정답 및 해설

1. 정답 ①

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

(가)에서 $g(x)=\dfrac{x(x+3)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$)⋯⋯ ㉠

그런데, $g(x)$는 실수 전체에서 연속인 함수이므로

$x=0$에서도 연속이어야 한다.

(나)에서 $g(0)=1$이므로

$g(0)=\lim_{x\to 0}g(x)=1$ ⋯⋯ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{f(x)}=1$

그런데, (분자) → 0 이므로 (분모) → 0 이어야 하므로

$\therefore\ f(0)=0$ ⋯⋯ ㉢

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 ㉢을 대입하면

$\therefore\ c=0$

준 식에 대입하면

$f(x)=x^3+ax^2+bx=x(x^2+ax+b)$

㉠에 대입하여 정리하면

$g(x)=\dfrac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}$ ⋯⋯ ㉣

(나)에서 $g(0)=1$이므로 ㉣에서 $\dfrac{3}{b}=1$ $\therefore\ b=3$

㉣에 대입하면 $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+3}$

그런데 조건에서 $g(x)$가 실수 전체에서 연속이기 위해

(분모)$=x^2+ax+3\neq 0$이어야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 판별식

$D<0$이어야 하므로

$D=a^2-12<0$ $\therefore\ -\sqrt{12}<a<\sqrt{12}$ ⋯⋯ ㉤

그런데 $f(1)$은 자연수 즉, $f(1)=1+a+3=a+4$가

자연수이므로 ㉤의 범위를 만족하는 정수 a는

$a=-3,\ -2,\ \cdots,\ 3$

㉣에서 $x=2$을 대입하면 $g(2)=\dfrac{5}{4+2a+3}=\dfrac{5}{2a+7}$

$g(2)$가 최소가 되려면 분모가 최대이므로 $a=3$일 때,

최솟값 $\dfrac{5}{2\times 3+7}=\dfrac{5}{13}$을 갖는다.

2. 정답 5

(가)에서 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과

곡선 $y=g(x)$위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두

x축이므로 각각 $x=0$과 $x=2$에서 중근을 가져야

하므로

$f(x)=x^2(x+p),\ g(x)=-(x-2)^2$ ⋯⋯ ㉠

라 놓을 수 있다.

$f(x)=x^2(x+p)$를 미분하면 $f'(x)=3x^2+2px$

함수 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ t^3+pt^2)$에서 접선의 방정식은

$y=(3t^2+2pt)(x-t)+(t^3+pt^2)$ ⋯⋯ ㉡

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나면

$0=6t^2+4pt-3t^3-2pt^2+t^3+pt^2,$

$-2t^3+(6-p)t^2+4pt=0,$

즉, $t\{-2t^2+(6-p)t+4p\}=0$ ⋯⋯ ㉢

(나)조건에서 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은

접선의 개수

2 개를 만족하는 경우는 ㉢이 2 개의 실근을 갖는 경우이다.

(ⅰ) 이차식 $-2t^2+(6-p)t+4p=0$이 $x=0$인 근을

갖는 경우 $p=0$

(ⅱ) 이차식 $-2t^2+(6-p)t+4p=0$이 중근을 갖는

경우 즉 판별식 $D=0$이어야 하므로

$D=(6-p)^2+32p=p^2+20p+36$

$=(p+2)(p+18)=0$

$\therefore\ p=-2$ 또는 $p=-18$

그런데, $p=-2,\ p=-18$인 경우는 (다)조건인 방정식

$f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가질 수 없다.

따라서 (다)조건을 만족시키는 p의 값은 $p=0$

㉠에 대입하면 $f(x)=x^3,\ g(x)=-(x-2)^2$

㉡에 대입하면 $y=3t^2(x-t)+t^3$ ⋯⋯ ㉣

㉣이 $(0,\ -2)$를 지나는 경우

$-2=-2t^3$ $\therefore\ t=1$

점 $(0,\ -2)$를 지나면서 $g(x)=-(x-2)^2$ 위의 점

$(t,\ -(t-2)^2)$에 접하는 직선의 방정식을 구하면

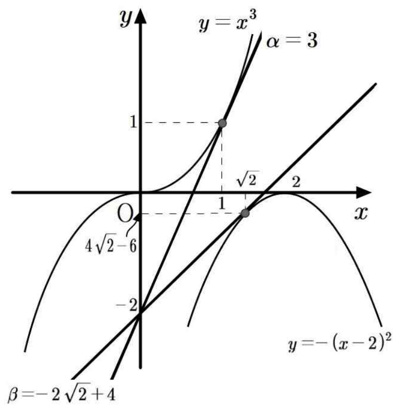
$y=-2(t-2)(x-t)-(t-2)^2$

$-2=(-2t+4)(-t)-t^2+4t-4$

$-2=2t^2-4t-t^2+4t-4,\ 2=t^2$

$\therefore\ t=\sqrt{2}$ ($\because\ t>0$)

따라서 아래 그림과 같이



모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족하는 k의 최댓값 $\alpha=3$, 최솟값 $\beta=-2\sqrt{2}+4$

$$\alpha-\beta=2\sqrt{2}-1$$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

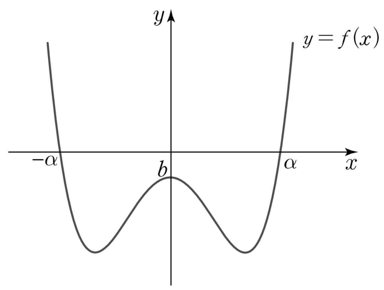
$$a^2+b^2=5$$

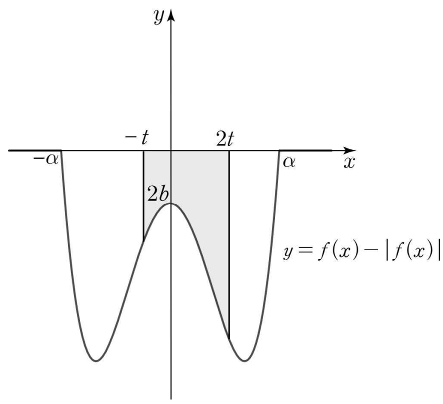
3. 정답 ④

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$의 그래프는 y축에 대칭이다.

b의 값에 따라 나누어보면

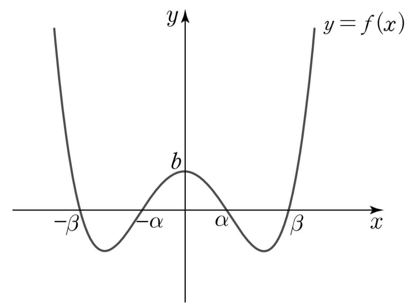
(ⅰ) $b \le 0$일 때

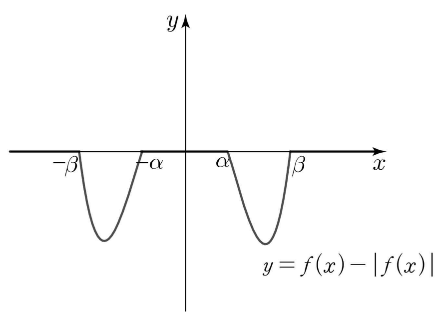




$0<x<1$에서 $g(x)$는 감소함수이므로 조건 (가)를 만족하지 않는다.

(ⅱ) $b>0$일 때





① $0<x<1$에서 $g(x)$가 상수함수이므로

$f(x) - |f(x)| = 0$에서 $\alpha \geq 2$

② $1 < x < 5$에서 $g(x)$가 감소하므로

$f(x) - |f(x)| < 0$에서 $\alpha \leq 2$이고

$-\beta \leq -5$

즉, $\beta \geq 5$

③ $x > 5$에서 $g(x)$가 상수함수이므로 $-\beta \geq -5$

즉, $\beta \leq 5$

①, ②, ③에 의해 $\alpha = 2$, $\beta = 5$

$\therefore\ f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 25)$

따라서 $f(\sqrt{2}) = (-2) \times (-23) = 46$이다.

4. 정답 40

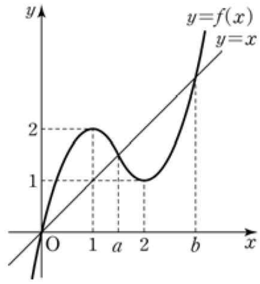
$(f \circ f)(x) = x$을 만족하기 위해서는

(ⅰ) 모든 x에 대하여 $f(x) = x$일 때

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$가 되면 $f(x)$는 증가함수가 되어

$f'(1) < 0$, $f'(2) < 0$인 조건에 만족하지 않는다.

(ⅱ) $f(p) = q$, $f(q) = p$일 때,



실근이 0, 1, a, 2, b이고

$f'(1) < 0$, $f'(2) < 0$이므로

위의 그래프와 같이 1, 2가 $y = x$ 대칭이어야 한다.

따라서 $f(1) = 2$, $f(2) = 1$

또, $f(0) = 0$, $f'(0) - f'(1) = 6$이므로

$f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$라 하면

$f'(x) = 3px^2 + 2qx^2 + r$이고

$f(1) = p + q + r + s = 2$ …… ㉠

$f(2) = 8p + 4q + 2r + s = 1$ …… ㉡

$f(0) = s = 0$ …… ㉢

$f'(0) - f'(1) = r - 3p - 2q - r = 6$ …… ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣를 연립하면

$p = 1$, $q = -\dfrac{9}{2}$, $r = \dfrac{11}{2}$, $s = 0$

$$\therefore\ f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$$

$$\therefore\ f(5) = 40$$

5. 정답 ③

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ 이고 (가)조건에 의해

$$f(-1)=-1+a-b>-1$$

$$\therefore\ a>b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(나)조건에 의해

$$f(1)-f(-1)=1+a+b-(-1+a-b)$$

$$=2+2b>8$$

$$\therefore\ b>3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

ㄱ. $y=f(x)$를 미분하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고,

㉠, ㉡에 의해

$$a>b,\ a^2>ab>3b\ (\because\ a>b>3)$$

$$\therefore\ \frac{D}{4}=a^2-3b>0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $f'(-1)=3-2a+b=3-a+b-a$이고,

$3-a<0$, $b-a<0$이므로 $\therefore\ f'(-1)<0$

그리고 $f'(1)=3+2a+b>0$ ($\because$ ㉠, ㉡)

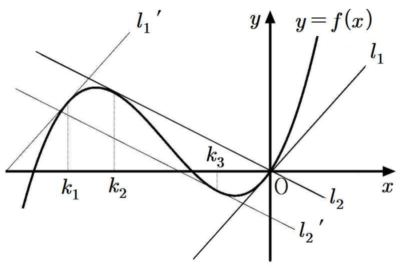
사잇값 정리에 의해 $f'(x)$는 $(-1,\ 0)$에서 근을 가진다.

