

직접 대입하기

20210910가

10. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 12$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$ 인 자연수 k 의 최솟값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

수형도(가지치기)를 이용한 경우 나누기

2022예시문항(공통)15

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^{100} a_k$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때,

$M - m$ 의 값은? [4점]

(가) $a_5 = 5$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

- ① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

수형도(가지치기)를 이용한 경우 나누기

20210921나

21. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = 2$, $a_6 = 19$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [4점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

Case 나누어 중복조합

20201028가

28. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 빵 3개와 같은 종류의 우유 4개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

빵과 우유를 중복조합으로 나누어주는 전형적인 상황인데, 조건이 생겨서 전형적인 풀이(공식)가 먹히지 않습니다. 경우의 수/확률에서는 언제나 “직접 세어보기”, “Case 나누어 세어보기”를 할 마음의 준비를 하셔야합니다. 특히, 빵의 개수와 우유의 개수가 상당히 적습니다. 경우를 직접 나누라는 강력한 힌트입니다.

Case 나누어 중복조합

20210928가/나

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

이 문제가 9평 29번에 배치되었는데, 정답률이 가형 31%, 나형 13%였다고 합니다. 경우의 수, 확률에서는 언제든 Case 나누기할 마음의 준비 하셔야 하구요. 사실 이 문제는 수특 확통 26p 2번에 유사 문항이 있었습니다. 확통은 EBS 풀고 틀린 것/체크해둔 것 시험 전에 한 번 더 보시는게 좋겠죠? 안 푸셨다면 선별된 문제들만이라도요!

확률변수의 관계를 파악하는 눈썰미!

20210926가/20210927나

26. 두 이산확률변수 X, Y 의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

| | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|----|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
| $P(X=x)$ | a | b | c | d | 1 |

| | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|----|
| Y | 11 | 21 | 31 | 41 | 합계 |
| $P(Y=y)$ | a | b | c | d | 1 |

$E(X) = 2, E(X^2) = 5$ 일 때, $E(Y) + V(Y)$ 의 값을 구하시오.

$E(aX + b) = aE(X) + b$ 로 계산하는 것뿐 아니라
직접 $Y = aX + b$ 로 놓을 줄 아셔야 합니다.

확률변수의 관계를 파악하는 눈썰미!

20201015나

15. 이산확률변수 X 가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고

이산확률변수 Y 가 가지는 값은 1, 4, 9, 16이고

$$P(X=k)=P(Y=k^2) \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

이다. $E(X)=6$, $V(X)=1$ 일 때, $E(Y)$ 의 값은? [4점]

$E(aX+b) = aE(X) + b$ 로 계산하는 것뿐 아니라
직접 $Y = aX + b$ 로 놓을 줄 아셔야 합니다.

(이 문항은 오류가 있지만, 그와 무관하게 챙길
것은 챙겨가야겠죠?)

기본적으로 알아야 할 테크닉 4가지

20210618가/20210621나

18. 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2x^2+2$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

$$\text{ㄱ. } x_2 > \frac{1}{2}$$

$$\text{ㄴ. } y_2 - y_1 < x_2 - x_1$$

$$\text{ㄷ. } \frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$$

- ① $x = a$ 대입해서 그래프에서 $f(a)$, $g(a)$ 의 대소 비교하여 x_1, a 의 대소 따지기
- ② $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 은 두 점 사이의 기울기로 해석
- ③ $x_1 y_1$ 이나 $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ 은 사각형의 넓이
- ④ 직접 대입 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ 하여 연산해보기

#팁: ㄱ의 $\frac{1}{2}$ 같은 값들은 그래프에 대입하여 표시해두기

ㄴ에서 챙길 테크닉

2021 사관(나) 21번

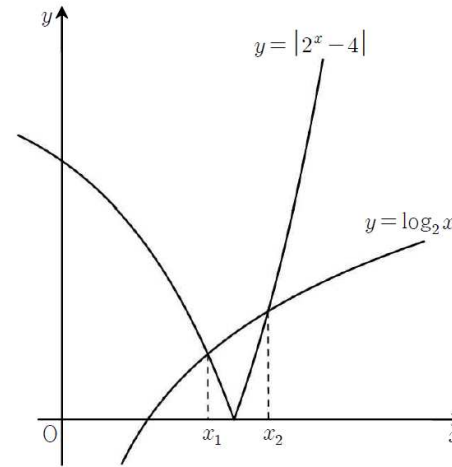
21. 두 곡선 $y = |2^x - 4|$, $y = \log_2 x$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 3$

ㄷ. $2^{x_1} + 2^{x_2} > 8 + \log_2(\log_3 6)$



$a < b < c < d$ 이면 $b - c < d - a$ 입니다.

수직선을 그려보면 쉽게 이해할 수 있습니다.

ㄴ이 핵심. 새로운 수를 놓을 줄 아셔야 합니다.

20201021나

21. 두 곡선 $y=2^{-x}$ 과 $y=|\log_2 x|$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

$$\text{ㄱ. } \frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ㄴ. } \sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$$

$$\text{ㄷ. } y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2} - 2}{6}$$

수의 대소 관계를 비교할 때, 새로운 적당한 수를 놓는 센스가 필요합니다. 이때,

- ① 지수의 밑이 같아야 대소 비교가 쉽다는 점
- ② 보기의 숫자

이 두 가지는 큰 힌트입니다.

삼차함수의 대칭성과 비율 관계

2021 사관(나) 30번

30. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

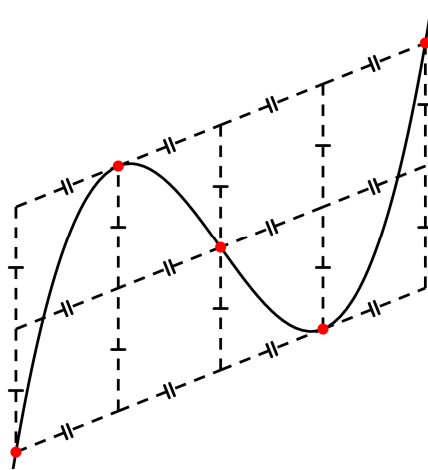
$$f(x) = \begin{cases} x(x+a)^2 & (x < 0) \\ x(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+t$ 의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 5이다.
- (나) 함수 $g(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 불연속인 α 의 개수는 2이다.

$f'(0)$ 의 값을 구하시오. [4점]

- ① 삼차함수는 점대칭입니다.
- ② 접점, 대칭점, 교점 사이의 비율 관계를 알아두면 계산이 아주 편해지는 경우가 있습니다.



공통 접선 관찰하기

20210930(가)

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b 에 대하여 ab 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자.

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$-e^{-x+1} \leq ax+b \leq e^{x-2}$$

이 성립한다.

