수학 영역

치환적분 vs 부분적분

안녕하세요 신SUN입니다.

이번 칼럼은 적분 문제에서 굉장히 자주 나오는
치환적분 vs 부분적분 에 관한 글입니다.

어떠한 상황에서 둘 중에 무슨 적분을 사용해야하는지,

그 근거는 어디에 있는 것인지 확인해보려고 합니다.

사실 우린 적분 단원에서
그냥 **적분하는 것과, 치환적분, 부분적분** 밖에 배우지 않았습니다.

그럼 배운 것 안에서 선택하시면 되죠.

단 어떤 상황에서 무슨 적분을 선택하느냐?

그 기준과 근거를 얘기해드리겠다는 겁니다!

어떤 문제를 보더라도,
항상 끊임없이 문제와 대화하며, 그 과정을 논리적으로 맞춰가며
단계를 밟아가야 하는 거 알고 계시죠?

그냥 몇 문제 풀면서 이런 상황일 땐 이렇게! 저런 상황일 땐 저렇게!
외우는 것이 아니라,

이 생각, 이 추론이 필연적이다 라고 판단이 되도록
생각을 하는 것입니다 생각!

본인이 직접해야돼요 이건!

그러므로 이 칼럼을 보시고
'응 맞어맞어 저거였지' 하시면,
그냥 해설지 보는 것과 다름이 없어요.

꼭 문제의 조건을 읽고, 생각을 통해 합리적으로 이렇게 추론하고 해석할 수 밖에 없다! 라는 본인만의 사고방식과 행동방식을 만들어야 합니다.

이 것만이 **고난이도 문제(킬러 문제)의 해답**이 될 것입니다.

어찌보면 저는 항상 똑같은 말만 하는 것 같군요.
ㅎㅎ

자 그럼 치환적분 vs 부분적분 본격적으로 시작해보도록 하죠.
(응 맞아 지금부터야)

주의해야 할 점은 그냥 적분문제를 모두 치환vs 부분으로 생각하면 안되고

'일반적인 적분을 해봐야 겠다' 라고생각 한 후
안됐을 때 이 두 가지로 다시 생각해주시면 됩니다.

일반적인 적분 → 부분적분/ 치환적분

헌데,
치환적분과 부분적분에 대한 개념은 알고 보시는 것이겠죠?

아니라면, 당장 개념부터 보셔야해요. 20분만 투자하구 오세요.

간략하게 정리하면,

치환적분
-가장 기본적으로 본능적으로 치환하고 싶어지는 꼴이 나올 때
-치환한 미지수의 미분형태가 피적분함수 안에 있을 때

부분적분
- 미분하고 싶고, 적분하고 싶어지는 함수가 주어졌을 때
- 함수들은 '지 삼 다 로' 만 주어지는 것이 아니라, 문제에서 힌트가 주어질 것.

정도로 생각할 수 있겠죠?

그리고 되게 중요한 거.

만약에 본인이 '치환적분인 것 같아 '
라고 **생각해서 치환적분을 해봤는데**

안풀려. 식이 더 복잡해지는 것 같아.

그럼 **과감하게 포기**하고 부분적분 혹은 **다른 방법으로 시선을 돌리셔야 합니다.**
이거 못해서 시간 낭비하는 사람 너무 많아요.

이 얘기도 문제 보면서 자세히 알려드리죠

당연히, 시뮬레이션 돌리면서
여러분이 문제를 볼 때 어떤 생각을 해야하는지 다 적어볼거에요

(중위권 학생 문제풀이 법 참고)

자, 문제 봅시다. 꼭 풀어보시고 얘기 들어봐요.

30. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)dx = 6e^2+4$이다.
$\int_1^e f(\ln x)dx = ae+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 정수이다.) [4점]

시뮬레이션

함수에 대한 식이 주어진 것도 아니니까
그냥 적분 하는 건 아닌 것 같네.
그럼 치환적분 vs 부분적분 일텐데, 우선 눈에 띄는 2가지가 보인다.
$g(e^x)$와 $f(\ln x)$ ..
뭔가 치환에 대한 냄새가 솔솔나는데? 왜냐면 꼴이 너무 불안해 보이잖아.
(나만 그런가?)
그럼, $\ln x = t$ 라고 치환해보자
이게 아닌 것 같으면, 돌아가면 되니까
$\ln x = t$로 둬보니 음함수 미분해서 $\frac{1}{x}dx = dt$ 라는 것을 알고
dx 대신에 xdt가 들어가야 하기 때문에 좀 복잡해지네.
포기할 수 없어. $x=e^t$로 쓸 수 있으니까. 음 너무 복잡해지는데?

여러분 **치환**을 왜 하세요?

복잡해서, 짜증나서, 파악이 안되니까.

근데 $\ln x = t$로 치환하는 순간 뭐가 보이나요?

끝이 보이지 않는 어둠?
아니다 라는 느낌이 들어요?

그럼 돌아와야죠. 이렇게 계속 문제랑 대화를 하면서 푸는거에요.

내가 추론한 이 생각이 맞는건지 확인하고
아니다 싶으면 돌아가서 다른 조건을 두고 생각해 보는거에요.

<u>자 다시 해보죠.</u>

근데, 주어진 조건을 보니 $g(x)$의 정적분이 나와 있고
문제에서 주어진 함수는 $g(e^x)$이므로 $e^x=t$로 치환 해야겠구나.
아 맞네. 치환하니까 $\int_1^{e^2} g(x)dx = 6e^2+4$ 이 조건도 써먹을 수 있고
$f(x)$가 $f(\ln t)$의 형태로 바뀌기 때문에,
문제에서 구하라는 식도 만들어 낼 수 있네. 치환 제대로 하니까 끝이구만.

여러분 무슨 느낌인지 알겠나요?

제가 부분적분이 아닌 치환적분을 **생각**한 건 다들 공감하실 것이고

여러분들도 할 수 있지만,
무엇을 치환해야 하는 것인가 에 대해선
누구나 시행착오를 겪을 수 있다는 거에요.

다만, 그 시행이 틀린지 맞은지 확인하고 아니다 싶으면 돌아와야 한다는 거!

다른 문제 또 보죠. 꼭 시뮬레이션 본인이 돌려보고 봐요

21. 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$$

이다. $f(1)=1$일 때,

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx$$

의 값은? [4점]

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

_
<u>끊임없이 문제와 얘기하고 추론하면서,</u>
<u>무슨 개념을 써먹어야할지 생각해야 한다고 했어요.</u>

시뮬레이션

원점 대칭 이라 했으니 $(0,0)$ 지나고, $f(x)=-f(-x)$ 인 함수겠군.
$f(x)$를 정적분의 형태로 주어졌으니 양변을 미분해봐야 겠구나.
$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$ 이건 바로 나오는 구만.
그리고 $x=0$ 대입해야지 엇 근데 $f(0)=0$ 인거네. 당연하지 이건 뭐.
또 다른 조건이$f(1)=1$ 이구만.. 뭐 이건 체크
문제에서 구하라는 것 볼까.
$f(x+1)$이 있네? 치환을 해야할까? 대칭이동을 시키나?

잠시만, 위에 식을 미분하면 $f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$ 이니까,

그럼 $f(x+1)$ 대신에 $\frac{2}{\pi}f'(x)$로 쓸 수 있구나

그렇다면 문제의 식을 $2\pi\int_0^1 xf'(x)dx$ 으로 바꿀 수 있고

<u>여기서 생각해야죠. 어떻게 적분해야 할지.</u>

<u>대답할 수 있겠죠?</u>
맞아요. 부분적분이죠?

왜냐구요?

적분 식 안에 미분하기 편하고, 적분하기 편한 식이 둘다 나와버렸어요.
$f'(x)$ 를 적분, x를 미분할 식으로 생각하면 되겠죠?