$f'(\alpha)=0$이라 하면 x가 $(-1,\ \alpha)$에서 $f'(\alpha)<0$이다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$, 즉 $f(x)=f'(k)x$라 하면 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이다.

삼차함수 $f(x)$와 직선이 2개의 교점을 가지려면 직선은 $f(x)$의 접선이어야 한다.

ㄱ에 의해 $f'(x)$는 두 근을 가지므로 $(0,\ 0)$에서 $f(x)$에 그은 접선은 l_1, l_2두 개다.



(ⅰ) l_1인 경우 $f'(k)=f'(0)$이므로 위 그림에서

$$k=0,\ k_1$$

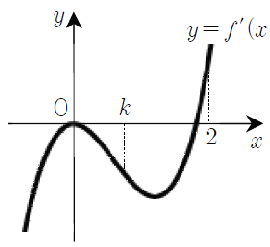
(ⅱ) l_2인 경우 $(0,\ 0)$에서 $f(x)$에 그은 접선의 접점을 k_2라 할 때 $f'(k)=f'(k_2)$이므로

$$k=k_2,\ k_3$$

따라서 k의 개수는 4개다.

6. 정답 ③

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축은 열린구간 $(k,\ 2)$에서 만난다. 즉, 방정식 $f'(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $f(0)=0$이면 양수 a에 대하여

$f(x)=x^3(x-a)$로 놓을 수 있다.

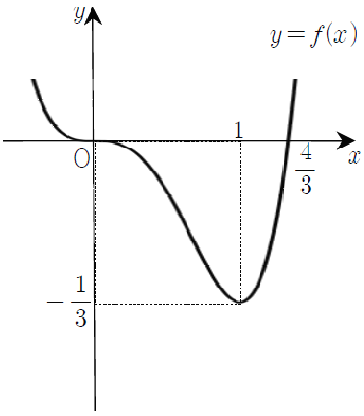
$f(x)=x^4-ax^3$에서 $f'(x)=4x^3-3ax^2$이고

$f'(2)=32-12a=16$에서 $a=\dfrac{4}{3}$

즉, $f(x)=x^3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{3}$을 가지므로

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq -\frac{1}{3}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7. 정답 32

함수 $f(x)$는 $x < a$, $x > a$일 때, 다항함수이므로 이 범위에서 미분가능하다.

한편, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 미분가능해야 한다. 즉,

$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 이어야 한다.

이때,

$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a-} \frac{0 - 0}{x - a} = 0 \quad \cdots\cdots ㉠$

또, $\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x - a}$

여기서 $x \to a+$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재해야 하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x \to a+} (x-1)^2(2x+1) = 0$, $(a-1)^2(2a+1) = 0$

$a = -\frac{1}{2}$ 또는 $a = 1$

(i) $a = -\frac{1}{2}$일 때,

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}+} \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{2}+} 2(x-1)^2 = \frac{9}{2}$$

이 값은 ㉠의 값과 다르므로 $a = -\frac{1}{2}$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다.

(ii) $a = 1$일 때,

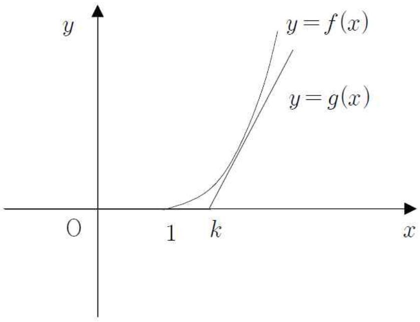
$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 1+} \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1+} (x-1)(2x+1) = 0$$

이 값은 ㉠의 값과 같으므로 $a = 1$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하다.

따라서 (i), (ii)에서 $a = 1$이다.

한편, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$이어야하므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 함수 $y = g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.



$x > 1$ 일 때, 함수 $f(x) = (x-1)^2(2x+1)$ 와 접하고 기울기가 12 인 접선의 접점을 $(m,\ f(m))$ $(m > 1)$ 라 하자.

$f'(x) = \{(x-1)^2\}'(2x+1) + (x-1)^2(2x+1)'$

$= 2(x-1)(2x+1) + 2(x-1)^2$

$= (x-1)\{(4x+2)+(2x-2)\}$

$= 6x(x-1)$

이때, 접선의 기울기가 12 이므로

$6m(m-1) = 12$

$m^2 - m - 2 = 0,\ (m+1)(m-2) = 0$

$m = -1$ 또는 $m = 2$

이때, $m = 2$

그러므로 접선의 방정식은 $y - 5 = 12(x-2)$

$y = 12x - 19,\ y = 12\left(x - \frac{19}{12}\right)$

따라서 $k \geq \frac{19}{12}$ 이므로 k 의 최솟값은 $\frac{19}{12}$ 이다.

그러므로 $a + p + q = 1 + 12 + 19 = 32$

8. 정답 9

직선 $y = x$ 와 x 축 및 직선 $x = n$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{n^2}{2}$ 이다.

$2\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{n^2}{2}\right) = \frac{241}{768}$ 이므로

$F(x) = h(x) - x$

$= \begin{cases} g(x) - x & (0 \leq x < 5,\ x \geq k) \\ x - g(x) & (5 \leq x < k) \end{cases}$

로 놓으면

$2\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n F(x)\,dx = \frac{241}{768}$ 이다.

$n \leq x < n+1$ 일 때

$g(x) - x = \frac{1}{2^n}\{f(x-n) - (x-n)\}$

$= \frac{1}{2^n}\left\{\frac{3}{2}(x-n) - \frac{1}{2}(x-n)^2 - (x-n)\right\}$

$= \frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2}(x-n) - \frac{1}{2}(x-n)^2\right\}$

$= \frac{1}{2^n+1}(x-n)(1+n-x)$

$= -\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))$

이므로

$\int_n^{n+1}\{g(x) - x\}\,dx$

$= \int_n^{n+1}\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))\right\}dx$

$= \int_0^1\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}x(x-1)\right\}dx$

$= -\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 x(x-1)\,dx$

$= \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{6}$ …… ㉠

한편,

$\int_0^n F(x)\,dx$

$= \int_0^1 (x - g(x))\,dx + \cdots + \int_4^5 (x - g(x))\,dx$

$+ \int_5^6 (x - g(x))\,dx + \cdots + \int_{k-1}^k (x - g(x))\,dx$

$$+\int_{k}^{k+1}(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}(x-g(x))\,dx$$

이때, ㉠은 $n=0$일 때도 성립하므로 ㉠에서

$$2\int_{0}^{n}F(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{6}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}$$

$$+\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$$

$$-\frac{2}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{6}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=0$이므로

$$2\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n}F(x)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

$$=\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}$$

즉, $\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{241}{768}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{1}{16}$이므로

$k-5=4$에서 $k=9$

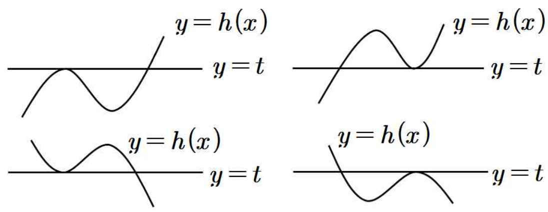
9. 정답 ③

실수 t에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-x+t$의 교점의 개수는 두 곡선 $y=f(x)+x$와 $y=t$의 교점의 개수와 동일하다.

$h(x)=f(x)+x$라 하면 $h(x)$도 삼차함수이다.

ㄱ. $h(x)=x^{3}+x$를 미분하면
$h'(x)=3x^{2}+1>0$이므로 $h(x)$는
증가함수이다.
따라서 $y=t$와의 교점은 항상 1개다.
(참)

ㄴ. $g(t)=2$일 때, $y=h(x)$와 $y=t$의 그래프는
아래의 네 가지 경우 중 하나이다.



따라서 $g(t)=3$인 경우가 존재한다.(참)

ㄷ. [반례] $f(x)=x^{3}-x$라 하면 $h(x)=x^{3}$은
증가함수이므로
모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$이다.
그런데 함수 $f(x)$는 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$에서 극값을
갖는다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10. 정답 200

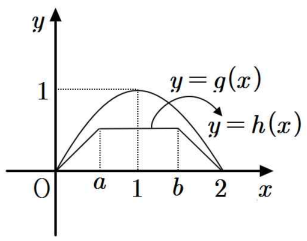
주어진 함수 $h(x)$를 $x=a$와 $x=b$를 기준으로 구간을 나누어 정의해 보면

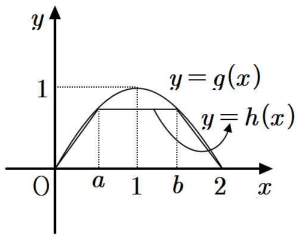
$$h(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ kx & (0 < x \le a) \\ ka & (a < x \le b) \\ k(a+b-x) & (b < x \le 2) \\ k(a+b-2) & (x > 2) \end{cases}$$

$\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$ 의 최솟값을 구하는 경우에서

$\int_0^2 g(x)dx$ 의 값이 일정하므로 $\int_0^2 h(x)dx$ 가 최대일 때를 구하면 된다.

모든 실수 x에 대하여 $0 \le h(x) \le g(x)$이므로





[그림1]

[그림2]

$y=h(x)$의 그래프는 [그림1]에서 사다리꼴이고

[그림2]처럼 $g(x)$에 접하는 사다리꼴일 때

$\int_0^2 h(x)dx$ 의 값이 최대가 된다.

따라서 $h(a)=g(a)$, $h(2)=g(2)$이므로

$$ka=a(2-a),\ k(a+b-2)=0$$

$$\therefore\ k=2-a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore\ a+b=2\ (\because\ k \ne 0) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

a, b는 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$a=1-t,\ b=1+t \qquad \cdots\cdots ㉢$$

라 하면 사다리꼴 넓이 공식에 의해

$$\int_0^2 h(x)dx=\frac{1}{2}\times(2t+2)(1+t)(1-t)$$

$$=(1+t)^2(1-t)\ (0 < t \le 1) \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉣에서 $p(t)=(1+t)^2(1-t)\ (0 < t \le 1)$라 하면

$$p'(t)=2(1+t)(1-t)-(1+t)^2$$
$$=(1+t)(1-3t)$$

따라서 $p'(t)=0$일 때의 t의 값은 $t=-1$, $\frac{1}{3}$이고

$t=\frac{1}{3}$일 때 극대이면서 최대가 된다. ($\because\ 0 < t \le 1$)

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $k=\frac{4}{3}$

$$\therefore\ 60(a+b+k)=200$$

11. 정답 ③

$$f'(x)=x^2-2kx=0,\ x(x-2k)=0$$

$x=0$에서 극대, $x=2k$에서 극소 ($\because\ k>0$)이고

$$f'(x)=x^2-2kx=3k^2$$

$x^2-2kx-3k^2=0$에서 $(x-3k)(x+k)=0$

점 A, B의 x좌표는 $-k,\ 3k$이다.