$|M \times m^3| = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는

서로소인 자연수이다.) [4점]

#Tip! 곡선 두 개가 나왔을 때, 공통 접선에서 답이 되는 상황이나 집중해서 관찰해야 할 상황이 자주 나옵니다. 특히 교점의 개수를 셀 때!

공통 접선 관찰하기

2022 예시문항(미적분) 30번

30. 두 양수 $a, b (b < 1)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & (x \leq 0) \\ \frac{\ln(x+b)}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 m 에 대하여 직선 $y = mx$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$ 이라 할 때, 함수 $g(m)$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{m \rightarrow \alpha^-} g(m) - \lim_{m \rightarrow \alpha^+} g(m) = 1$ 을 만족시키는 양수 α 가

오직 하나 존재하고, 이 α 에 대하여 점 $(b, f(b))$ 는 직선 $y = \alpha x$ 와 곡선 $y = f(x)$ 의 교점이다.

$ab^2 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.) [4점]

합성함수 돌려 그리기

20200321(나)

21. 이차함수 $g(x) = x^2 - 6x + 10$ 에 대하여 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
- (나) 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, 방정식 $g(f(x)) = m$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
- (다) 방정식 $g(f(x)) = 17$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

#Tip! $f(g(x))$ 그래프 그릴 때 $g(x)$ 의 치역 = $f(x)$ 의 정의역이 되도록 그래프를 돌려 그리면 편해요!

합성함수 돌려 그리기

2021 사관(가) 30번

30. 두 함수 $f(x) = x^2 - ax + b$ ($a > 0$), $g(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ 에 대하여 상수 k 와 함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0) < h(4)$

(나) 방정식 $|h(x)| = k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그중 가장 큰 실근을 α 라 할 때 함수 $h(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 극소이다.

$f(1) = -\frac{7}{32}$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a + 16b$ 의 값을 구하시오.

(단, $\frac{5}{2} < e < 3$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 이다.) [4점]

절댓값과 미분가능성

20210930(나)

30. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = f(3) = 0$

(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1 \text{ 이고 } f'(x) = 0\}$ 의 원소의 개수는 1이다.

상수 a 에 대하여 함수 $g(x) = |f(x)f(a-x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\frac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

#Tip! $f(a) = 0$ 이고 $y = |f(x)|$ 가 $x = a$ 에서 미분가능

\Rightarrow 다항식 $f(x)$ 는 $(x-a)^2$ 을 인수로 갖는다.

$\Rightarrow f'(a) = 0$

정적분의 부등식

2022 예시문항(공통) 12번

12. $0 < a < b$ 인 모든 실수 a, b 에 대하여

$$\int_a^b (x^3 - 3x + k) dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값은? [4점]

#Tip! 적분가능한 $f(x)$ 에 대하여 $[a, b]$ 에서

① $f(x) \geq 0$ 이면 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

② $f(x) \geq g(x)$ 이면 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

③ $m \leq f(x) \leq M$ 이면 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

정적분의 부등식

20210918(가)

18. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x \leq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = 0$ 이다.

ㄴ. $g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \geq 1$ 인 실수 a 가 존재한다.

직접 대입하기

20210910가

10. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 12$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$ 인 자연수 k 의 최솟값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

* 수열의 귀납적 정의

- ① 등차·등비를 제외하고 **일반항** 찾는 것은 교과서에서 다루지 않는다.
- ② 따라서 직접 대입하여 찾는다.
- ③ 직접 대입할 때 식의 연산을 마무리 짓지 말고 그대로 표현하는 게 유리할 때가 있다.

| | |
|------------------|--|
| $a_2 + a_1 = 1$ | $a_2 = 1 - 12$ |
| $a_3 + a_2 = -2$ | $a_3 = -1 - 2 + 12$ |
| $a_4 + a_3 = 3$ | $a_4 = 1 + 2 + 3 - 12$ |
| $a_5 + a_4 = -4$ | $a_5 = -1 - 2 - 3 - 4 + 12$ |
| $a_6 + a_5 = 5$ | $a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 12$ |
| $a_7 + a_6 = -6$ | $a_7 = -1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 12$ |
| $a_8 + a_7 = 7$ | $a_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 12$ |

수형도(가지치기)를 이용한 경우 나누기

2022예시문항(공통)15

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^{100} a_k$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때,

$M - m$ 의 값은? [4점]

(가) $a_5 = 5$

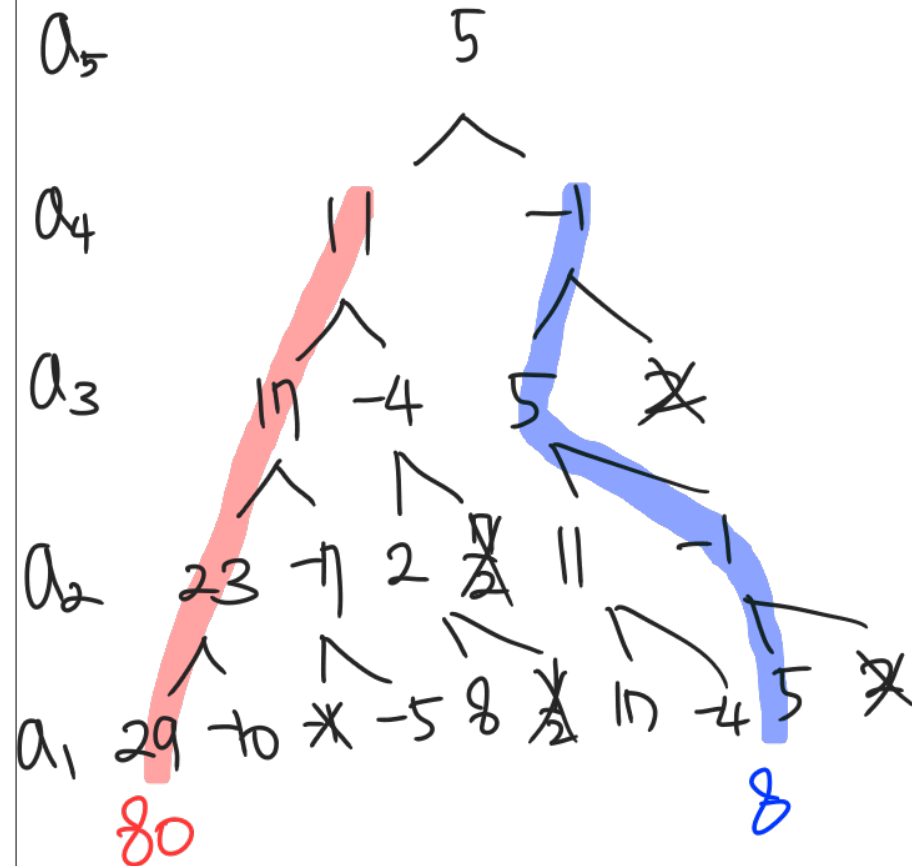
(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

- ① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

* 수열 경우 나눌 때 강력한 도구는 가지치기(수형도)
→ 대입할 때 경우가 나누어지면 가지치기(수형도)가 강력한 도구이다



$M = 80 + (a_5 + a_6 + \dots + a_{100})$

$m = 8 + (a_5 + a_6 + \dots + a_{100})$

수형도(가지치기)를 이용한 경우 나누기

20210921나

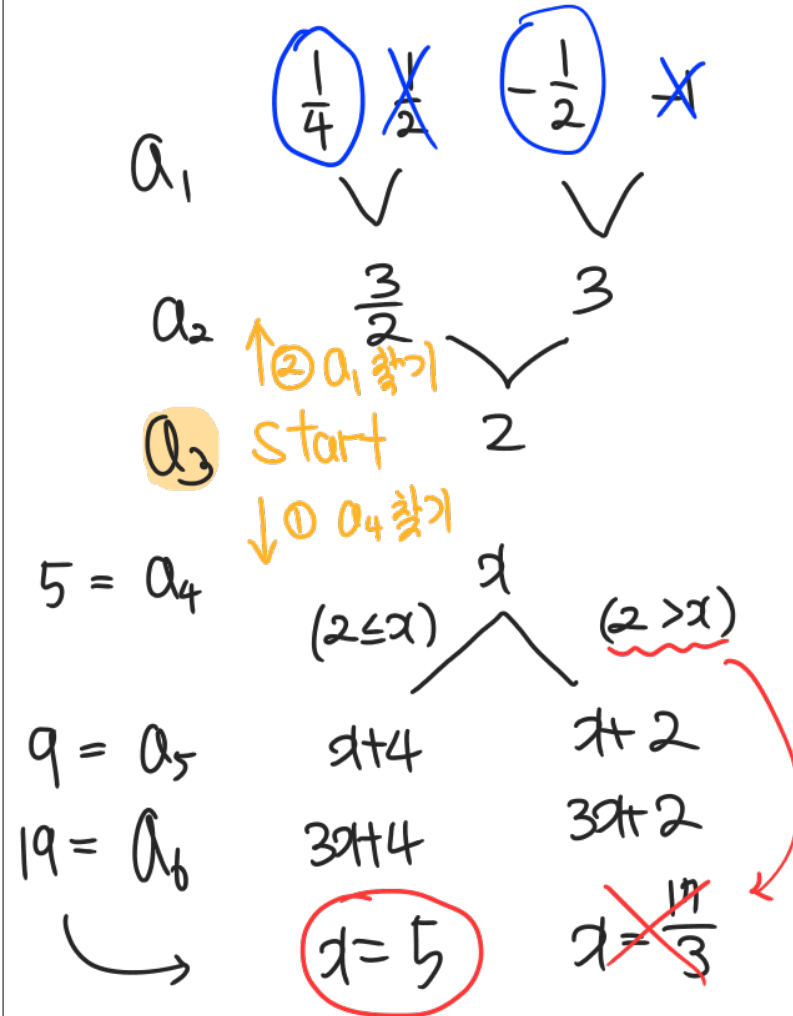
21. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = 2$, $a_6 = 19$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [4점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

* 가지치기로 경우 나눌 때 시작점을 잘잡는 센스가 있으면 좋다.



Case 나누어 중복조합

20201028가

28. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 빵 3개와 같은 종류의 우유 4개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

빵과 우유를 중복조합으로 나누어주는 전형적인 상황인데, 조건이 생겨서 전형적인 풀이(공식)가 먹히지 않습니다. 경우의 수/확률에서는 언제나 “직접 세어보기”, “Case 나누어 세어보기”를 할 마음의 준비를 하셔야합니다. 특히, 빵의 개수와 우유의 개수가 상당히 적습니다. 경우를 직접 나누라는 강력한 힌트입니다.

| | | | |
|---------|---|---|---|
| 빵 우유 | A | B | C |
| | 3 | | |
| | 2 | 1 | |
| | 1 | 2 | |
| | 1 | 1 | 1 |

우유

$$3H_3 = 5C_3 = 10$$

$$2 \times 3H_2 = 2 \times 4C_2 = 12$$

$$2 \times 3H_2 = 2 \times 4C_2 = 12$$

$$3H_1 = 3C_1 = 3$$

37

Case 나누어 중복조합

20210928가/나

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

이 문제가 9평 29번에 배치되었는데, 정답률이 가형 31%, 나형 13%였다고 합니다. 경우의 수, 확률에서는 언제든지 Case 나누기할 마음의 준비 하셔야 하구요. 사실 이 문제는 수특 확통 26p 2번에 유사 문항이 있었습니다. 확통은 EBS 풀고 틀린 것/체크해둔 것 시험 전에 한 번 더 보시는게 좋겠죠? 안 푸셨다면 선별된 문제들만이라도요!

① 흰 A B C

4

3

2

2

B C

1

2

1 1

② 검

$$3 \times 3H_2 = 18$$

$$6 \times 3H_3 = 60$$

$$3 \times 3H_4 = 45$$

$$3 \times 3H_4 = 45$$

168

확률변수의 관계를 파악하는 눈썰미!

20210926가/20210927나

26. 두 이산확률변수 X, Y 의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

| | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|----|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
| $P(X=x)$ | a | b | c | d | 1 |
| Y | 11 | 21 | 31 | 41 | 합계 |
| $P(Y=y)$ | a | b | c | d | 1 |

같다

$E(X) = 2, E(X^2) = 5$ 일 때, $E(Y) + V(Y)$ 의 값을 구하시오.

$E(aX + b) = aE(X) + b$ 로 계산하는 것뿐 아니라 직접 $Y = aX + b$ 로 놓을 줄 아셔야 합니다.

“ $Y = 10X + 1$ ”를 보는 눈썰미 중요함

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \text{ 이용.}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(10X + 1) \\ &= 10E(X) + 1 \\ &= 10 \times 2 + 1 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 5 - 2^2 = 1 \\ V(Y) &= V(10X + 1) = 10^2 V(X) = 100 \end{aligned}$$

121

확률변수의 관계를 파악하는 눈썰미!

20201015나

15. 이산확률변수 X 가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고

이산확률변수 Y 가 가지는 값은 1, 4, 9, 16이고

$P(X=k) = P(Y=k^2)$ ($k=1, 2, 3, 4$) 같다

이다. $E(X)=6$, $V(X)=1$ 일 때, $E(Y)$ 의 값은? [4점]

$E(aX+b) = aE(X) + b$ 로 계산하는 것뿐 아니라 직접 $Y = aX+b$ 로 놓을 줄 아셔야 합니다.

