(20) 최고차항계수 양수. 이차함수 $f(x)$

$$g(x) = \int_0^x t f(t)\,dt$$

ㄱ. $g'(0) = 0$

$g(x) = \int_0^x t f(t)\,dt \xrightarrow{\text{양변미분}} g'(x) = x f(x)$

$g'(0) = 0$ (o)

ㄴ. 양수 α $g(\alpha)=0$ $f(x)=0$ 열린구간 $(0, \alpha)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

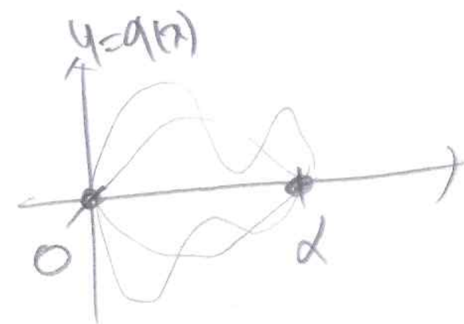
ㄴ> 사잇값정리 떠올릴 수 있다.

$f(0)f(\alpha) < 0$ 보이면 $(0, \alpha)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는데

$g'(x) = x f(x)$ $\quad f(x) = \frac{g'(x)}{x}$ ← $x=0$ 대입하기 어려우니까 $g'(x)$의 부호를 추론해본다

$\frac{g'(x)}{x}$ $(0, \alpha)$에서 부호관찰 ① x는 $(0, \alpha)$에서 $(+)$

$g'(x)$ 추론. $g(0)=0$이고 $g(\alpha)=0$인데 $g(x)$는 4차함수니까



어떤 형태가 되건 무조건 증가했다 감소하는 구간이 있게 된다.

따라서 $g'(x)$는 $(0, \alpha)$에서 $(+)\to(-)$ or $(-)\to(+)$으로 부호변화가 적어도 1번은 있게 된다.

$f(x)=\frac{g'(x)}{x}$는 $(0, \alpha)$에서 부호변화가 있게 되어, 사이값정리에 의해 $f(x)=0$은 $(0, \alpha)$에서

적어도 하나의 실근을 갖는다 (○)

ㄷ. 양수 β. $f(\beta)=g(\beta)=0$

· 모든실수 x에대해 $\int_{\beta}^{x} tf(t)\,dt \geq 0$ 이다?

$tf(t)$의 부정적분은 $g(t)$이며 $\int_{\beta}^{x} tf(t)\,dt = g(x)-g(\beta)$ 인데 $g(\beta)$는 0이므로 $\boxed{g(x) \geq 0}$ 임을

보이면 된다.

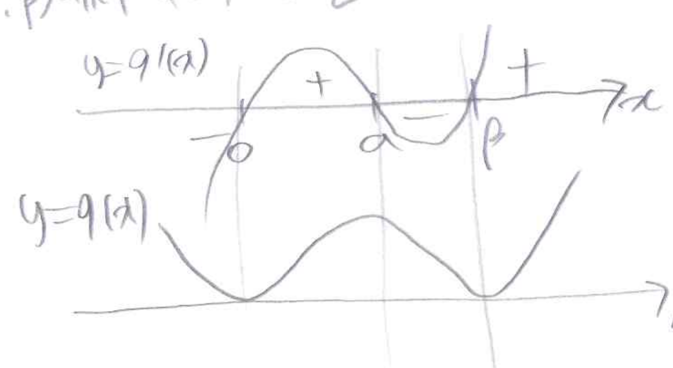
도함수 $g'(x)=xf(x)$를 이용해서 $g(x)$ 추론가능.

① $g(\beta)=0$이고 β는 양수인데 (ㄴ)의 논리에의해 $(0, \beta)$에서 $f(x)=0$은 적어도하나의 실근을 가진다☆☆

$\to g'(x)=x(x-\beta)(x-\alpha)$, $0<\alpha<\beta$

② $g'(\beta)=0$ $g(\beta)=0$ 접한다.

$g'(0)=0$ $g(0)=0$ 접한다.



모든실수 x에대해 $g(x) \geq 0$ 임을 만족함.

답) ㄱ,ㄴ,ㄷ ⑤

㉑ $(x-1)(x^2(x-3)-t)=0$

서로다른 실근의 개수 $f(t)$

(가) $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^4}=0$ → $g(x)$는 3차이하의 다항함수.