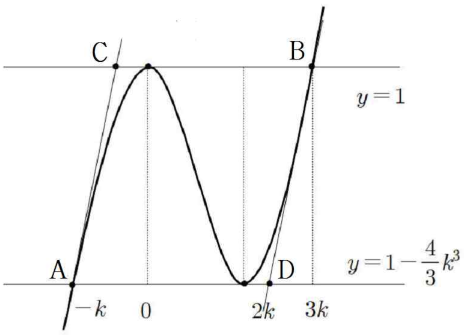
따라서 $f(0)=1$

$$\therefore\ f(2k)=\frac{8k^3}{3}-4k^3+1=1-\frac{4}{3}k^3$$

$$\therefore\ f(-k)=\frac{-k^3}{3}-k^3+1=1-\frac{4}{3}k^3$$

$$\therefore\ f(3k)=9k^3-9k^3+1=1$$

이상을 정리하면 다음 그림과 같다.



따라서 구하려는 도형의 넓이는 □ADBC의 넓이이다.

$A\left(-k,\ 1-\frac{3}{4}k^3\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\left(1-\frac{4}{3}k^3\right)=3k^2(x+k)$$

점 C의 좌표가 1이므로 $y=1$을 대입하면

$$\frac{4}{3}k^3=3k^2(x+k)\ \therefore\ x=-\frac{5}{9}k$$

$$\therefore\ C\left(-\frac{5}{9}k,\ 1\right)$$

□ADBC의 밑변의 길이 $\overline{BC}=3k-\left(-\frac{5}{9}k\right)$이고,

높이는 $1-\left(1-\frac{3}{4}k^3\right)=\frac{3}{4}k^3$이므로

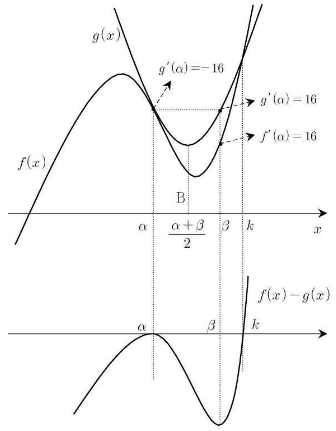
□ADBC의 넓이 S는

$$S=\left(3k+\frac{5}{9}k\right)\frac{4}{3}k^3=24,\ k^4=\frac{3^4}{2^4}$$

$$\therefore\ k=\frac{3}{2}$$

12. 정답 243

$f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)$이므로



$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$라 하면

$$f'(x)-g'(x)$$
$$=3(x-\alpha)\left(x-\frac{2k+\alpha}{3}\right)\cdots\cdots ㉠$$

한편 $f'(\alpha)=g'(\alpha),\ f'(\beta)=g'(\beta)$이므로

$$f'(x)-g'(x)$$
$$=3(x-\alpha)(x-\beta)\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{2k+\alpha}{3}=\beta,\ k=\frac{3\beta-\alpha}{2}$

$$\therefore\ f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)\cdots\cdots ㉢$$

$g'(\alpha)=-16,\ g'(\beta)=16$이므로

$$g(x)=2\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+c$$

따라서 $g'(x)=4\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$g'(\beta)=16$에서 $\beta-\alpha=8\quad\cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣에서

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$

$=-(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)=243$

13. 정답 ⑤

ㄱ. 조건 (가)에서

$$f'(x)=ax(x-k)\ \ (a>0)$$

라 하면 구간 $[0,\ k]$ 에서 $f'(x)\le 0$ 이므로

$$\int_0^k f'(x)dx<0 \quad (참)$$

ㄴ. 조건 (나)에서

$$\int_0^t |f'(x)|dx=f(t)+f(0)$$

의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$|f'(t)|=f'(t) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, ㉠은 $t>1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하므로

$$f'(t)\ \ge\ \ (t>1)$$

따라서 조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=k$ 에서 극솟값을 가지므로

$0<k\ \le\ 1$ 이다. (참)

ㄷ. $f'(x)=ax(x-k)=ax^2-akx$ 에서

$$\int_0^t |f'(x)|dx$$

$$=-\int_0^k (ax^2-akx)dx+\int_k^t (ax^2-akx)dx$$

$$=-\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2\right]_0^k+\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2\right]_k^t$$

$$=-\left(\frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2}\right)+\left(\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}-\frac{ak^3}{3}+\frac{ak^3}{2}\right)$$

$$=\frac{ak^3}{6}+\left(\frac{at^3}{6}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{6}\right)$$

$$=\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{3}\cdots\cdots ㉡$$

또한

$$f(x)=\int (ax^2-akx)dx$$

$$=\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2+C \ (C\text{는 적분상수})$$

라 하면

$$f(t)+f(0)=\left(\frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+C\right)+C$$

$$=\frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+2C\cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢이 같아야 하므로 $C=\dfrac{ak^3}{6}$

즉, $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{ak}{2}x^2+\dfrac{ak^3}{6}$ 이므로 극솟값은

$$f(k)=\frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2}+\frac{ak^3}{6}=0 \ (참)$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14. 정답 65

$f'(x)=3x^2-6x+6$이므로

$$4(3x^2-6x+6)+12x-18=f'(g(x))$$
$$12x^2-12x+6=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$$
$$\{g(x)\}^2-2g(x)=4x^2-4x$$
$$\{g(x)\}^2-4x^2-2g(x)+4x=0$$
$$(g(x)-2x)(g(x)+2x)-2(g(x)-2x)=0$$
$$(g(x)-2x)(g(x)+2x-2)=0$$

따라서 $g(x)-2x=0$ 또는 $g(x)+2x-2=0$

(ⅰ) $g(x)-2x=0$일 때,

즉 $g(x)=2x$이면 $f(2x)=x$이므로

$$8x^3-12x^2+12x+k=x$$
$$k=-8x^3+12x^2-11x$$
$$\cdots\cdots ㉠$$

따라서 $h_1(x)=-8x^3+12x^2-11x$라 하면

$$h_1{}'(x)=-24x^2+24x-11<0$$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 $-7\le h_1(x)\le 0$

즉, 방정식 ㉠이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근이 존재하기

위해서는 $-7\le k\le 0$

(ⅱ) $g(x)+2x-2=0$일 때,

즉 $g(x)=-2x+2$이면 $f(-2x+2)=x$이므로

$$(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k=x$$
$$-8x^3+12x^2-13x+8+k=0$$
$$k=8x^3-12x^2+13x-8$$
$$\cdots\cdots ㉡$$

따라서 라 하면

$$h_2{}'(x)=24x^2-24x+13>0$$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 $-8\le h_2(x)\le 1$

즉, 방정식 ㉡이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근이 존재하기

위해서는 $-8\le k\le 1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-8\le k\le 1$이므로 $m=-8$, $M=1$

따라서 $m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$

15. 정답 ⑤

ㄱ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\ne 0)$라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(-3)=f'(3)$에서 $b=0$이고

$x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-2)=12a+c=0$에서

$c=-12a$이다.

따라서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=3ax^2-12a\ (a>0)$

이므로 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(x)=3ax^2-12a=3a(x+2)(x-2)$

이고 조건 (가)에 의하여 삼차함수 $f(x)$는

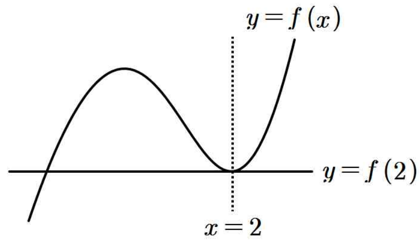
$x=2$에서

극솟값을 갖는다.

따라서 그림과 같이 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로

다른 두 실근을 갖는다.

(참)



ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $f(x)=ax^3-12ax+d\ (a>0)$

$$f'(x)=3ax^2-12a$$

이므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$$y-(11a+d)=-9a(x+1)$$
$$y=-9ax+2a+d$$
$$\cdots\cdots ㉠$$

㉠에 점 $(2,\ f(2))$ 즉, $(2,\ -16a+d)$를 대입하면

등식이 성립하므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의

접선의 방정식은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16. 정답 ②

$h(x)=x(x-2)(x-3)$이라 하면

$h'(x)=(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2)$

이므로 $h'(0)=6$, $h'(2)=-2$, $h'(3)=3$

$f'(0)>6$ 또는 $f'(2)<-2$ 또는 $f'(2)>2$ 또는 $f'(3)<-3$이면 $h(x)$와 $f(x)$의 그래프가 교점이 생기게 되어 교점 좌우에서 대소관계가 뒤바뀌며 $g(x)$가 미분가능하다는 조건을 만족시키지 못한다.

$\therefore\ f'(0)\le 6,\ -2\le f'(2)\le 2,\ f'(3)\ge -3$

따라서 위 조건을 만족하는 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.

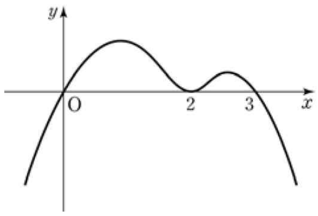
(ⅰ) $f(x)=ax(x-2)^2(x-3)$에서

$f'(x)=a(4x^3-21x^2+32x-12)$

$\therefore\ f'(0)=-12a\le 6 \qquad \therefore\ a\ge -\frac{1}{2}$

$f'(3)=3a\ge -3\ \therefore\ -\frac{1}{2}\le a<0$

$\therefore\ 0<f(1)=-2a\le 1 \qquad \therefore$ (최댓값)$=1$



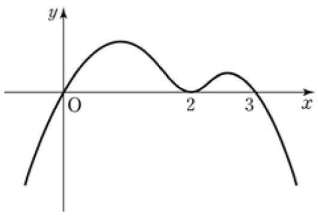
(ⅱ) $f(x)=ax(x-2)(x-3)^2$에서

$f'(x)=a(4x^3-24x^2+42x-18)$

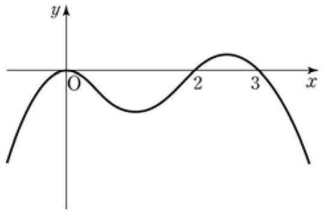
$\therefore\ f'(0)=-18a\le 6 \qquad \therefore\ a\ge -\frac{1}{3}$

$f'(2)=2a\ge -2,\ a\ge -1\ \therefore\ -\frac{1}{3}\le a<0$

$\therefore\ 0<f(1)=-4a\le \frac{4}{3} \qquad \therefore$ (최댓값)$=\frac{4}{3}$



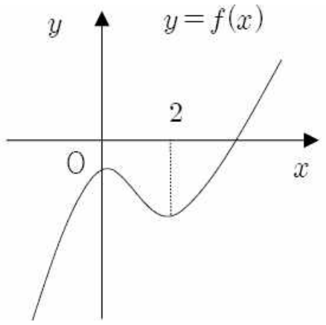
(ⅲ) $f(1)$은 음수이므로 최댓값이 아니다.