(이 문항은 오류가 있지만, 그와 무관하게 챙길 것은 챙겨가야겠죠?)

$$\begin{aligned}
 Y &= X^2, \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\
 E(Y) &= E(X^2) \\
 &= V(X) + E(X)^2 \\
 &= 1 + 36 \\
 &= 37
 \end{aligned}$$

37

$E(X), V(X)$ 알 때

$$E(ax^2 + bx + c) = a E(X^2) + b E(X) + c$$

이차식까지 간단히 구할 수 있다.

기본적으로 알아야 할 테크닉 4가지

20210618가/20210621나

18. 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2x^2+2$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

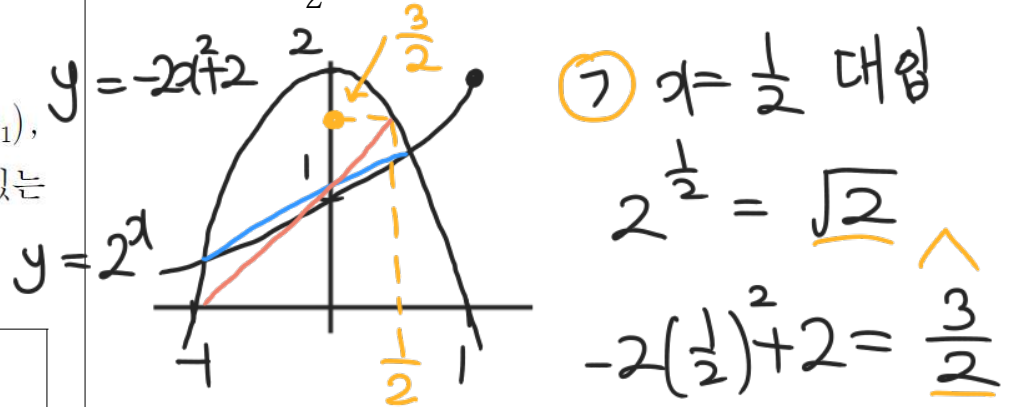
ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1 = 2^0$
 $\parallel 2^{-\frac{1}{2}}$

- ① $x = a$ 대입해서 그래프에서 $f(a)$, $g(a)$ 의 대소 비교하여 x_1 , a 의 대소 따지기
- ② $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 은 두 점 사이의 기울기로 해석
- ③ $x_1 y_1$ 이나 $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ 은 사각형의 넓이
- ④ 직접 대입 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ 하여 연산해보기

#팁: ㄱ의 $\frac{1}{2}$ 같은 값들은 그래프에 대입하여 표시해두기



ㄱ $x = \frac{1}{2}$ 대입

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$-2(\frac{1}{2})^2 + 2 = \frac{3}{2}$

ㄴ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1 \leftarrow (-1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 있는 기울기

ㄷ $y_1 y_2 = 2^{x_1 + x_2}$

$-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$

은 이차함수 모양

$-1 < x_1, \frac{1}{2} < x_2$

개념 기출 다잡기

지수함수 로그함수 기출

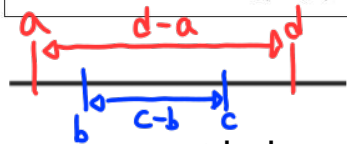
모수_모두의수학
모수 | 모두의수학

ㄴ에서 행길 테크닉

2021 사관(나) 21번

21. 두 곡선 $y = |2^x - 4|$, $y = \log_2 x$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

- <보기>
- ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$
 - ㄴ. $(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 3$
 - ㄷ. $2^{x_1} + 2^{x_2} > 8 + \log_2(\log_3 6)$



$a < b < c < d$ 이면 $b - c < d - a$ 입니다.

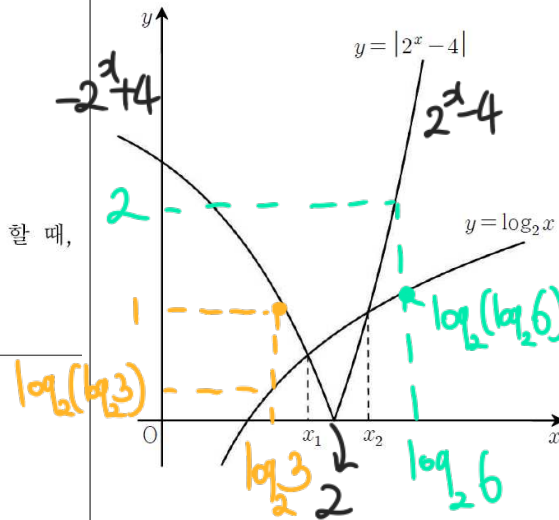
수직선을 그려보면 쉽게 이해할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} \cancel{\text{ㄷ}} &\Leftrightarrow 2^{x_1} + 2^{x_2} - 8 > \log_2(\log_3 6) \\ &\Leftrightarrow y_1 - y_2 > \log_2(\log_3 6) \\ &\Leftrightarrow \log_2 \frac{x_1}{x_2} > \log_2(\log_3 6) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} > \log_3 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 6}{\log_2 3} > \log_3 6$$

문제 상황에서 로그의 밑이 2



$$\begin{aligned} * y_1 &= -2^{x_1} + 4 \\ y_2 &= 2^{x_2} - 4 \end{aligned}$$

㉠ $x = \log_2 3$ 대입

$$-2^{\log_2 3} + 4 = 1 > \log_2(\log_2 3) < 2$$

$x = \log_2 6$ 대입

$$2^{\log_2 6} - 4 = 2 > \log_2(\log_2 6) > 2$$

㉡ 주의 $2^{x_2} - 2^{x_1} \neq y_2 - y_1$ 이므로 직사각형 넓이로 해석 No.

$$\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6 \Rightarrow x_2 - x_1 < \log_2 6 - \log_2 3 = 1$$

$$2^{x_2} - 2^{x_1} = y_2 - y_1 < 2 + 1 = 3$$

개념 기출 다잡기

지수함수 로그함수 ㄱㄴㄷ

ㄴ이 핵심. 새로운 수를 놓을 줄 아셔야 합니다.

20201021나

21. 두 곡선 $y=2^{-x}$ 과 $y=|\log_2 x|$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

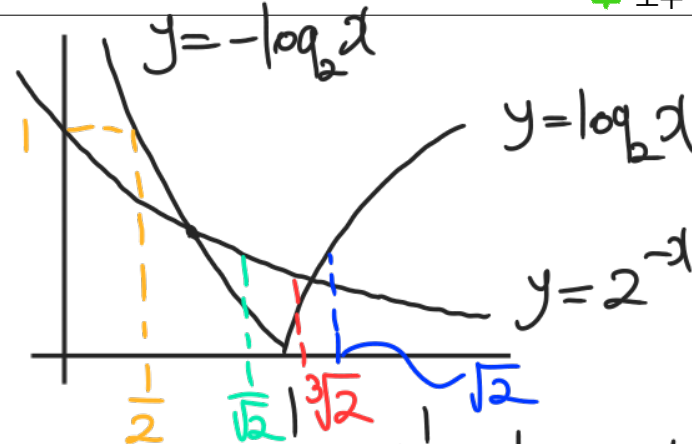
< 보기 >

- ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$
- ㄷ. $y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2} - 2}{6}$

수의 대소 관계를 비교할 때, 새로운 적당한 수를 놓는 센스가 필요합니다. 이때,

- ① 지수의 밑이 같아야 대소 비교가 쉽다는 점
- ② 보기의 숫자

이 두 가지는 큰 힌트입니다.



