# 유사문항
# 정답과 해설

[빠른 정답]

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | ④ | 3 | ③ | 4 | ④ | 5 | ④ |
| 6 | 6 | 7 | ④ | 8 | ③ | 9 | 243 | 10 | ⑤ |
| 11 | ② | 12 | ② | 13 | ⑤ | 14 | 39 | 15 | 26 |
| 16 | 10 | 17 | ① | 18 | ① | 19 | 510 | 20 | ① |
| 21 | ② | 22 | ④ | | | | | | |
| **확률과 통계** | | | | | | | | | |
| 23 | ③ | 24 | 45 | 25 | ① | 26 | ⑤ | 27 | 285 |
| 28 | 327 | 29 | 84 | 30 | ① | | | | |
| **미적분** | | | | | | | | | |
| 23 | ④ | 24 | ③ | 25 | ③ | 26 | ⑤ | 27 | ⑤ |
| 28 | ① | 29 | ③ | 30 | ② | | | | |
| **기하** | | | | | | | | | |
| 23 | ③ | 24 | ② | 25 | ② | 26 | ④ | 27 | 54 |
| 28 | ① | 29 | 116 | 30 | 29 | | | | |

[참고] 해설지의 선택과목 문항들은 확통-미적분-기하 순서대로 배치되어 있습니다.

---

1) 2

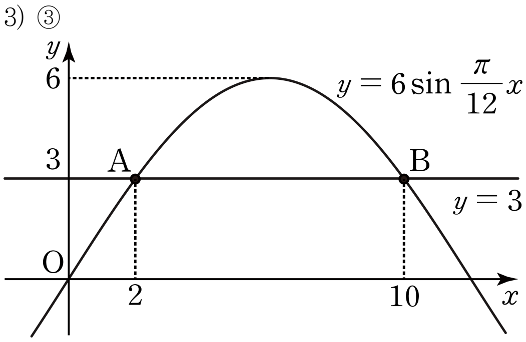
$$\log_5 40+\log_5\frac{5}{8}=\log_5\left(40\times\frac{5}{8}\right)$$
$$=\log_5 25=\log_5 5^2=2\log_5 5=2$$

2) ④

$\dfrac{a_3}{a_2}=2$이므로 공비는 $2$이다.

$a_5=\dfrac{1}{8}\times 2^4=2$

3) ③




$6\sin\dfrac{\pi}{12}x=3$, $\sin\dfrac{\pi}{12}x=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{12}x=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi$

$x=2$, $10$, $\therefore$ $\overline{\mathrm{AB}}=10-2=8$

4) ④

$$\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx-\int_{-3}^{3}(x^3+x^2)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2-x^3-x^2)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}3x^2\,dx=\left[x^3\right]_{-3}^{3}=54$$

5) ④

$$\lim_{x\to 0-}f(x)-\lim_{x\to 1+}f(x)=2-1=1$$

6) 6

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+4a}{x-a}$ 가 존재한다.

따라서 $a^2+a^2+4a=0$, 즉 $a=0$또는 $a=-2$

$a=0$이면 $f(0)=-10$, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+4a}{x-a}=0$이므로 연속이 아니다.

따라서 $a=-2$

$f(2a)=f(-4)=16-10=6$

7) ④

수열의 귀납적 정의에 따라 각 항을 구하면

$a_1=7$, $a_2=\dfrac{7+3}{2}=5$, $a_3=\dfrac{5+3}{2}=4$,

$a_4=4+3=7$, $a_5=\dfrac{7+3}{2}=5$, $a_6=\dfrac{5+3}{2}=4$,

$a_7=4+6=10$, $a_8=10+7=17$

8) ③

$f(x)=2x^3+6x^2+a$라 하면

$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$

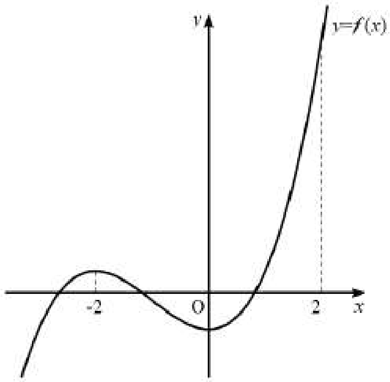
이때 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$