따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)을 비교하면 최댓값은 $\frac{4}{3}$이다.

17. 정답 ⑤

ㄱ. $f(0) < 0$ 이면 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

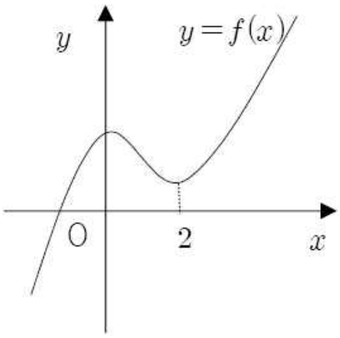


이때, $f(2) < f(0) < 0$ 이므로

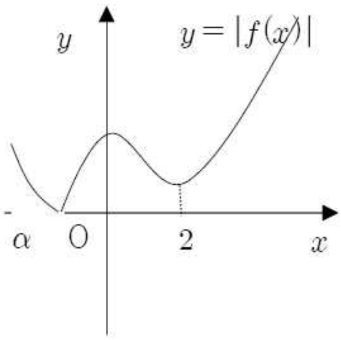
$|f(2)| > |f(0)|$ (참)

ㄴ. $f(0)f(2) \geq 0$ 일 때, $f(0) > f(2)$이므로 함수 $f = |f(x)|$의 그래프의 개형을 각 경우에 따라 그리면 다음과 같다.

(i) $f(0) > f(2) > 0$일 때, 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

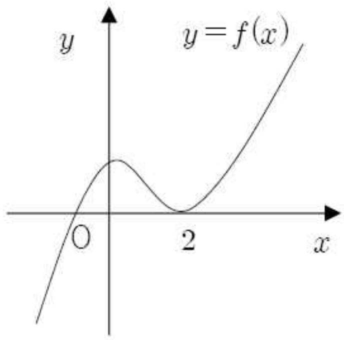


이때, 함수 $y = |f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

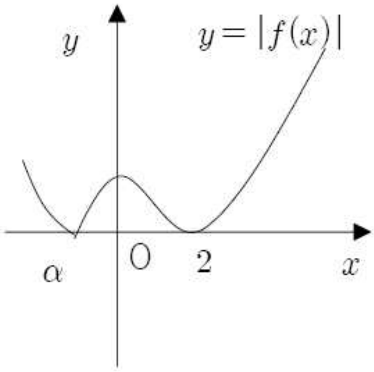


그러므로 $|f(\alpha)| = 0$ $(\alpha \neq 2)$ 라 하면 a의 값은 α와 2로 개수는 2이다.

(ii) $f(0) > f(2)$ 이고 $f(2) = 0$ 일 때, 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

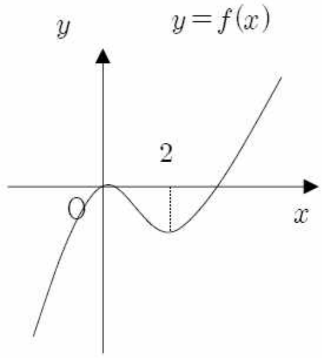


이때, 함수 $y = |f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

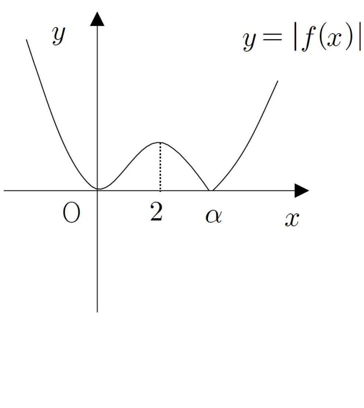


그러므로 $|f(\alpha)| = 0$ $(\alpha \neq 2)$ 라 하면 a의 값은 α와 2로 개수는 2이다.

(iii) $f(0) = 0$ 이고 $f(2) < 0$일 때, 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

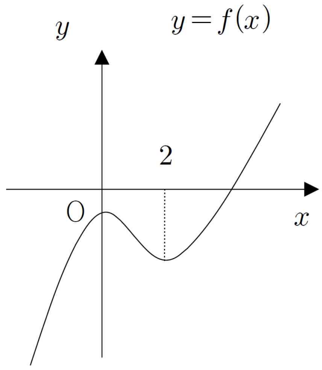


이때, 함수 $y = |f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

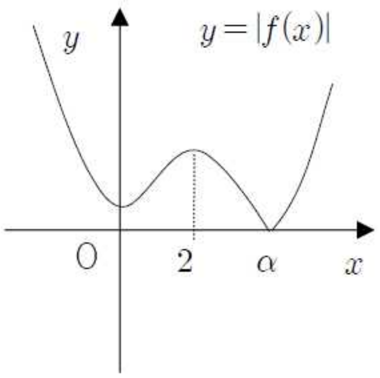


그러므로 $|f(\alpha)|=0 \ (\alpha \neq 2)$ 라 하면 a의 값은 0과 α로 개수는 2이다.

(iv) $f(2) < f(0) < 0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



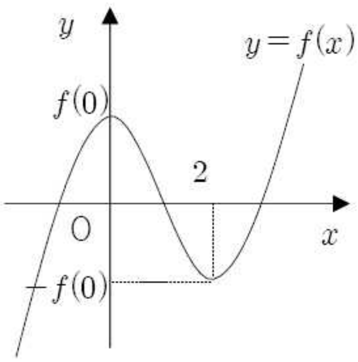
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



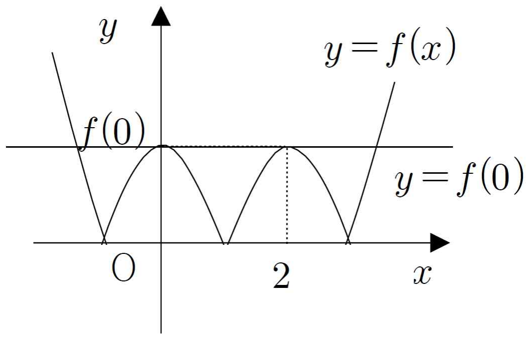
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ 라 하면 a의 값은 0과 α로 개수는 2이다. 따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다. 〈참〉

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$ 이므로 $f(2)=-f(0)$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$과의 서로 다른 교점의 개수와 같다. 위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$과 의 서로 다른 교점의 개수와 같다. 위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$의 서로 다른 교점의 개수는 4이므로 서로 다른 실근의개수도 4 이다. 〈참〉

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18. 정답 ⑤

조건 (가)에 의하여

$$f(-1)=0$$

또한, 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌 구간 $[3,\ 5]$에서 x 축과 접하게 된다.

따라서

$f(x)=k(x+1)(x-\alpha)^2\,(k\neq 0,\ 3\leq\alpha\leq 5)$

라고 하면

$$f'(x)=k(x-\alpha)^2+2k(x+1)(x-\alpha)$$

이므로

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{k\alpha^2-2k\alpha}{k\alpha^2}$$

$=1-\dfrac{2}{\alpha}$

그런데, $3\leq\alpha\leq 5$이므로

$\alpha=3$일 때 최솟값 $m=\dfrac{1}{3}$

$\alpha=5$일 때 최댓값 $M=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\ Mm=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$

19. 정답 ④

$(x^4-4x^3+10x-30)-(2x+2)>0$

$\Leftrightarrow\ x^4-4x^3+8x-32>0$

$\Leftrightarrow\ (x^3+8)(x-4)>0$

로부터

$$f(t)=\begin{cases} t^4-4t^3+8t-32 & (t<-2,\ t>4) \\ -t^4+4t^3-8t+32 & (-2\leq t\leq 4)\end{cases}$$

$x=t$ 인 지점에서의 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 서로 달라야 하므로 $y=f(t)$ 의 개형이 바뀌는 $t=-2,\ 4$ 와 $f'(t)=0$ 을 만족하는 $t=-2,$ $1-\sqrt{3}$ $1,$ $1+\sqrt{3},$ 4이 주어진 조건을 만족한다.

따라서 구하고자 하는 답은

$-2+(1-\sqrt{3})+1+(1+\sqrt{3})+4=5$

20. 정답 ③

조건 (가)에서 $f(n)=0$ 이고 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이므로

$f(x)=(x-n)(x^2+ax+b)$ (단, a, b 는 상수)

로 놓을 수 있다.

또, 조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여

$(x+n)f(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$f(x)=(x+n)(x-n)^2$

이때,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-n)^2+(x+n)\times 2(x-n) \\ &= (x-n)(3x+n) \end{aligned}$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서

$x=-\dfrac{n}{3}$ 또는 $x=n$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{n}{3}$	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{32}{27}n^3$	↘	0	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=-\dfrac{n}{3}$ 에서 극댓값 $\dfrac{32}{27}n^3$ 을 가지므로

$a_n=\dfrac{32}{27}n^3$

따라서, a_n 이 자연수가 되기 위한 n 의 최솟값은 3 이다.

21. 정답 ⑤

조건(가)에 의하여

$f(x)=x^3+ax^2+bc+c$ 로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이므로

$f(0)=f'(0)$ 에서

$c=b$

$\therefore\ f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

$g(x)=f(x)-f'(x)$ 라 하면

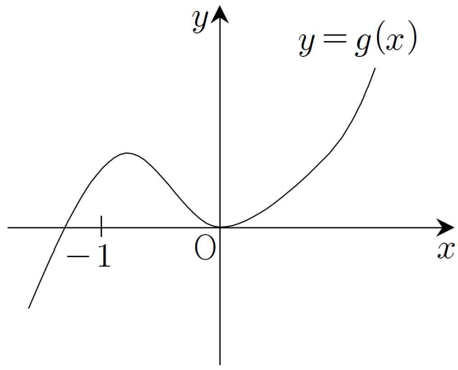
$$\begin{aligned} g(x) &= (x^3+ax^2+bx+b)-(3x^2+2ax+b) \\ &= x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x \end{aligned}$$

$g(0)=0$ 이고,

조건(다)에 의해 $x\geq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$g(x)\geq 0$ 이므로

그림과 같이 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.



따라서 $g'(0)=0$ 이므로

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$ 에서

$g'(0)=b-2a=0$

$\therefore\ b=2a$

$g(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2(x+a-3)$ 이므로

$g(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3-a$ 이고,

$x\geq -1$ 에서 $g(x)\geq 0$ 이므로

$3-a\leq -1$ 이어야 한다.

$\therefore\ a\geq 4 \qquad \cdots$ ㉠

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$ 이므로

$$\begin{aligned} f(2) &= 8+4a+4a+2a=10a+8 \\ &\geq 10\times 4+8=48\ (\because\ ㉠) \end{aligned}$$

따라서 $f(2)$ 의 최솟값은 48 이다.