① $x = \frac{1}{2} : 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < |\log_2 \frac{1}{2}| = 1$
 $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} : 2^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} > |\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}| = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

② $x = \sqrt{2} : 2^{-\sqrt{2}} < |\log_2 \sqrt{2}| = \frac{1}{2} = 2^{-1}$
 $x = \sqrt[3]{2} : 2^{-\sqrt[3]{2}} > |\log_2 \sqrt[3]{2}| = \frac{1}{3} = 3^{-1}$
 $2^{\sqrt[3]{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 3$ 핵심

ㄷ $y_1 = x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sqrt[3]{2} < x_2 \Rightarrow \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3} < y_2$
 $\rightarrow y_1 - y_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{6}$

삼차함수의 대칭성과 비율 관계

2021 사관(나) 30번

30. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

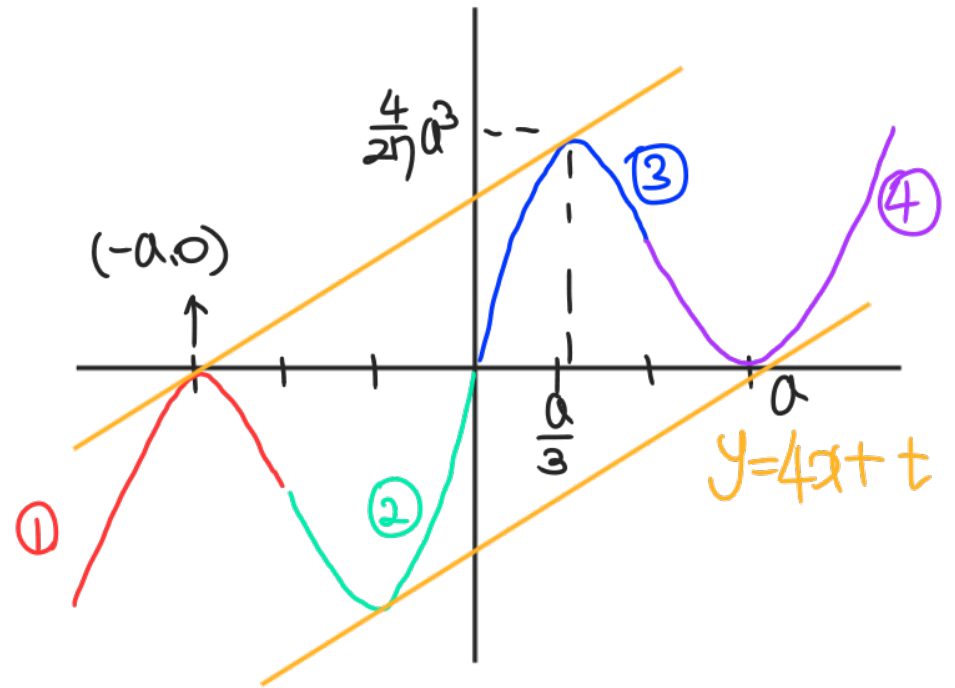
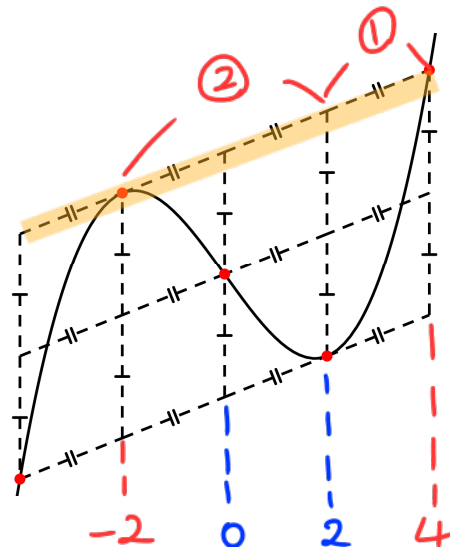
$$f(x) = \begin{cases} x(x+a)^2 & (x < 0) \\ x(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+t$ 의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 5이다.
- (나) 함수 $g(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 불연속인 α 의 개수는 2이다.

$f'(0)$ 의 값을 구하시오. [4점]

- ① 삼차함수는 점대칭입니다.
- ② 접점, 대칭점, 교점 사이의 비율 관계를 알아두면 계산이 아주 편해지는 경우가 있습니다.



① ② 점대칭, ③ ④ 점대칭) → ① ③ 합
(① + ②) (③ + ④) 점대칭

따라서 (점대칭 이은 기울기) = (극점 이은 기울기) = 4

$$\frac{\frac{4}{27}a^3}{\frac{a}{3} - (-a)} = \frac{1}{9}a^2 = 4, \quad a^2 = 36.$$

개념 기출 다잡기

공통 접선 관찰하기

공통 접선 관찰하기

20210930(가)

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b 에 대하여 ab 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자.

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$-e^{-x+1} \leq ax+b \leq e^{x-2}$$

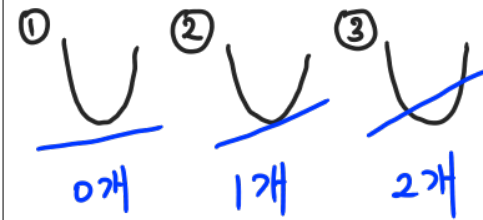
 이 성립한다.

$|M \times m^3| = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

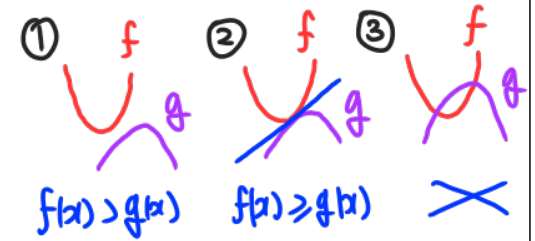
#Tip! 곡선 두 개가 나왔을 때, 공통 접선에서 답이 되는 상황이나 집중해서 관찰해야 할 상황이 자주 나옵니다. 특히 교점의 개수를 셀 때!