(나) $g(-3)=6$

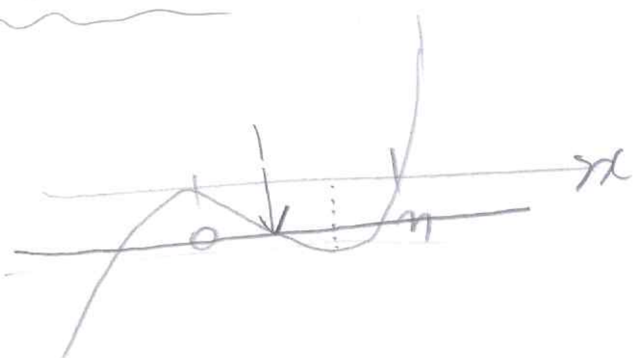
$f(t)g(t)$ 실수전체 연속. $g(1)=?$

① $f(t)$를 구한다.

$(x-1)(x^2(x-3)-t)=0$

(1) $x=1$. (2) $x^2(x-3)=t$

$y=x^2(x-3)$ $y=t$의 교점의 개수를 고려하고 (1)의 해인 $x=1$까지 합해서 서로다른실근개수 구한다.



	$f(t)$
$t>0$	2개.
$t=0$	3개
$t\neq -2$, $-4<t<0$	4개
$t=-2$	3개
$t=-4$	3개
$t<-4$	2개

$f(t)$는 서로다른실근의 개수인데 저기 중근이 되는 t값이 $t=-2$일때이다. 근이 $x=1, 1$, 나머지2개임. → 3개

불연속 X 연속의 형태

② $f(t)g(t)$가 실수 전체 연속이려면? → $f(t)$가 불연속인 t에서 $g(t)$가 0이되어야 한다!