이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

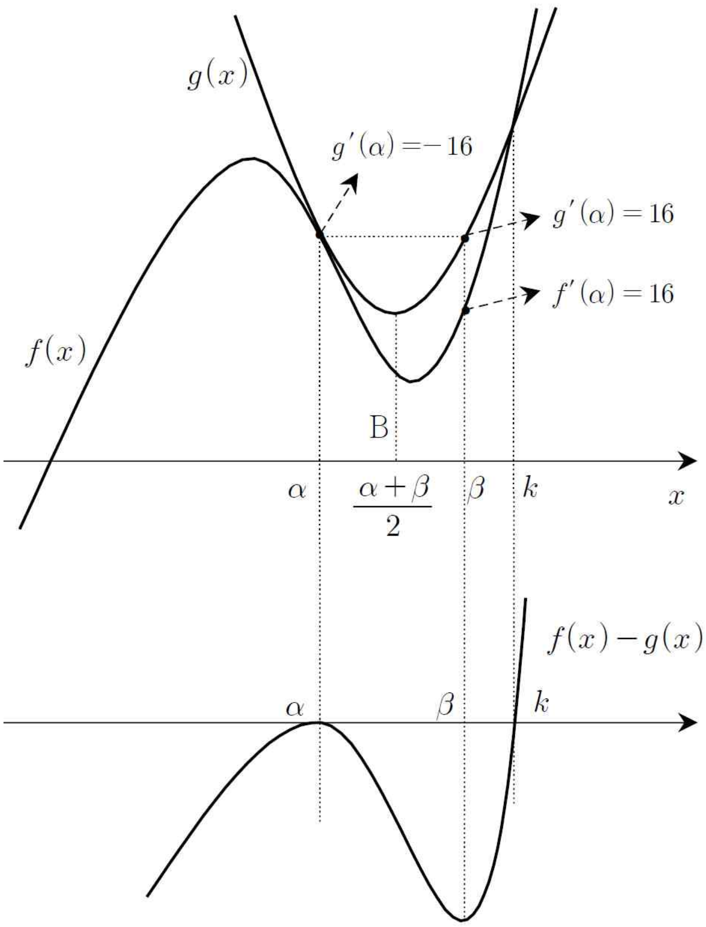
| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $8+a$ | $\searrow$ | $a$ | $\nearrow$ |

그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.




이때 $f(2)=40+a$이므로 $f(2)>f(-2)$이다.
그러므로 조건을 만족시키기 위해서는 $f(-2)\geq 0$이고 $f(0)<0$이어야 한다.
$f(-2)\geq 0$에서
$8+a\geq 0,\ a\geq -8$ ……㉠
또, $f(0)<0$에서
$a<0$ ……㉡
따라서 ㉠, ㉡에서
$-8\leq a<0$
이므로 구하는 정수 $a$의 개수는 8이다.

9) 243
$f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)$이므로
$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$라 하면
$f'(x)-g'(x)=3(x-\alpha)\left(x-\dfrac{2k+\alpha}{3}\right)$ … ㉠
한편
$f'(\alpha)=g'(\alpha),\ f'(\beta)=g'(\beta)$이므로
$f'(x)-g'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ … ㉡
㉠, ㉡에서
$\dfrac{2k+\alpha}{3}=\beta$
$k=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$
$\therefore\ f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ … ㉢
$g'(\alpha)=-16,\ g'(\beta)=16$이므로
$g(x)=2\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+c$
$g'(x)=4\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$
$g'(\beta)=16$에서 $\beta-\alpha=8$ … ㉣
구하는 값은 ㉢, ㉣에 의해
$g(\beta+1)-f(\beta+1)=-(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$
$=243$




10) ⑤

모든 자연수 $n$에 대하여 점 $\mathrm{P}_n$의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이고, 점 $\mathrm{Q}_n$의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$이므로

$a_n : \sqrt{3a_n}=\sqrt{3a_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$a_n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3a_n$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{3}$

이다.

이때, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

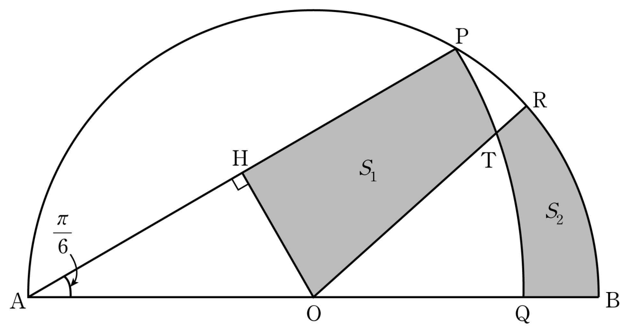
따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 $A_n$은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{1}{2}\times a_{n+1}\times\sqrt{3a_n}$$

$$=\frac{1}{2}\times(\boxed{3n+1})\times\sqrt{9n-6}$$

이다.
따라서, $p=3$, $f(n)=3n+1$이므로
$p+f(8)=3+25=28$

11) ②




삼각형 ABP에서 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

직각삼각형 AOH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OA}}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OA}}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

한편, 부채꼴 PAQ의 넓이를 $M_1$이라 하면

$M_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$

삼각형 AOH의 넓이를 $M_2$라 하면

$M_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{OH}}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