* 나형 학생들은 공통 접선 상황이 되는 것만 확인하시고, 가형 학생들은 직접 미분해서 풀어보세요

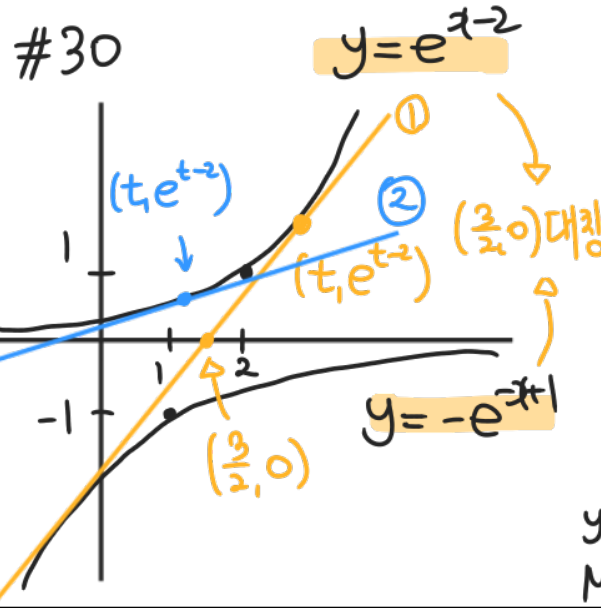
* 교점의 개수



* $f(x), g(x)$ 의 대소 관계



→ 접선 기준으로 상황이 바뀌는 것을 알 수 있다.



#30

① $m = ab$

$$e^{t-2} = \frac{e^{t-2}}{t - \frac{3}{2}}$$

$$y = e^{\frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})} + e^{\frac{1}{2}}$$

$$m = -\frac{3}{2}e$$

② $M = ab$

$$y = e^{t^2}(x-t) + e^{t-2}$$

$$M = (1-t)e^{2t-4}$$

$$M = \frac{1}{2}e^{-3}$$

개념 기출 다잡기

공통 접선 관찰하기

공통 접선 관찰하기

* 나침은 공통 접선의
것만 확인

2022 예시문항(미적분) 30번

30. 두 양수 $a, b (b < 1)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & (x \leq 0) \\ \frac{\ln(x+b)}{x} & (x > 0) \end{cases} \quad -x(x-a)$$

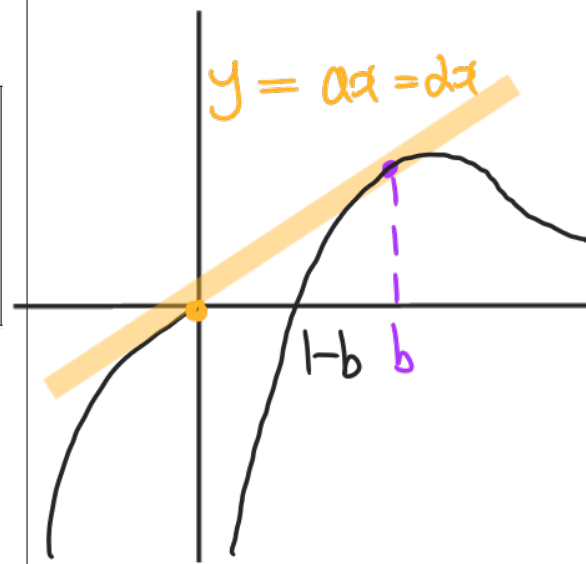
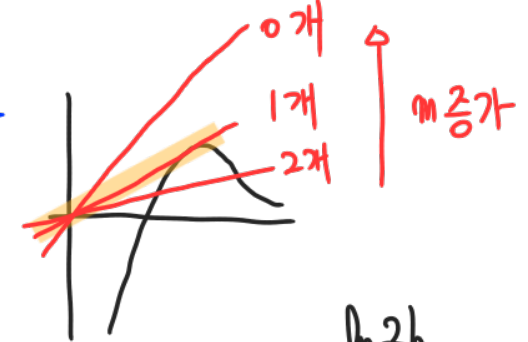
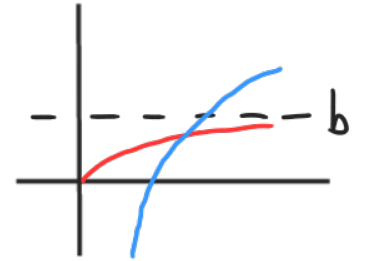
이라 하자. 양수 m 에 대하여 직선 $y = mx$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$ 이라 할 때, 함수 $g(m)$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{m \rightarrow \alpha^-} g(m) - \lim_{m \rightarrow \alpha^+} g(m) = 1$ 을 만족시키는 양수 α 가 오직 하나 존재하고, 이 α 에 대하여 점 $(b, f(b))$ 는 직선 $y = \alpha x$ 와 곡선 $y = f(x)$ 의 교점이다.

$ab^2 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.) [4점]

$$\left(\frac{\ln(x+b)}{x}\right)' = \frac{\frac{x}{x+b} - \ln(x+b)}{x^2}$$



$$\begin{aligned} \alpha b &= \frac{\ln 2b}{b} \\ \alpha &= \frac{\frac{1}{2} - \ln 2b}{b^2} = \frac{\ln 2b}{b^2} \\ \ln 2b &= \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{4}} \\ \alpha &= \alpha = \frac{1}{4} \times 4 e^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \\ ab^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

합성함수 돌려 그리기

20200321(나)