22. 정답 ④

접점 $(t,\ t^3+at^2+bt)$에서의 접선의 방정식은

$$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+bt$$

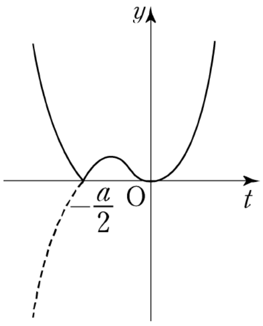
$$y=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2$$

따라서, 접선이 y축과 만나는 점 P는 $\mathrm{P}(0,\ -2t^3-at^2)$

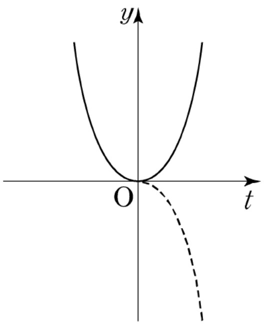
원점에서 점 P까지의 거리 $\mathrm{g}(t)$는

$$\mathrm{g}(t)=|-2t^3-at^2|=t^2\cdot|2t+a|$$

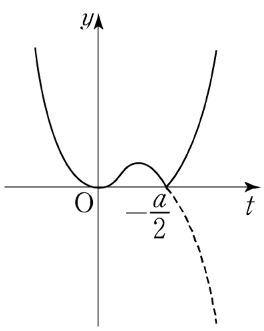
(i) $a>0$일 때



(ii) $a=0$일 때



(iii) $a<0$일 때



따라서, 함수 $\mathrm{g}(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능이려면

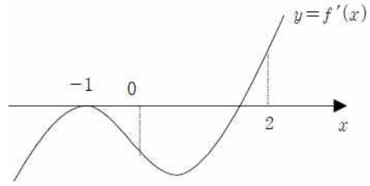
$a=0$

조건 (가)에서 $f(1)=1+a+b=2,\ b=1$

$$\therefore\ f(x)=x^3+x$$

$$\therefore\ f(3)=3^3+3=30$$

23. 정답 ③



$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$ 이고 함수 $y=f(x)$ 가

구간 $(-\infty,\ 0)$

에서 감소하고 구간 $(2,\ \infty)$ 에서 증가하므로

$y=f'(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽과 같다.

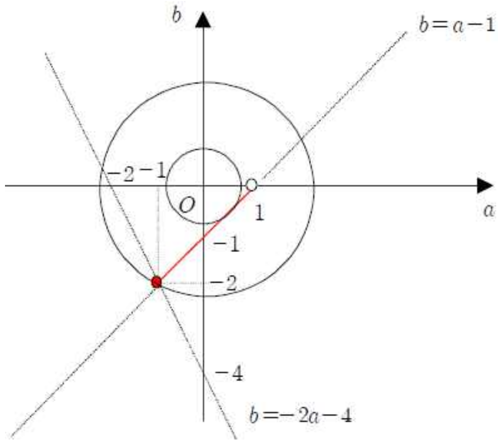
즉, $(-1)^2-a+b=0,\quad b=a-1\quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(0)=b\quad \cdots\cdots$ ㉡

$f'(2)=3(4+2a+b)\geq 0,\ \ b\geq -2a-4 \cdots\cdots$ ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 실수 $a,\ b$ 의 순서쌍을

좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때, $a^2+b^2=r^2\quad \cdots\cdots$ ㉣

이라 하면 ㉣이 직선 $b=a-1$ 에 접할 때 r^2 은 최소가

되고, ㉣이 점 $(-1,\ -2)$ 를 지날 때, r^2 은 최대가 된다.

$$M=(-1)^2+(-2)^2=5$$

$$m=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ M+m=\frac{11}{2}$$

24. 정답 ②

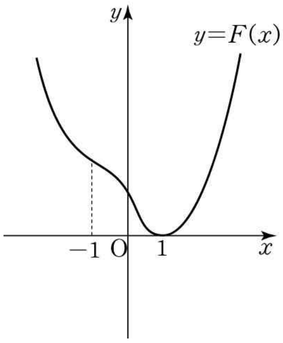
$f(x) = x^3 - 3x + a$에 대하여

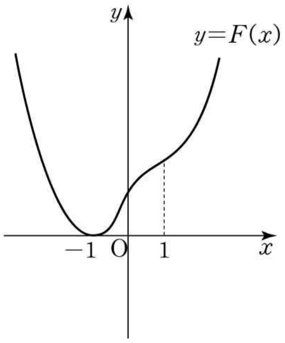
$F(x) = \int_0^x f(t)dt$이므로 $F'(x) = f(x)$

이때, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

에서 $F'(x) = f(x)$는 $x = -1$ 또는 $x = 1$일 때 극값을 가진다.

한편, 함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 $y = F(x)$의 그래프의 개형이 다음 두 그래프 중 하나와 같아야 한다.





따라서 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

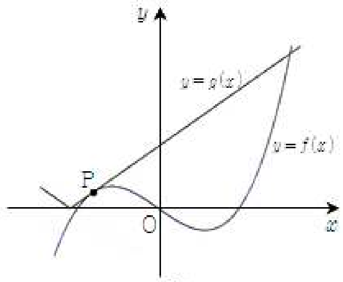
$f(-1) \le 0$또는 $f(1) \ge 0$이어야 하므로

$f(-1) \le 0$에서 $a \le -2$

$f(1) \ge 0$에서 $a \ge 2$ 따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

25. 정답 ④

두 함수 $f(x) = 6x^3 - x$와 $g(x) = |x - a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



<그림1>

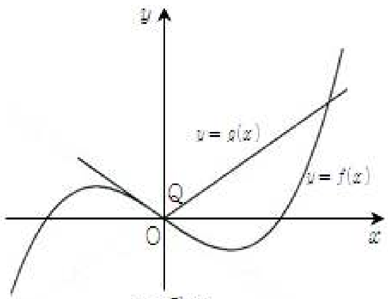
[그림1]에서 직선 $g(x) = x - a$가 곡선 $f(x) = 6x^3 - x$ 위의 점 P에서 접하므로

$f'(x) = 1$에서 $18x^2 - 1 = 1$, $x^2 = \frac{1}{9}$

$\therefore x = -\frac{1}{3}$ $(x < 0)$

이때, 접점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$이므로

$\frac{1}{9} = -\frac{1}{3} - a$ $\qquad \therefore a = -\frac{4}{9}$



<그림2>

[그림2]에서 직선 $g(x) = -x + a$가 곡선 $f(x) = 6x^3 - x$ 위의 점 Q에서 접하므로

$f'(x) = -1$에서

$18x^2 - 1 = -1$, $18x^2 = 0$

$\therefore x = 0$

이때, 접점 Q의 좌표는 $(0, 0)$이므로

$0 = 0 + a$ $\qquad \therefore a = 0$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 $-\frac{4}{9} + 0 = -\frac{4}{9}$

26. 정답 ②

$$f(x)=x^3-3x^2-9x-1$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$의 교점을 $(\alpha,\ f(\alpha))$라 하면 $f(\alpha)=m\alpha$이므로

$$\alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=m\alpha \quad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=\alpha$에서 미분가능해야 하므로

$$f'(\alpha)=m$$

그런데 $f'(x)=3x^2-6x-9$이므로

$$3\alpha^2-6\alpha-9=m \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=\alpha(3\alpha^2-6\alpha-9)$$

$$2\alpha^3-3\alpha^2+1=0$$

$$(2\alpha+1)(\alpha-1)^2=0$$

$$\therefore\ \alpha=-\frac{1}{2}\ \text{또는}\ \alpha=1$$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$일 때, $m=\dfrac{3}{4}+3-9=-\dfrac{21}{4}$

$\alpha=1$일 때, $m=3-6-9=-12$

(i) $m=-\dfrac{21}{4}$일 때,

직선 $y=-\dfrac{21}{4}x$와 곡선 $y=f(x)$가 제4사분면에서 만나는 교점의 x좌표를 구해 보면

$x^3-3x^2-9x-1=-\dfrac{21}{4}x$에서

$$4x^3-12x^2-15x-4=0$$

$$(x-4)(2x+1)^2=0$$

$$\therefore\ x=4$$

그런데 $x=4$인 점에서 함수 $y=f(x)$의 미분계수는 $15\neq-\dfrac{21}{4}$이므로 $x=4$인 점에서 함수 $g(x)$는 미분가능하지 않다.

(ii) $m=-12$일 때,

$f''(x)=6x-6=6(x-1)=0$에서 점 $(1,\ f(1))$은 변곡점이므로 함수 $g(x)$는 미분가능하다.

(i), (ii)에서 $m=-12$

27. 정답 ④

$y=mx+2$와 $y=x^3-3x^2+1$의 교점의 개수는

$x^3-3x^2-mx-1=0$,

$x^2-3x-\dfrac{1}{x}=m$의 실근의 개수와 같다. $(\because\ x\neq 0)$

$g(x)=x^2-3x-\dfrac{1}{x}$로 놓고 미분하면

$$g'(x)=2x-3+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-3x+1}{x^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}$$

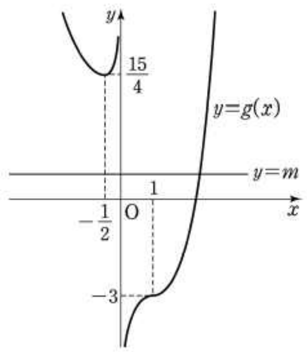
증감표를 그려보면

x		$-\frac{1}{2}$		(0)		1	
$g(x)$	$-$		$+$		$+$	$+$	$+$
$g'(x$	↘	$\frac{15}{4}$	↗		↗	-3	↗

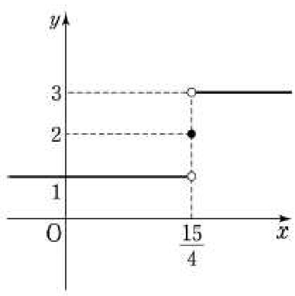
$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=-\infty$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x\to-0}g(x)=+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$

$y=g(x)$, $y=m$의 그래프를 그리면



$f(m)$은 $y=g(x)$와 $y=m$의 교점의 개수이므로



따라서, a의 최댓값은 $\dfrac{15}{4}$이다.

28. 정답 ①

$f'(x) = -12x^3 + 12(a-1)x^2 + 12ax$

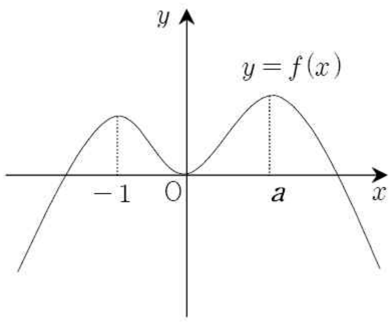
$\quad = -12x\{x^2 - (a-1)x - a\}$

$\quad = -12x(x+1)(x-a)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(-1) = 2a+1$, $f(a) = a^4 + 2a^3$ 이고,

$f(a) - f(-1) = a^4 + 2a^3 - 2a - 1$

$= (a+1)^3(a-1)$

이므로

$0 < a < 1$ 이면 $f(a) < f(-1)$

$a \geqq 1$ 이면 $f(a) \geqq f(-1)$ 이다.