부채꼴 POB에서

$\angle\mathrm{POB}=2\angle\mathrm{PAB}=\frac{\pi}{3}$이고

$\overset{\frown}{\mathrm{PR}}:\overset{\frown}{\mathrm{RB}}=3:7$이므로

$\angle\mathrm{ROB}=\frac{7}{10}\times\frac{\pi}{3}=\frac{7}{30}\pi$

부채꼴 ROB의 넓이를 $M_3$이라 하면

$M_3=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}^2\times\frac{7}{30}\pi=\frac{7}{60}\pi$

이때, $S_1-S_2=M_1-M_2-M_3$이므로

$S_1-S_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{7}{60}\pi=\frac{2}{15}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}$

12) ②

(가)에서 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = -1$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 $-1$인 이차함수이다.

$f(x) = -x^2 + ax + b$($a$, $b$는 상수)라 하면

(나)에서 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-3}{x^2} = -1$이고 $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$이므로 $\lim_{x \to 0} \{f(x)-3\} = 0$, $b = 3$

그러므로 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-3}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2+ax}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(-1 + \frac{a}{x}\right) = -1$에서 $a = 0$이다.

따라서 $f(x) = -x^2 + 3$이므로 $f(1) = 2$

13) ⑤

$m = 3^x$ 에서 $x = \log_3 m$이므로 $\mathrm{A}_m(\log_3 m,\ m)$

$m = \log_2 x$ 에서 $x = 2^m$ 이므로 $\mathrm{B}_m(2^m, m)$

그러므로 $\overline{\mathrm{A}_m \mathrm{B}_m} = 2^m - \log_3 m$

$\overline{\mathrm{A}_m \mathrm{B}_m}$ 이 자연수이기 위해서는 $m$ 과 $2^m$ 이 자연수이므로 $\log_3 m$ 이 음이 아닌 정수이다.

그러므로 $m = 3^k$ (단, $k$ 는 음이 아닌 정수이다.)

$m = 3^0$ 일 때, $a_1 = 2^1 - \log_3 1 = 2$

$m = 3^1$ 일 때, $a_2 = 2^3 - \log_3 3 = 7$

$m = 3^2$ 일 때, $a_3 = 2^9 - \log_3 9 = 510$

따라서 $a_3 = 510$

[보충 설명]

위의 풀이에서 $\overline{\mathrm{A}_m \mathrm{B}_m}$ 이 자연수이기 위해서는 $m = 3^k$ 꼴임을 알 수 있다. 이제 $m$의 값이 $3^{n-1}$에서 $3^n$으로 증가하면 $2^m - \log_3 m$ 의 값도 증가함을 보이자.

모든 자연수 $n$ 에 대하여

$\left(2^{3^n} - n\right) - \left\{2^{3^{n-1}} - (n-1)\right\} = 2^{3^n} - 2^{3^{n-1}} - 1$

$= 2^{3^{n-1}}(2^3 - 1) - 1$

$= 7 \times 2^{3^{n-1}} - 1$

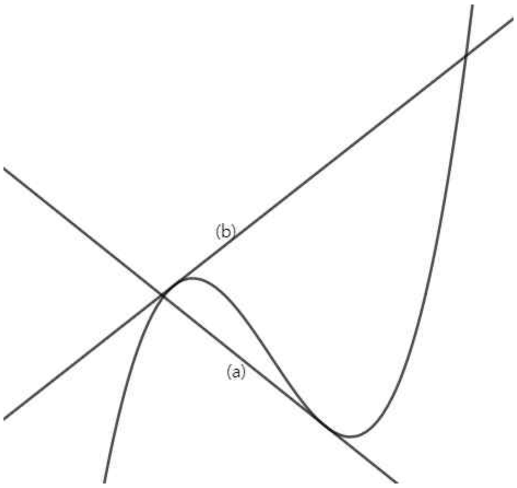
$3^{n-1} \geq 1$ 이므로 $2^{3^{n-1}} \geq 2$ 이다.

그러므로 $7 \times 2^{3^{n-1}} - 1 > 0$

따라서 $2^{3^{n-1}} - (n-1) < 2^{3^n} - n$이 성립한다.

14) 39

$h(0) = 0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 $x = 0$에서 교점을 갖는다. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x = 0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 접해야 한다. 아래 그림의 (a)처럼 접하면 $h(x)$는 $x < 0$에서 미분가능하지 않은 경우가 생기므로 (b)처럼 접해야 한다.




(b)의 경우 $f(x)$와 $g(x)$가 접하는 점을 제외하고 만나는 점의 $x$좌표를 $k$라 하자.

$g(x)=mx+n$이라 하면

$f(x)-g(x)=f(x)-mx-n=x^2(x-k)$으로 놓을 수 있다.