이정도만 생각했어도 짝짝짝.

좀 더 해보면,
계산하면 $\int_0^1 f(x)dx$가 형태가 나오는데,
이 건 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$ 에서 $x=-1$을 대입하면 되구나.
마지막 문제를 풀기 위해 , 원점대칭의 성질을 이용해서
$f(1)=1 \rightarrow f(-1)=-1$ 이라고 하면 군더더기 없겠군

어떤가요?

시뮬레이션 할 수 있겠어요?

여러분들도 연습하면 충분히 할 수 있어요.

몇 문제만 더 보면 어떻게 풀어내야 하는지,
그 사고방식을 좀 더 자세히 이해할 수 있을거에요.

다음 문제 볼게요.

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고,

$$f(a)=0,\ \int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k\ (a>0,\ 0<k<1)$$

일 때, $\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2
④ k ⑤ $2k$

풀어보셨나요? 이 때 당시 3점문제 임에도 정답률 되게 낮았는데..

못푸셨어도 괜찮아요 어려웠으니까.

시뮬레이션

우선 구하라는 적분값을 주어진 k로 나타내라 했으니 $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx$
를 가지고, 구하라는 것을 표현하면 되지 않을까
우선 문제에 주어진 조건들을 보니 $f(x)$가 뭐라고 주어진 게 아니군.
$\frac{f(x)^2}{x^2}$를 직접 적분하기도 힘드니 그냥 적분하는 건 아닌 것 같고
부분적분 vs 치환적분 이라는 건데 어디로 가야 맞을까?

우선 조건에서 적분구간이 $2a$ 부터 $4a$까지고,
구하라는 것의 적분구간이 a 부터 $2a$까지 인데..
$\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k$ 에서 $x=2t$ 로 치환하면 되나?
오오 될 것 같아. 왜냐면 치환하면 $f(2t)$가 만들어지는데

문제 조건에 $f(2x)$ 있거든.. 잠시만,
근데 $f(2x)$대신에 $2f(x)f'(x)$ 대입하면 더 복잡해지는데?
난 이렇게 복잡해지라고 치환한 게 아닌데..

이렇게 되면 다른 방향으로 돌아가시면 돼요.
<u>대부분 여기서 돌아가지 못하고</u>
<u>자꾸 미련이 남아서 치환으로 해보려고 애를쓰죠.</u>

그게 문제에요. 계속 문제랑 얘기를하고 질문을 던져봐요

그리고 문제에 조건과 연결하여 이 길이 맞는지 생각하고 추론해보란 말이에요.

치환적분이 아니다 싶으면 부분적분 해봐야죠.
부분적분을 쓸 수 있는 근거는?

$f(x)^2$을 미분하면 $2f(x)f'(x)$가 나오잖아요.
근데, 눈을 살짝 위로 떠보니 저 식이 문제에 조건으로 주어져 있네요

이건, 평가원이 얘기 해주는거에요.

그래. 빙빙 돌아오느라 수고했어,
이제 딴 길로 새지말고 부분적분하렴

그럼 $\frac{1}{x^2}$을 적분하는 대상, $f(x)^2$을 미분하는 대상으로 잡으면 끝

이해 되시나요?

마지막으로 난이도 높은 문제를 풀어볼까요? 고고~

21. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$
(나) $g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$

$f(1)=\frac{1}{e}$일 때, $f(2)-g(2)$의 값은? [4점]

① $\frac{16}{3e^4}$ ② $\frac{6}{e^4}$ ③ $\frac{20}{3e^4}$ ④ $\frac{22}{3e^4}$ ⑤ $\frac{8}{e^4}$

시뮬레이션

문제의 조건부터 살펴보자
미분가능한 함수이고, x는 양의실수.
(가) 보니까 흠...
(나) 보고 음 많이 보던 부정적분 형태로 정의된 함수구나 미분해야지.
근데, 구하라는게 뭐지? $f(2)-g(2)$ 흠..