(ⅰ) $0 < a < 1$ 인 경우

$t < -1$ 이면

$\quad g(t) = f(t) = -3t^4 + 4(a-1)t^3 + 6at^2$

$t \geqq -1$ 이면

$\quad g(t) = f(-1) = 2a+1$

따라서,

$$g'(t) = \begin{cases} -12t^3 + 12(a-1)t^2 + 12at & (t < -1) \\ 0 & (t > -1) \end{cases}$$

이고, $\displaystyle\lim_{t \to -1-0} g'(t) = \lim_{t \to -1+0} g'(t) = 0$

이므로 $g(t)$ 는 $t = -1$ 에서 미분가능하다.

그러므로 $0 < a < 1$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅱ) $a \geqq 1$ 인 경우

$f(-1) = f(\alpha)$ $(0 < \alpha \leqq a)$이라 하자.

$t < -1$ 이면

$\quad g(t) = f(t) = -3t^4 + 4(a-1)t^3 + 6at^2$

$-1 \leqq t < \alpha$ 이면

$\quad g(t) = f(-1) = 2a+1$

$\alpha \leqq t < a$ 이면

$\quad g(t) = f(t) = -3t^4 + 4(a-1)t^3 + 6at^2$

$t \geqq a$ 이면

$\quad g(t) = f(a) = a^4 + 2a^3$

따라서,

$$g'(t) = \begin{cases} -12t^3 + 12(a-1)t^2 + 12at & (t \leftarrow 1) \\ 0 & (-1 < t < \alpha) \\ -12t^3 + 12(a-1)t^2 + 12at & (\alpha < t < a) \\ 0 & (t > a) \end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{t \to -1-0} g'(t) = \lim_{t \to -1+0} g'(t) = 0$ 이므로

$g(t)$ 는 $t = -1$ 에서 미분가능하다.

$\displaystyle\lim_{t \to a-0} g'(t) = \lim_{t \to a+0} g'(t)$ 이어야 하므로

$-12a^3 + 12(a-1)a^2 + 12a^3 = 0$ 에서

$12(a-1)a^2 = 0 \quad \therefore a = 1$

$a = 1$ 이면 $f(x) = -3x^4 + 6x^2$ 이므로

$f(-1) = f(1) \quad \therefore \alpha = a = 1$

$$\therefore g'(t) = \begin{cases} -12t^3 + 12t & (t < -1) \\ 0 & (-1 < t < 1) \\ -12t^3 + 12t & (t > 1) \end{cases}$$

$g'(-1) = 0$, $g'(1) = 0$이므로

$a = 1$ 일 때, $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

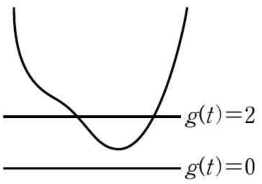
(ⅰ),(ⅱ)에서 함수 $g(t)$ 가 수 전체의 집합에서

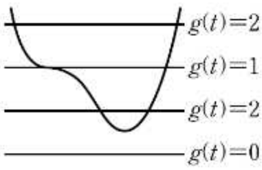
미분가능하기 위한 a의 값의 범위는 $0 < a \leqq 1$ 이므로

구하는 a 의 최댓값은 1 이다.

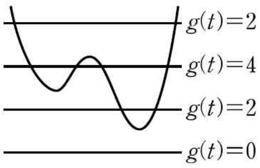
29. 정답 147

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$

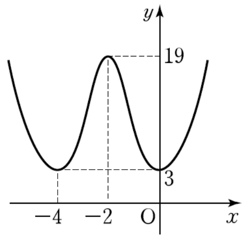
$f(x)=3$의 한 근이 0 이므로 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

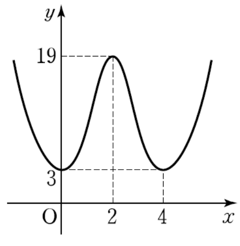
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$ 에서

(극댓값)$=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19$

$\therefore \alpha=\pm 4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$

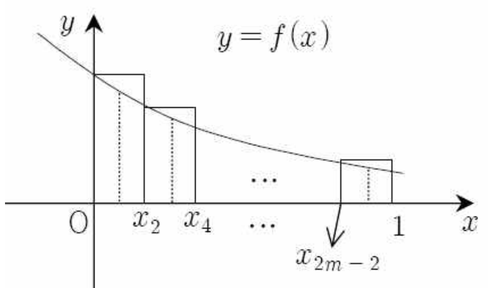




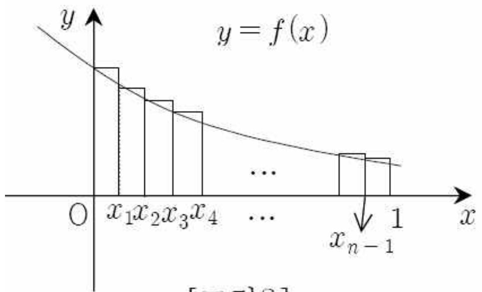
$f(x)=x^2(x-4)^2+3,\ f(-2)=4\times 36+3=147$

30. 정답 ②

ㄱ. (반례)



[그림1]



[그림2]

$x_{2k+2}-x_{2k}=\dfrac{2}{2m}=\dfrac{1}{m}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}$ 은 [그림1]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

$x_{k+1}-x_k=\dfrac{1}{n}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 [그림2]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

따라서, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $x_k=\dfrac{k}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx\right\}$$

$= \int_0^1 f(x)\,dx$ (참)

ㄷ. (반례)

ㄱ의 [그림2]에서

$\int_0^1 f(x)\,dx$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선

$x = 0$, $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이고,

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ 은 직사각형들의 넓이의 합을 나타내므로

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n} > \int_0^1 f(x)\,dx$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

31. 정답 12

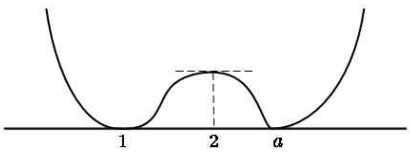
$g(x) = f(x) - f(1)$ 이라 하면

$g(1) = g'(1) = 0$, $g'(2) = 0$

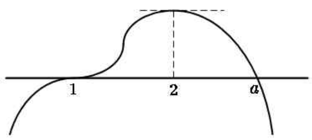
$y = |g(x)|$ 는 $x = 1$ 에서 극값을 갖는다.

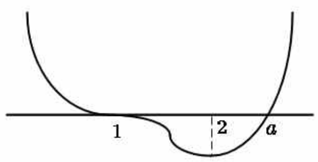
따라서 (나)의 조건에 맞도록 $y = |g(x)|$ 의 그래프를

그려보면 아래 그림과 같다.



$y = g(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 경우에 해당한다.





$\therefore\ g'(x) = a(x-1)^2(x-2) = f'(x)$ $(a \neq 0)$

$\frac{f'(5)}{f'(3)} = \frac{48a}{4a} = 12$

32. 정답 13

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d \cdots\cdots\cdots$ (a)

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c \cdots\cdots\cdots$ (b)

주어진 조건이 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$, $f(2)=2$ 이므로

(b)식에 적용해보면

$c=0$, $b=-3a-8$

이를 (a)에 적용해보면

$d=4a+18$

이들을 (a)에 대입하여 a에 대하여 정리해보면

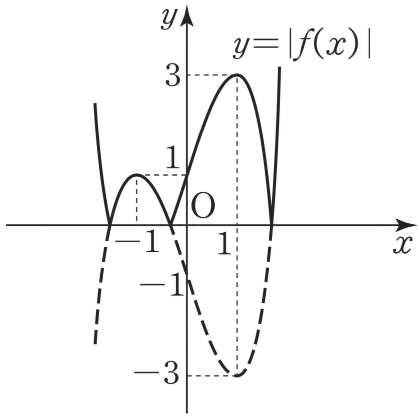
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4+ax^3+(-3a-8)x^2+(4a+18) \\ &= (x^4-8x^2+18)+a(x^3-3x^2+4) \\ &= (x^4-8x^2+18)+a(x+1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$는 a값에 상관 없이 $x=-1$, $x=2$ 을 지난다.

따라서 점의 좌표는 $f(-1)=11$, $f(2)=2$이다.

$f(-1)+f(2)=11+2=13$

33. 정답 17



$f(x)=x^3-3x-1$에서 $f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm 1$

$f(-1)=1$, $f(1)=-3$이므로 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

$\therefore\ g(t)=\begin{cases} 1 & (-1\le t\le 0) \\ -f(t) & (0\le t\le 1) \end{cases}$

$\therefore\ \displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)dt=\int_{-1}^{0} 1dt+\int_{0}^{1} -f(t)dt$

$=\Big[t\Big]_{-1}^{0}+\displaystyle\int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)dt$

$=-(-1)+\left[-\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{3}{2}t^2+t\right]_0^1$

$=1+\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}+1\right)=\dfrac{13}{4}$

$\therefore\ p+q=4+13=17$

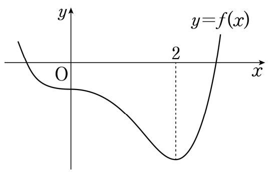
34. 정답 ③

조건 (나)에서 $|\,f(x)\,| \geq 0$이므로 방정식

$|\,f(x)\,| = f(0)$이 실근을 갖지 않으려면 $f(0) < 0$이어야 한다.

ㄱ. $a = 0$이면 조건 (가)에서 $f'(x) = x^2(x-2)$이므로

함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



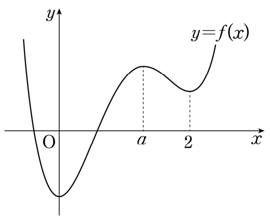
따라서 방정식 $f(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(참)

ㄴ. [반례] $0 < a < 2$이고 $f(a) > 0$일 때,

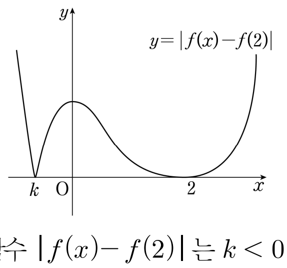
$f(2) > 0$이면 그림과 같이 방정식 $f(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(거짓)



ㄷ. 함수 $|\,f(x) - f(2)\,|$가 $x = k$에서만 미분가능하지 않으려면 $f(x) - f(2) = \dfrac{1}{4}(x-k)(x-2)^3$이어야 한다.

또, $f'(0) = 0$이므로 함수 $y = |f(x) - f(2)|$의 그래프는 다음과 같다.