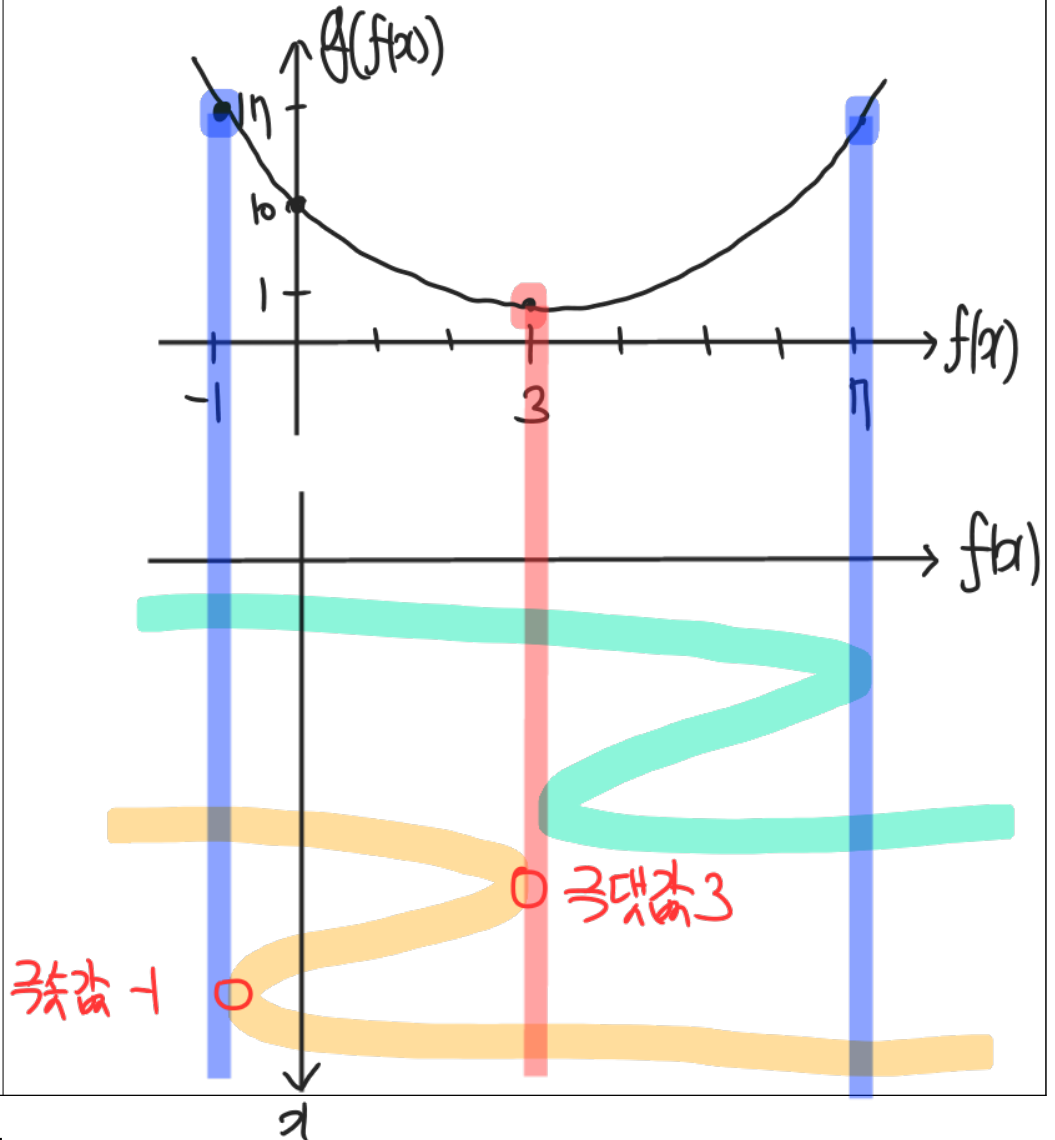
21. 이차함수 $g(x) = x^2 - 6x + 10$ 에 대하여 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
- (나) 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, 방정식 $g(f(x)) = m$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
- (다) 방정식 $g(f(x)) = 17$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

#Tip! $f(g(x))$ 그래프 그릴 때 $g(x)$ 의 치역 = $f(x)$ 의 정의역이 되도록 그래프를 돌려 그리면 편해요!

$$g(x) = (x-3)^2 + 1$$



개념 기출 다잡기

합성함수 돌려 그리기

모수_모두의수학
모수 | 모두의수학

합성함수 돌려 그리기

* 나뉠 학생은 $g(x)$ 그래프문제에서 줬다 치고 생각해보기

2021 사관(가) 30번

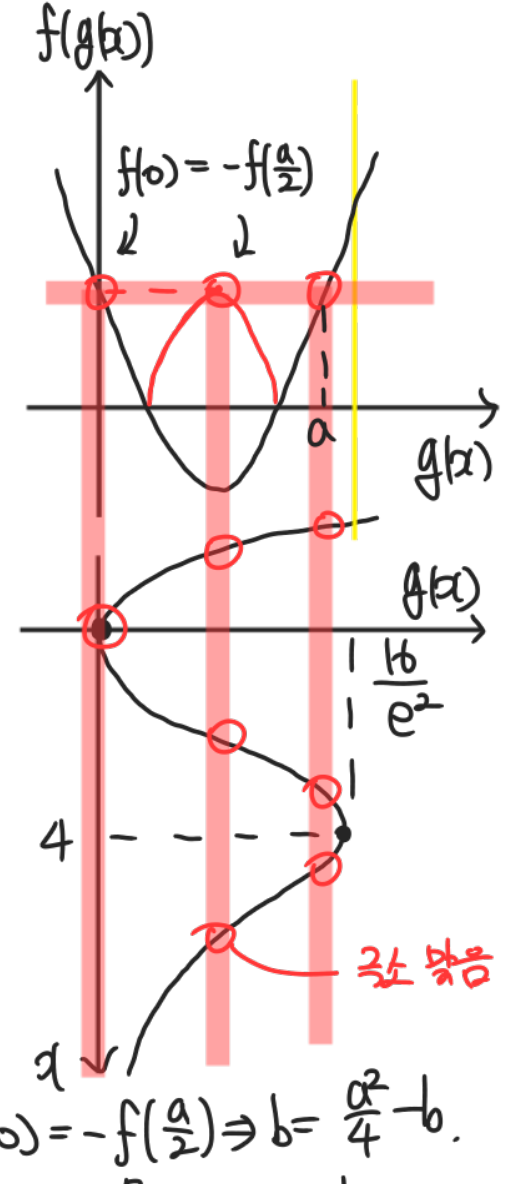
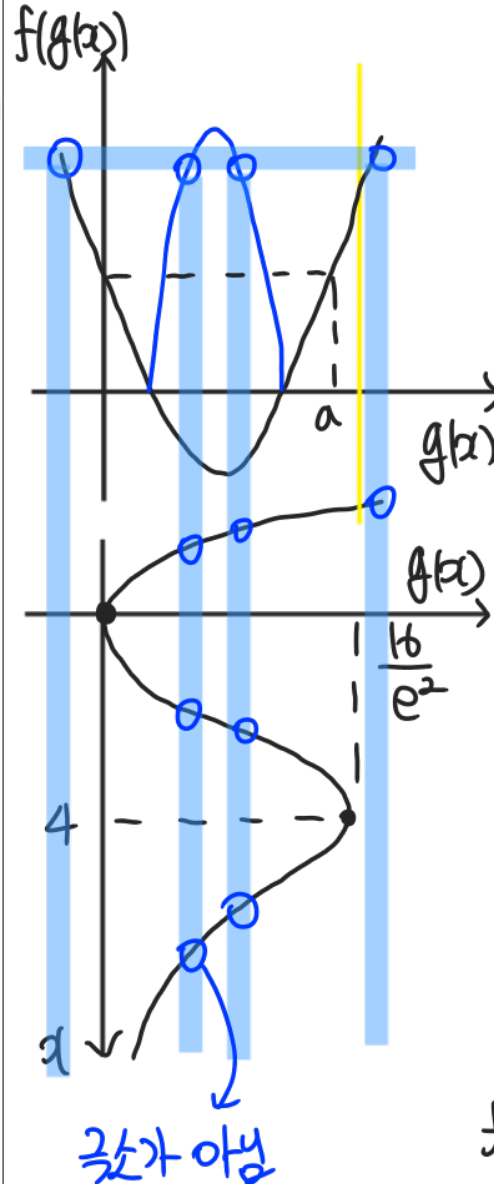
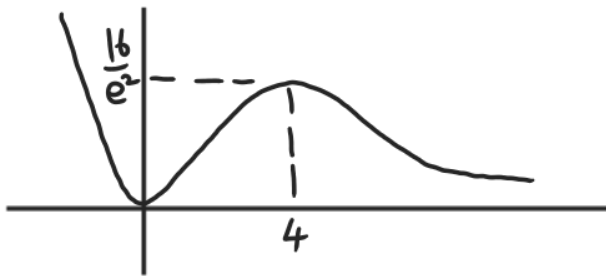
30. 두 함수 $f(x) = x^2 - ax + b$ ($a > 0$), $g(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ 에 대하여 상수 k 와 함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $h(0) < h(4)$
- (나) 방정식 $|h(x)| = k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그중 가장 큰 실근을 a 라 할 때 함수 $h(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이다.