<u>우선 이건 정말 사소하지만 중요한 팁인데요</u>

킬러문제는 평가원님들이
고민고민 하시면서 **완벽하게 설계**한 문제라고 봐야해요.

$f(x)$와 $g(x)$를 구해서 $x=2$ 대입해서 푸는 문제라면
굳이 x값을 똑같게 주진 않았겠지.
그 말은 , 분명 모르긴 몰라도 $f(2)-g(2)$ 를 한 번에 구할 수 있지 않을까?
라는 생각을 해보면 좋다는 거에요!

다시 가보죠.

자, 우선 (가) 조건을 적분해서 $f(x)$를 구하는 건 아닌 거 같아.
$x^2e^{-x^2}$ 적분하기는 쉽지않아.

근데 우리 학생들은 $f(x)$를 구해보겠다는 일념으로
저걸 어찌어찌 해보려고 시간낭비를 해요..
평가원에선 기본적인 교과개념 안에서 가능한 함수의 꼴을 줄거라구요.
혹은 어떤 기본함수의 곱과 나눗셈을 해줘서 꼴을 맞춰간다거나.

<u>아닌 것 같으면 안하면 되는데...</u>
<u>그놈의 고집과 오기 때문에 우린 시간도 날리고 문제도 틀리게 되죠.</u>

또 우리의 학생들은,
(나) 조건을 보고 바로 습관적으로 미분을 해보죠
$g'(x)=\frac{4}{e^4}e^{x^2}f(x)$ 가 나오는데 , 이 걸 이용해서 $g(x)$ 구하려고 하면

그건 정말 미친짓 아니에요?
우리가 미분했는데 저걸 또 적분한다구?

여기서 멘붕터지죠

여기서, 부정적분으로 주어진 함수를 미분하지 않고 푸는 문제가 처음 나온건데

이 문제로 우리가 배워야 할 점이 뭐냐면,
만약 우리가 알고 있던 개념을 써먹었는데 그게 아니다 싶으면
과감하게 내려놓고 돌아가야 한다는거에요.

되게 중요한거임.

자, 다시갑니다

(가) (나) 조건 둘 다 제대로 써먹질 못했네.
우선 적분을 해보려고 했는데 안됐네 그럼 치환적분 vs 부분적분.
근데 치환을 할 것은 딱히 없는 것 같군 그럼 부분적분으로 가야 하는데.
오호 (가) 조건을 보니 $\frac{f(x)}{x}$의 미분형태가 있네.
그럼 저 함수만 만들 수 있으면 미분하기 좋은 함수를 만드는 거 아니야?
잠만, t를 곱하고 나누면 되겠는데?
$g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x te^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}dt$로 바꾸면 되는구만.

굿굿.
그럼 te^{t^2}은 적분하기 좋은함수, $\frac{f(t)}{t}$ 는 미분하기 좋은함수!

문제 끝.

사실 저는 계속 똑같은 얘기밖에 하지 않아요.

생각하면서 문제풀자.

문제의 조건을 보고 어떤 생각을 해야하는지, 그리고 그 과정에서 어떤 추론을 하여 내가 알고있는 개념과 접목시켜 뭘 써먹을 것인지!

그 생각하는 것을,
제가 쓰는 글들을 통해 배우셨으면 좋겠네요.

또한, 제가 기출문제 푸는 법에서 알려드린 STEP을 밟아가며
미리 문제를 본격적으로 풀기 전에
어떤 개념을 써야할까 고민하고 들어가시면,

더 빠른 효과를 보실거라 생각합니다. 아니 장담합니다.

이제 치환적분 vs 부분적분

선택은 다 할 수 있겠죠?

꼭 스스로 시뮬레이션 돌려보면서 연습하세요.

이 유형 뿐 아니라 모든 문제를 **생각하면서 풀기**

잘 모르겠으면 바로 댓글 고고

여러분 후회스럽지 않게 공부합시다.

여러분의 수능 날까지 함께 하겠습니다.

→ http://blog.naver.com/tlswoals1004