이때 함수 $|f(x) - f(2)|$는 $k < 0$인 실수 k에 대하여 $x = k$에서만 미분가능하지 않다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

35. 정답 25

함수 $f(x)$는 이차함수이고 조건 (가)에서

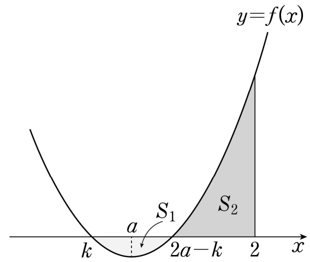
$$\int_0^t f(x)dx = \int_{2a-t}^{2a} f(x)dx$$

이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선

$x = \dfrac{0+2a}{2} = a$에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에서 $0 < \displaystyle\int_a^2 f(x)dx < \int_a^2 |\,f(x)\,|dx$이므로

$a < 2$이고, 함수 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(k,\ 0)$, $(2a-k,\ 0)$에서 만난다.



위의 그림에서 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $x = 2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\displaystyle\int_k^a f(x)dx = \int_a^{2a-k} f(x)dx = -\frac{S_1}{2}$이므로

$$\int_a^2 f(x)dx = -\frac{S_1}{2} + S_2 = 2,$$

$$\int_a^2 |\,f(x)\,|dx = \frac{S_1}{2} + S_2 = \frac{22}{9}$$

따라서 $S_1 = \dfrac{4}{9}$, $S_2 = \dfrac{20}{9}$이다.

$$\int_k^2 f(x)dx = -S_1 + S_2 = \frac{16}{9}$$

$p = 9$, $q = 16$이므로 $p + q = 25$

36. 정답 39

등식 $f(a)+1=f'(a)(a-t)$

$\cdots\cdots$ ㉠

에서 $-1=f'(a)(t-a)+f(a)$이다.

이는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$가 점 $\mathrm{P}(t,\ -1)$을 지남을 뜻한다.

즉 $\mathrm{P}(t,\ -1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점이 $(a,\ f(a))$이다.

조건에서 등식 ㉠을 만족시키는 실수 a의 값이 6 하나뿐이므로

$$f(6)+1=f'(6)(6-t)$$

$\cdots\cdots$ ㉡

$-2<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 ㉡이 성립하므로

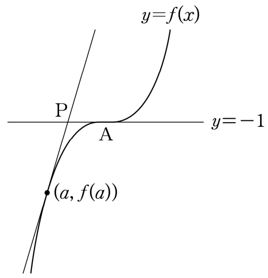
$$f'(6)=0,\ f(6)=-1$$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\mathrm{A}(6,\ -1)$에서 직선 $y=-1$에 접하므로

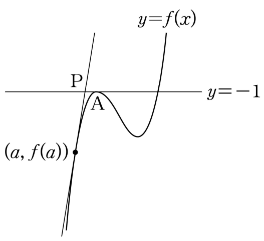
$$f(x)=(x-6)^2(x-m)-1\ \ (m\text{은 상수})$$

$\cdots\cdots$ ㉢

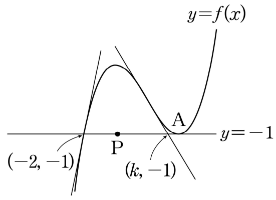
따라서 두 점 $\mathrm{P}(t,\ -1)$, $\mathrm{A}(6,\ -1)$에 대하여 ㉢을 만족시키는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 3가지이다.



[그림1] $m=6$일 때



[그림2] $m>6$일 때



[그림3] $m<6$일 때

[그림1], [그림2]에서는 6보다 작은 모든 실수 t에 대하여 등식 ㉠을 만족시키는 6이 아닌 실수 a가 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

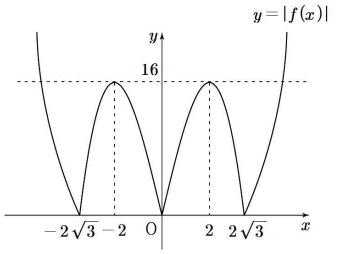
[그림3]에서 $k>-2$인 상수 k에 대하여 등식 ㉠을 만족시키는 실수 a의 값이 6 하나뿐이기 위한 필요충분조건이 $-2<t<k$이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-2,\ -1)$을 지나야 한다. 즉, $m=-2$

$f(x)=(x-6)^2(x+2)-1$이므로

$f(8)=(8-6)^2(8+2)-1=39$

37. 정답 82

함수 $y = | f(x) |$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(t)$가 $t = 0$에서 불연속이 되는 경우는 $f(a) = 0$ 또는 $f(a) = 16$인 경우뿐이다.

(i) $f(a) = 0$인 경우

$$a = -2\sqrt{3},\ a = 2\sqrt{3}$$

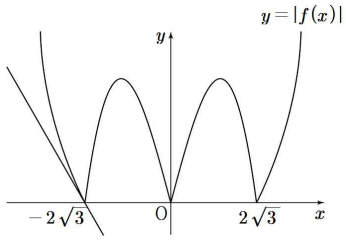
① $a = -2\sqrt{3}$ 인 경우

$x < -2\sqrt{3}$ 인 범위에서

$| f(x) | = -f(x)$이므로

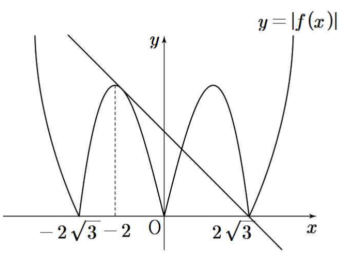
$$-f'(-2\sqrt{3}) = -24$$

따라서 그림과 같이 $t = -24$일 때, 함수 $g(t)$가 불연속이므로 k의 값 중 가장 작은 값은 0이 아니다.



② $a = 2\sqrt{3}$ 인 경우

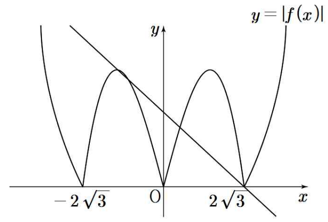
그림과 같이 점 $(2\sqrt{3},\ 0)$을 지나는 직선이 $-2 < x < 0$인 범위에서 곡선 $y = |f(x)|$와 접할 때의 기울기 t의 값 $t = k$에 대하여 함수 $g(t)$가 불연속이므로 k의 값 중 가장 작은 값은 0이 아니다.



(ii) $f(a) = 16$인 경우

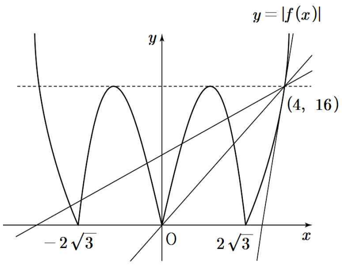
$$a = -2,\ a = 4$$

$a = -2$일 때, 그림과 같이 두 점 $(-2,\ 16)$, $(2\sqrt{3},\ 0)$을 지나는 직선의 기울기 t의 값 $t = k$에 대하여 함수 $g(t)$가 불연속이므로 k의 값 중 가장 작은 값은 0이 아니다.



따라서 주어진 조건을 만족하는 a의 값은 4

그러므로 점 $(4,\ 16)$을 지나고, 기울기가 t인 직선과 함수 $y = | f(x) |$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



직선 $y = t(x-4)+16$의 x절편이

$4 - \dfrac{16}{t}\ (t \neq 0)$이고, 곡선 $y = x^3 - 12x$ 위의 점 $(4,\ 16)$에서의 접선의 기울기가 36이므로

$t = 1,\ 2$일 때, $g(t) = 6$

$t = 3$일 때, $g(t) = 4$

$t = 4$일 때, $g(t) = 3$

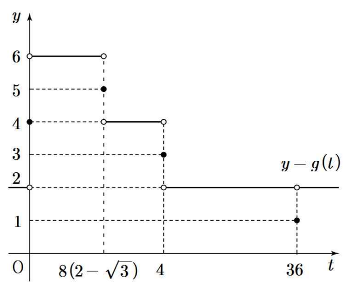
$t = 5,\ 6,\ \cdots,\ 35$일 때, $g(t) = 2$

$t = 36$일 때, $g(t) = 1$

$$\sum_{n=1}^{36} g(n) = 6 \times 2 + 4 + 3 + 2 \times 31 + 1 = 82$$

[참고]

$a = 4$일 때, 함수 $y = g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



38. 정답 64

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이면

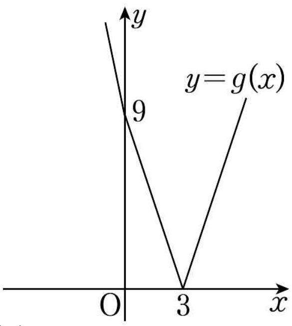
$$\lim_{x\to 0+} g(x)=9,\ \lim_{x\to 0-} g(x)=\frac{3}{2}|3k-9|$$

이므로 $9=\frac{3}{2}|3k-9|$, $|k-3|=2$

$k=1$ 또는 $k=5$

(i) $k=1$인 경우

함수 $g(x)h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로



$$\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3+}\frac{(3x-9)h(x)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3+}3h(x)=3h(3)$$

$$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3-}\frac{(9-3x)h(x)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3-}\{-3h(x)\}=-3h(3)$$

$3h(3)=-3h(3)$이므로

$h(3)=0$

…… ㉠

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(9-3x)h(x)-9h(0)}{x}$$

$$=9h'(0)-3h(0)$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{3}{2}(6-3x)h(x)-9h(0)}{x}$$

$$=9h'(0)-\frac{9}{2}h(0)$$

$$9h'(0)-3h(0)=9h'(0)-\frac{9}{2}h(0),$$

$h(0)=0$

…… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $h(x)=x(x-3)(x+\alpha)$ (단, α는 상수)

이고, 조건 (나)에 의해

$h'(3)=27+6(\alpha-3)-3\alpha=15$,

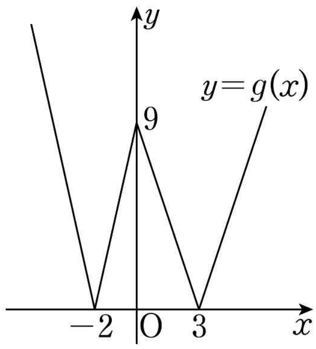
$3\alpha=6$, $\alpha=2$

$h(x)=x(x-3)(x+2)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=1$일 때 $h(1)=-6$

(ii) $k=5$인 경우

(i)과 같은 방법으로



$h(3)=h(0)=h(-2)=0$이고

$h(x)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=5$일 때

$h(5)=70$

(iii) $k\neq 1$, $k\neq 5$인 경우

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니고 함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-} g(x)h(x)=g(0)h(0)$$

$$\frac{3}{2}|3k-9|\times h(0)=9h(0)$$

$h(0)=0$

…… ㉢

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=\frac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=9h'(0)$$

$\dfrac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)=9h'(0)$이므로 $h'(0)=0$

…… ㉣

함수 $g(x)h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로 ㉠과 같은 방법으로 $h(3)=0$

…… ㉤

㉢, ㉣, ㉤에 의하여 $h(x)$는 x^2과 $x-3$을 인수로 가지므로 $h(x)=x^2(x-3)$, $h'(3)=9$

조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $h(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 모든 $h(k)$의 값의 합은

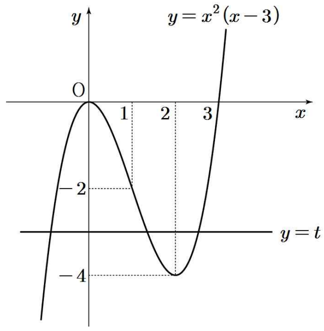
$$(-6)+70=64$$

39. 정답 ⑤

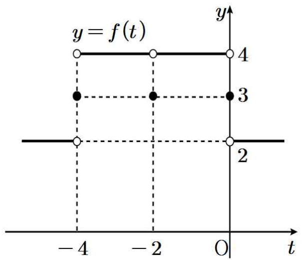
$$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$$

$$\therefore\ x=1 \text{ 또는 } x^2(x-3)-t=0$$

$x^2(x-3)-t=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=x^2(x-3)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.



