서 h는 순간적인 x의 변화량을 뜻하며 다르게 표현하면 $\frac{dy}{dx}$ 입니다.

이 식에서 h는 순간적인 x의 변화량을 뜻하며 다르게 표현하면 $\frac{dy}{dx}$ 입니다.

분자에 있는 f(a+h)-f(a)는 순간적인 y값의 변화량입니다.

또한 어떤 x값에서의 미분계수가 함숫값이 되는 함수를 생각할 수 있는데, 이것이 도함수입니다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

이렇게 쓰여지고, 이 식에 의해서 도함수를 실제로 유도할 수 있었습니다.

이제 f(x)의 도함수를 구하는 것을 f(x)를 x로 미분한다라고 표현하게 됩니다.

정리하자면, $\frac{dy}{dx}$ 에서 dx의 의미는 두가지입니다.

1. 순간적인 x의 변화량

2. x에 대해서 미분하라는 기호.

이제 교과서의 미분법 중 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법과 매개변수 미분법을 살펴봅시다.

합성함수의 미분법 : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

역함수의 미분법 : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

매개변수를 이용한 함수의 미분법 : $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

2의 의미를 생각해보면, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 이 식의 의미는 y를 u로 미분한 것에, u를 x로 미분한것을 곱하는 것입니다.

하지만 1의 의미로 생각해보면 du는 아주 작은 u의 변화량입니다.

아주 작은 수로 생각하면 사칙연산도 가능하지 않을까?

라는 아이디어로 곱셈으로 연산해주면 좌변의 식이 나옵니다.

역함수의 미분법과 매개변수를 이용한 함수의 미분법도 마찬가지의 방법으로 이해할 수 있습니다.

이제 적분을 한번 봅시다.

부정적분의 정의는 미분의 역 연산입니다.

어떤 함수 f(x)의 부정적분이란 미분해서 f(x)가 나오는 함수를 뜻합니다.

식으로 쓰자면 $\int f(x)dx$ 이 됩니다.

식으로 쓰자면 $\int f(x)dx$ 이 됩니다.

여기에서의 dx란 x에 대해서 적분해라 하는 뜻입니다.

부정적분의 의미는 여기까지입니다. 그저 미분 거꾸로의 의미입니다.

이제 정적분의 정의를 생각해봅시다.
정적분의 정의는 함수 f(x)가 구간 [a,b]에서 연속이고 항상 f(x)>0일때

구간 [a,b]를 n등분 하여 양 끝점을 포함한 분점을 차례대로

$x_0(=a), x_1, x_2, x_3$, ... , $x_{n-1}, x_n(=b)$ 이라하고

각 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 의 길이를 Δx 라 할 때 n등분 했으므로 소구간의 길이는 일정합니다.

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 이렇게 말이죠.

이때 $f(x_k)\Delta x$ 는 Δx 를 밑변으로 하고 k번째 분점의 함숫값을 높이로 하는 직사각형의 넓이입니다.

$$\sum^{n} f(x_k)\Delta x$$

이때 $f(x_k)\Delta x$ 는 Δx 를 밑변으로 하고 k번째 분점의 함숫값을 높이로 하는 직사각형의 넓이입니다.

그렇다면 $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ 의 뜻은 함수를 n개의 직사각형으로 쪼갠 후 그 넓이를 n개 모두 더했다는 뜻이며,

구분구적법에 의해 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ 는 a부터 b까지의 y=f(x)의 그래프와 x=a, x=b로 둘러싸인 넓이를 뜻하며

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$

이렇게 표시합니다.

요약하자면 여기서 dx의 의미는 결국 밑변의 길이, 즉 x의 변화량입니다.

적분에서도 dx의 의미는 두가지입니다.

1. x의 변화량, 즉 밑변의 길이

2. x에 대해 적부하라는 기호

1. x의 변화량, 즉 밑변의 길이

2. x에 대해 적분하라는 기호

여기서 중요한 정리 하나가 탄생합니다.

바로 '**미적분학의 기본정리**'입니다.

미적분학의 기본정리의 핵심은,

x에 대해서 정적분한 것을 다시 미분하면 원래함수 f(x)가 된다는 것입니다.

우리는 미분하면 f(x)가 되는 함수를 배웠습니다. 바로 부정적분이죠.

부정적분도 미분하면 f(x)가 되고, 정적분도 미분하면 원래함수가 됩니다.

즉, 부정적분과 정적분이 같을 수도 있다는 것입니다!