$t=0, -4, -2$ 에서 불연속인 함수

다항함수니까 모든실수에서 연속

$$g(t)=at(t+4)(t+2)$$

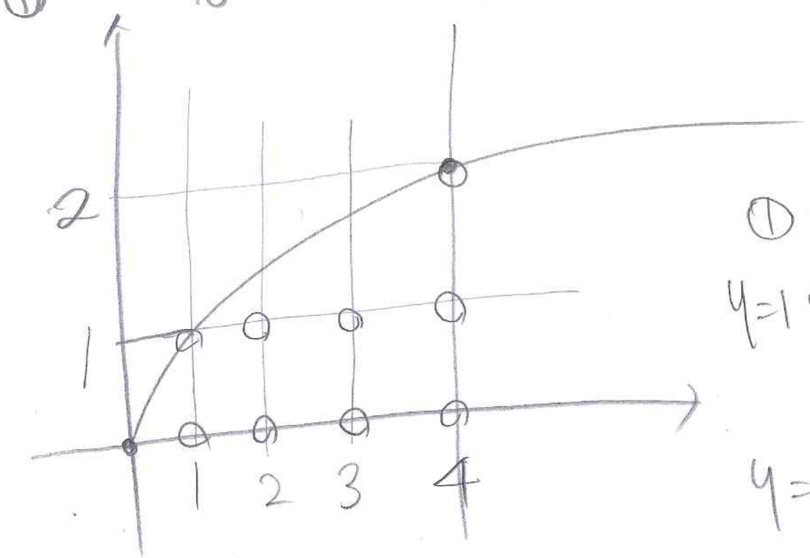
③ (나)조건 $g(-3)=6$

$$-3a(1)(-1)=6$$

$$3a=6 \quad a=2.$$

$\therefore g(t)=2t(t+4)(t+2) \quad g(1)=2(5)(3)=30$ 답 ⑤

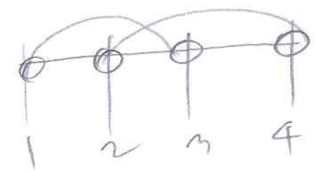
① 예시적용 $f(4)=9$



(나) 두점의 중점좌표가 모두 정수

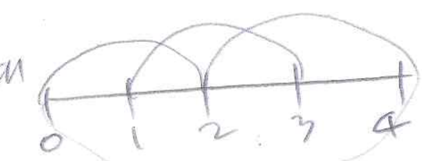
① 두점을 같은층에서 선택하는 경우

$y=1$ 일때



2가지

$y=0$일때

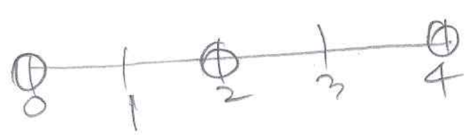


$3+1=4$가지

② 두점을 다른 층에서 선택하는 경우

$y=0$, $y=2$에서 각각 1개 뽑아야 중점의 y좌표가 정수, $(4,2)$ 뽑고,

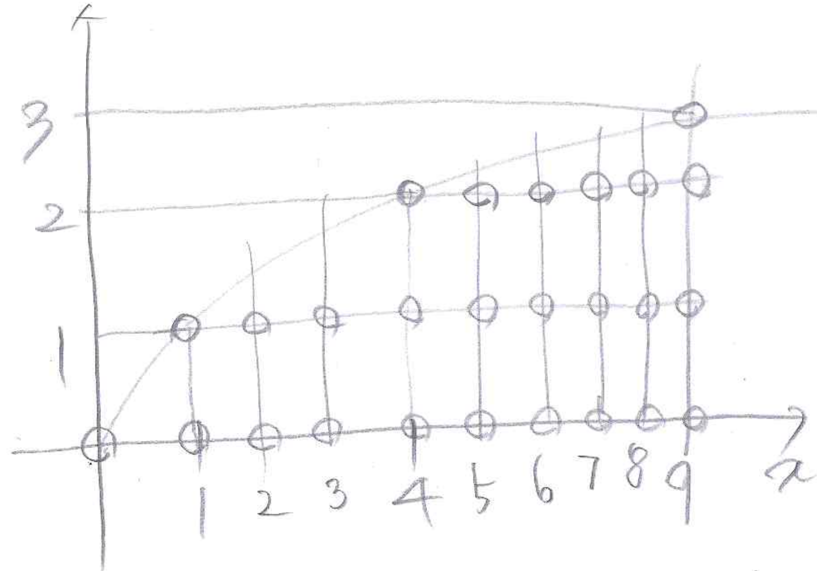
$y=0$



3개 가능.

$\therefore$ $2+4+3 \rightarrow$ 9가지

세는 방법이 간단해지면 $y=\sqrt{x}$는 무시하고 정수점 찾기위해 $x=9$ 대입



① 두점 같은층에서 뽑기

(1) $y=2$일때

4 5 6 7 8 9

간격2) 4
간격4) 2
$4+2 \to$ 6개.

(2) $y=1$, 점9개 $7+5+3+1 = 16$개

(3) $y=0$, 점10개 $8+6+4+2 = 20$개

$\to 6+16+20 = \boxed{42\text{개}}$

② 두점 다른층 뽑기

(1) $\underbrace{y=1}_{\text{5가지 가능}}$. $\boxed{y=3} \to$ (9,3) 뽑고 $\to \boxed{5\text{가지}}$

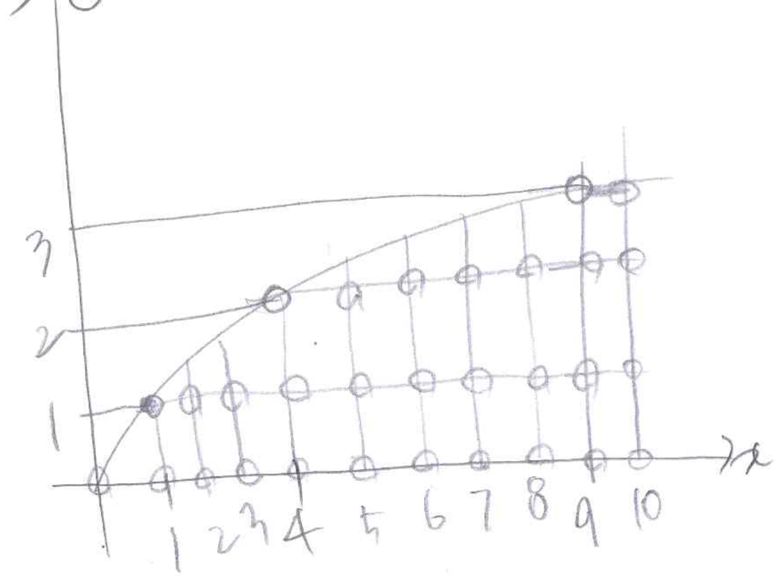
(2) $y=0$ $\boxed{y=2}$

→ 점하나 택할때 $y=0$에 가능한점이 5개나옴

$6\times 5 = \boxed{30\text{가지}}$

$\to 42+35 = 77$가지

③ $x=10$으로 늘려본다



① 두점같은층 뽑는경우

$y=0$ $9+7+5+3+1 = 25$

$y=1$ $8+6+4+2 = 20$

$y=2$ $5+3+1 = 9$ ⟶ 54가지

② 두점다른층 뽑는경우

(1) $y=1$. $y=3$.

↳ 점하나 택하면 $y=1$이 가능한점 5개

$2 \times 5 = 10$가지

(2) $y=0$. $y=2$

↳ 점하나택하면 $y=0$이 가능한점이 6, 5, 6, 5 번갈아나옴

6 5 6 5 6 5 6 ⟶ $24+15=39$

⟶ $54+10+39 = 103$가지 ∴ n의 최댓값은 9이다.