따라서 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(t)$가 $t=-4,\ -2,\ 0$에서 불연속이다.

함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $t=-4,\ -2,\ 0$에서 연속이어야 한다.

$t=-4$일 때,

$\displaystyle\lim_{t\to-4-}f(t)g(t)=2g(-4)$,

$\displaystyle\lim_{t\to-4+}f(t)g(t)=4g(-4)$,

$f(-4)g(-4)=3g(-4)$이고 함수 $f(t)g(t)$가 $t=-4$에서 연속이므로

$$2g(-4)=4g(-4)=3g(-4)$$

따라서 $g(-4)=0$

같은 방법으로 $g(-2)=g(0)=0$

(가)에서 $g(x)$가 삼차 이하의 다항함수이므로

$$g(x)=ax(x+2)(x+4)\ (a\neq0)$$

이라 하면 (나)에서 $g(-3)=6$이므로 $a=2$

$$g(x)=2x(x+2)(x+4)$$

따라서 $g(1)=30$

40. 정답 137

함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1)-1 & (-1 \le x < 0) \\ f(x) & (0 \le x < 1) \\ f(x-1)+1 & (1 \le x < 2) \\ \quad\vdots & \\ f(x-4)+4 & (4 \le x < 5) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$g(1)=\lim_{x\to 1-} g(x)$ 이다.

$g(1)=f(0)+1$ 이고

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)=1$ 이므로

$f(0)+1=1$ 에서 $f(0)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ 이다.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x-1)+1-g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$$

이고

$$\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$$

이므로 $f'(0)=1$ …… ㉡

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 라 하자.

㉠, ㉡에 의하여 $c=1,\ d=0$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=1+a+b+1=1$ …… ㉢

$f'(1)=4+3a+2b+1=1$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $a=-2,\ b=1$

$$f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$$

$$\int_0^4 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$$

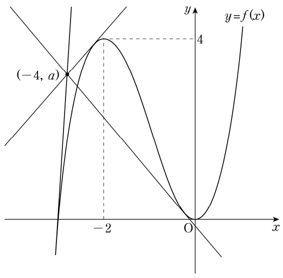
$$+\int_2^3 g(x)dx+\int_3^4 g(x)dx$$

$$=\frac{8}{15}+\left(\frac{8}{15}+1\right)+\left(\frac{8}{15}+2\right)+\left(\frac{8}{15}+3\right)=\frac{122}{15}$$

그러므로 $p=15,\ q=122$

따라서 $p+q=137$

41. 정답 9



함수 $y=f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 4 , $x=0$ 에서 극솟값 0 을 갖는다. 세 접선의 기울기의 곱이 음수이므로 $y=f(x)$ 의 그래프에 접하는 세 접선의 기울기 중 한 접선의 기울기만 음수이다.

$0<a<4$ 이므로 정수 a 의 최댓값 M 은 3 이다.

따라서 $M^2=9$

42. 정답 3

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$g'(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

(가)에서 $1<x<2$일 때, $g(x)=f(2-x)$이므로

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}$$

$$=-\lim_{x\to 1+0}\frac{f(2-x)-f(1)}{(2-x)-1}$$

$$=-f'(1)$$

이다. 즉, $f'(1)=-f'(1)$에서 $f'(1)=0$ $\cdots$ ㉠

또, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$g'(0)=\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$-1<x<0$일 때, $1<x+2<2$이고

$g(x)=g(x+2)=f(2-(x+2))=f(-x)$이므로

$$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}$$

$$=-\lim_{x\to -0}\frac{f(-x)-f(0)}{(-x)-0}$$

$$=-f'(0)$$

이다. 즉, $f'(0)=-f'(0)$에서 $f'(0)=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f'(x)=3x(x-1)=3x^2-3x$이므로

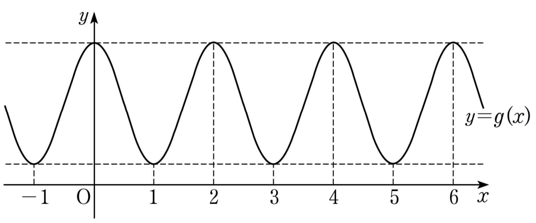
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

함수 $g(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$g(6)-g(3)=g(0)-g(1)=f(0)-f(1)$

$=C-\left(1-\frac{3}{2}+C\right)=\frac{1}{2}$

따라서 $p+q=2+1=3$



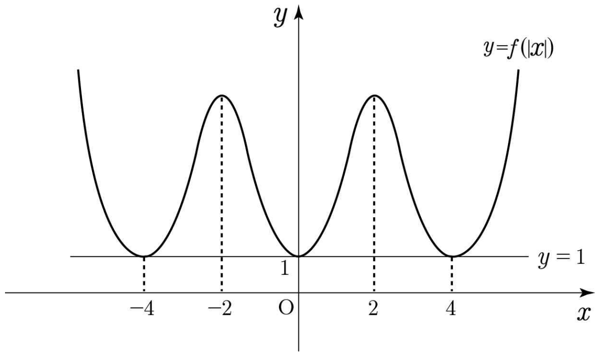
43. 정답 ④

사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대해 대칭이므로

$f(x)=(x-2)^4+a(x-2)^2+b$

$f(0)<f(2)$이고 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $f(x)$가 $x=0$, 4에서 극솟값 1을 갖고 $x=2$에서 극댓값을 가져야 한다.



$f(0)=f(4)=1$에서 $16+4a+b=1$

$f'(x)=4(x-2)^3+2a(x-2)$에서

$f'(0)=f'(4)=0$이므로 $-32-4a=0$

$a=-8$, $b=17$이므로

$f(x)=(x-2)^4-8(x-2)^2+17$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값 $f(2)=17$

44. 정답 ⑤

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 이라 하면

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$= \frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}+\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{4}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$

$+\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{6}{n}\right)-f\left(\frac{4}{n}\right)\right\}+\ \cdots$

$+\frac{n-1}{n}\left\{f\left(\frac{2n-2}{n}\right)-f\left(\frac{2n-4}{n}\right)\right\}$

$+\frac{n}{n}\left\{f\left(\frac{2n}{n}\right)-f\left(\frac{2n-2}{n}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)-\ \cdots$

$-\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-2}{n}\right)+f(2)$

$=f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\frac{k}{n}=x_k$ 라 하면 $\frac{1}{n}=\Delta x$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(2x_k)\Delta x=\int_0^1 f(2x)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{8}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$

$=f(2)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

45. 정답 ③

$f(x)=x^3+ax$ 를 미분하면

$f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A 에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A 에서의 접선의 방정식은

$y=(3+a)(x+1)+(-1-a)$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 구하면

$x^3+ax=(3+a)(x+1)+(-1-a)$

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore b=2$

따라서 점 B 의 좌표는 $(2,\ 8+2a)$ 이다.

마찬가지로 점 B 에서의 접선의 방정식은

$y=(12+a)(x-2)+(8+2a)$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 구하면

$x^3+ax=(12+a)(x-2)+(8+2a)$

$x^3-12x+16=0$, $(x-2)^2(x+4)=0$

$\therefore c=-4$

주어진 조건에서

$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)=8+2a-64-4a$

$=-80 \qquad \therefore a=12$

[다른 풀이]

점 A 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하면

$f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-b)$

$g(x)$ 는 일차식이므로 $f(x)-g(x)$ 는 이차항을 갖지 않는다. 즉, 이차항의 계수는 0 이므로 $-b+2=0$ $\therefore$ $b=2$

점 B 에서의 접선의 방정식을 $y=h(x)$ 라 하면

$f(x)-h(x)=(x-2)^2(x-c)$

마찬가지로 이차항의 계수는 0 이므로

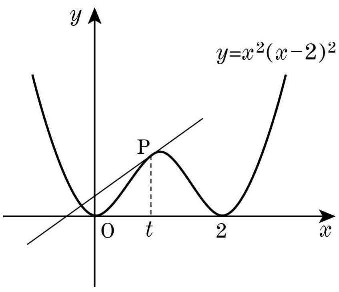
$-c-4=0$ $\therefore c=-4$

따라서

$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)=-56-2a=-80$

$\therefore a=12$

46. 정답 32



직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선이므로 접선이 주어진 곡선의 위쪽에 놓이려면 접점은 곡선이 위로 볼록한 부분의 점이다.
그런데 위로 볼록한 부분에 있는 점에서의 접선 중에는 구간 $[0,\ 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프 아래쪽을 지나는 직선이 생길 수 있다.
그러므로 원점에서 그은 접선의 접점과 점 $(2,\ 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 조사하면 된다.

$y=x^2(x-2)^2$ 에서

$y'=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)$
$\quad=4x(x-1)(x-2)$

점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-a^2(a-2)^2=4a(a-1)(a-2)(x-a)$

$x=0,\ y=0$을 대입하면

$-a^2(a-2)^2=-4a^2(a-1)(a-2)$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

한편 곡선 $y=x^2(x-2)^2$은 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로 점 $(2,\ 0)$에서 그은 접선의 접점의 x 좌표를 b 라 하면 $\dfrac{2}{3}+b=2$ 에서 $b=\dfrac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $\dfrac{2}{3}\le t\le\dfrac{4}{3}$ 이다.

$\therefore\ 36pq=36\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}=32$

47. 정답 9

i) $x<1$ 일 때, $\displaystyle\int_0^x(-t+1)\,dt=x$ 이므로

$-\dfrac{x^2}{2}+x=x\quad\therefore\ x=0$

ii) $x\ge 1$ 일 때,

$\displaystyle\int_0^1(-t+1)\,dt+\int_1^x(t-1)\,dt=x$

$\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}\right)=x$

$x^2-4x+2=0$

$\therefore\ x=2+\sqrt{2}\,(\because x\ge 1)$

i), ii)에 의해 양수인 실근은 $x=2+\sqrt{2}$ 이므로 $m=2,\ n=1$이다.

따라서 $m^3+n^3=9$