이것으로 인해 우리는 정적분의 계산을 극한이 아닌, 부정적분으로 할 수 있게 되었고

식으로 쓰면, f(x)의 부정적분중 하나를 F(x)라 할때,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

가 됩니다.

$\int_a f(x)dx = F(b) - F(a)$ 가 됩니다.

한번 더 생각해봅시다. 우리는 dx의 의미를 두가지로 해석했는데

1. x의 변화량

2. x로 적분하라.

1번의 의미는 정적분에서의 의미와 유사합니다. 밑변의 길이 역할을 하겠죠.

2번의 의미는 부정적분의 의미를 갖습니다. 연산기호죠.

이제 우리는 미적분학의 기본정리를 통해서, 1번과 2번의 의미가 같을 수 있음을 알았습니다.

이제 치환적분법에 대해서 알아봅시다.

$\int f'(g(t))g'(t)\ dt$ 에서 이 함수는 적분하기 어려운 형태입니다.

우리는 y=sin x 혹은 y=x+3 과 같은 x에 대한 함수를 적분할 수 있었습니다.

하지만 y=sin (2x+3)은 적분하기 힘든 것이, 적분공식에는 없었기 때문입니다.

(사실 적분이 어려운 이유는, 미분법은 도함수를 유도하는 공식이 있었지만,
적분에서는 공식이 없이 미분 거꾸로로 정의되기 때문입니다.)

이제 위 식에서 g(t)를 x로 치환해봅시다.

$\int f'(g(t))g'(t)\ dt = \int f'(x)g'(t)dt$ 가 됩니다.

여기서 문제가 발생합니다. 적분하려고 하는 함수는 x에 관한 함수인데, 기호는 dt입니다.

우리는 dx가 필요합니다. 적분하려고 하는 함수의 문자는 x이기 때문입니다.

그래서 dx를 만들어주고 싶습니다. 한번, t에 대한 x의 변화량을 생각해봅시다.

$x=g(t)$ **이므로,** $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}g(t) = g'(t)$ 인데, 이때, dt는 순간적인 t의 변화량이므로

양변에 같은 dt를 곱해도 식이 성립합니다.

따라서 $dx = g'(t)dt$ 가 되며 식은

$$\int f'(g(t))g'(t)\ dt = \int f'(x)g'(t)dt = \int f'(x)dx = f(x) + c$$

가 됩니다. 단 c는 적분상수입니다.

이것은 dx가 x에 대해 적분하라는 연산기호이기 때문에,

치환을 해주어 x에 관한 함수로 만들었을 경우, 연산을 위해 dx가 필요하기 때문입니다.

정적분에서의 치환적분은 부정적분과 거의 비슷합니다.

결국 치환을 한 후 그 치환한 문자에 대해 적분할 수 있도록 기호를 바꾸어 주면 됩니다.

그래야 그 문자에 대해 적분연산을 할 수 있을테니까요.

하지만 dx의 의미는 x의 변화량입니다. 만약 t로 치환되어, dt가 생겨날 경우

t의 변화량은 x의 변화량과 다르죠. 그렇기에, 정적분에서 위끝과 아래끝이 달라집니다.

예를들어, $g(x)=t$일때, $\int_a^b f'(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(t)dt$ 가 되는데, 이것은 $dx=\frac{b-a}{n}$인 반면, $dt=\frac{g(b)-g(a)}{n}$ 이기 때문입니다.

(여기에서, 수식으로 계산해보면 달라질 수 있지만, 적분에서는 어떤 구간을 n등분한 것이 밑변이 됩니다.

(여기에서, 수식으로 계산해보면 달라질 수 있지만, 적분에서는 어떤 구간을 n등분한 것이 밑변이 됩니다.
즉 dt는 x에 따라 결정되는 t의 구간을 n등분한 것이 됩니다.)

dt는 어떠한 t의 구간을 n등분하여 나눈 그 구간 하나의 길이입니다.

dt는 정적분의 위끝과 아래끝으로 결정되기에, 자연스럽게 그 구간의 길이가 달라질 경우,

위끝과 아래끝이 달라집니다.

사실 dx의 의미는 어찌보면 쉬운 개념입니다.

하지만 미적분의 많은 부분에서 생각해볼만한 여지가 있는 개념입니다.

개념학습에서 이러한 부분까지 생각해보았는지 점검하세요.

이렇게 연관짓고 이어가며 정리해야 합니다.

스압이기 때문에 요약하자면

1. 목차 파세요.
2. 공통점 차이점 찾으세요.
3. 개념 연결지으세요.
4. 목차 한번 더파세요.