$f(1) = -\frac{7}{32}$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a + 16b$ 의 값을 구하시오.

(단, $\frac{5}{2} < e < 3$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 이다.) [4점]

$$g'(x) = 2x e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} x^2 e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} (4 - x)$$



$$f(0) = -f\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow b = \frac{a^2}{4} - b$$

$$f(1) = -\frac{7}{32} = 1 - a + b$$

$$a = \frac{3}{2}, \frac{17}{2}, b = \frac{9}{32}$$

* $(*) \Rightarrow a < \frac{16}{e^2} = 2 \times x$

절댓값과 미분가능성

20210930(나)

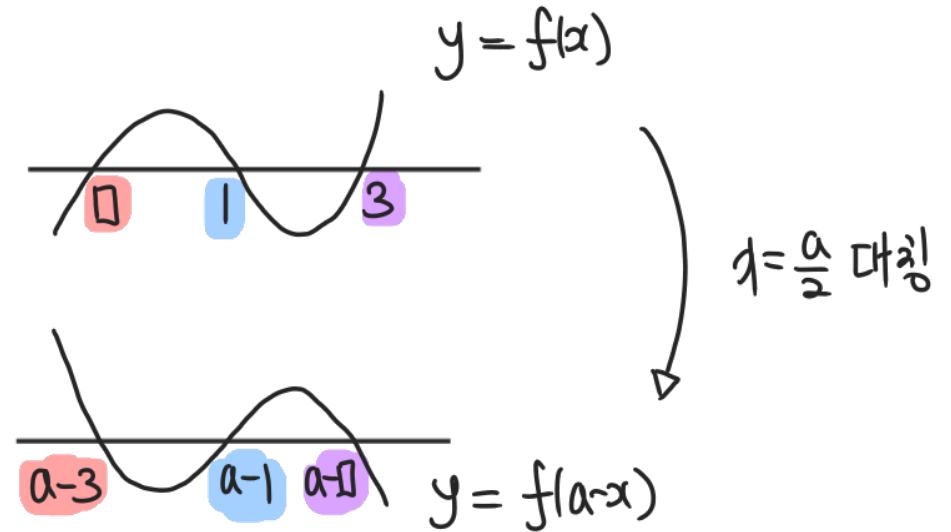
30. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = f(3) = 0$

(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1 \text{ 이고 } f'(x) = 0\}$ 의 원소의 개수는 1이다.

상수 a 에 대하여 함수 $g(x) = |f(x)f(a-x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\frac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

#Tip! $f(a) = 0$ 이고 $y = |f(x)|$ 가 $x = a$ 에서 미분가능
 \Rightarrow 다항식 $f(x)$ 는 $(x-a)^2$ 을 인수로 갖는다.
 $\Rightarrow f'(a) = 0$



$$a-3 = 0, \quad a-1 = 1, \quad a-0 = 3$$

$$a = 2, \quad 0 = -1,$$

$$f(x) = k(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$\frac{g(4a)}{f(0)f(4a)} = \frac{(9 \cdot 7.5k)(9 \cdot 7.5k)}{(3k)(9 \cdot 7.5k)} = 105$$

정적분의 부등식

2022 예시문항(공통) 12번

12. $0 < a < b$ 인 모든 실수 a, b 에 대하여

$$\int_a^b (x^3 - 3x + k) dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값은? [4점]

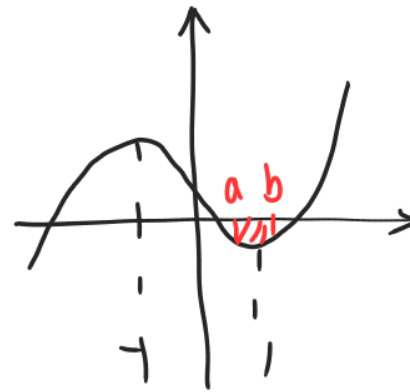
#Tip! 적분가능한 $f(x)$ 에 대하여 $[a, b]$ 에서

① $f(x) \geq 0$ 이면 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

② $f(x) \geq g(x)$ 이면 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

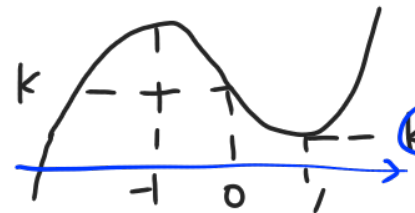
③ $m \leq f(x) \leq M$ 이면 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$



$$\int_a^b f(x) dx < 0$$

$a > 0$ 에서 $f(x) \geq 0$



$$k-2 \geq 0$$

$$\boxed{k \geq 2}$$

정적분의 부등식

* 나쁜 학생들은 그냥 로그 함수를 생각.

20210918(가)

18. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \ln(1+x^4)^{10} & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

$t = \frac{1}{2}$ 대칭

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x \leq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = 0$ 이다.

ㄴ. $g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \geq 1$ 인 실수 a 가 존재한다.

㉠ $\int_0^1 f(t)f(1-t)dt = 0$

㉡ $y = f(x)f(1-x)$ 가 $x = \frac{1}{2}$ 에 대칭이므로

$$g(1) = \int_0^1 f(t)f(1-t)dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$$

✘. $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$ 이면 $f(x) = 0$

$[0, 1]$ 에서 $(\ln(1+x^4))^{10} \leq (\ln 2)^{10}$ 이므로

$f(x)f(1-x) \leq (\ln 2)^{20}$ 이다.

$[0, 1]$ 에서 $g(x) \leq (\ln 2)^{20} \times (1-0) < (\ln e)^{20} = 1$