(ⅰ) $k<1$이면

$x\to1-$일 때 $h(x)=f(x)-g(x)$

$x\to1+$일 때 $h(x)=f(x)+g(x)$

$f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$에서 $g(1)=0$이고

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$ 에서 $g'(1)=0$이다.

$g'(1)=0$이면 $g(x)$는 일차함수가 아니므로 조건에 맞지 않는다.

(ⅱ) $k\geq1$이면

$$h(x)=\begin{cases}g(x)-f(x) & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq1)\end{cases}$$

$h(x)$가 $x=1$에서 연속이고 미분가능하므로

$g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$에서 $f(1)=0$이고

$g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$에서 $f'(1)=0$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x+a)$, $g(x)=px+q$로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2$

$g'(x)=p$

$f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$에서

$a=q$, $-2a+1=p$

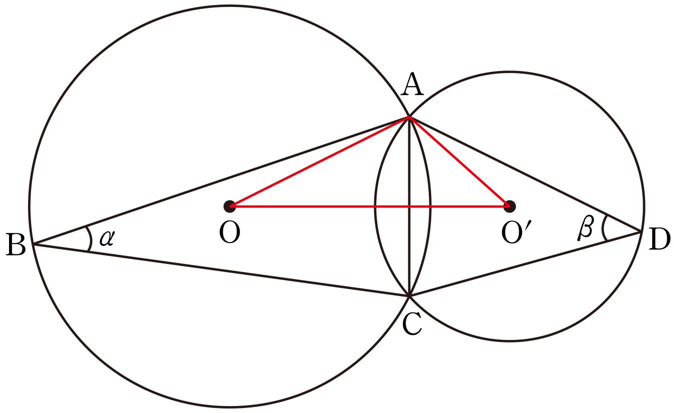
$h(2)=f(2)+g(2)=2+a+2p+q=5$

이상에서 $a=-\frac{1}{2}$, $p=2$, $q=-\frac{1}{2}$

$f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $g(x)=2x-\frac{1}{2}$이므로

$h(4)=f(4)+g(4)=39$

15) 26




$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{2}$이므로

사인법칙에 의하여 두 원의 반지름의 길이의 비는 $3:2$이다.

각각의 반지름의 길이를 $3r$, $2r$라 하면 삼각형 $\mathrm{AOO'}$에서 코사인법칙에 의해

$$1=9r^2+4r^2-12r^2\cos(\pi-(\alpha+\beta))=17r^2$$

$$r^2=\frac{1}{17},$$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 $S$라 하면

$\therefore\ S=9r^2\pi=\dfrac{9}{17}\pi$, $p+q=26$

16) 10

$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+2f'(1)=10$

17) ①

집합 $A=\{x\,|\,1\le x\le 4\}$

집합 $B$에서 $(\log_2 x-k+1)(\log_2 x-k-1)\le 0$

$k-1\le \log_2 x\le k+1$

$\therefore 2^{k-1}\le x\le 2^{k+1}$

$A\cap B\neq\varnothing$ 이 되려면

$2^{k+1}\ge 1$이고 $2^{k-1}\le 4$

$-1\le k\le 3$

따라서 정수 $k$는 $-1$, $0$, $1$, $2$, $3$이므로 개수는 5

18) ①

$f(x)=x^3-\dfrac{k}{2}x^2+x+1$

$f(2)=8-2k+2+1=1$, $\therefore\ k=5$

19) 510

판별식 $D=(a_{n+1})^2-4(a_n)^2=0$

$(a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $a_{n+1}=2a_n$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2 , 공비가 2 인 등비수열이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{2(2^8-1)}{2-1}=510$

20) ①

$\displaystyle\lim_{x\to 2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)\times\lim_{x\to 2+}g(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)$

$\displaystyle\lim_{x\to 2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)\times\lim_{x\to 2-}g(x)=0$ 이고

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$\displaystyle f(2)=\lim_{x\to 2+}f(x)=0$

같은 방법으로 $\displaystyle f(-2)=\lim_{x\to -2-}f(x)=0$

그러므로 $f(x)=(x+2)(x-2)$

함수 $f(x-a)g(x)=(x-a+2)(x-a-2)g(x)$ 의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되기 위해서는

$a-2=2$ 또는 $a+2=-2$ 이므로 $a=4$ 또는 $a=-4$

따라서 구하는 값은 $4\times(-4)=-16$

21) ②

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의해

$\dfrac{10}{\sin C}=2\times 3\sqrt{5}$, $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC 는 예각삼각형이므로

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$ 에서 $\dfrac{a^2+b^2-\frac{2}{3}ab}{ab}=\dfrac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab$, $3(a-b)^2=0$ 이므로 $a=b$

코사인법칙에 의해

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+a^2-2a^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}a^2$,

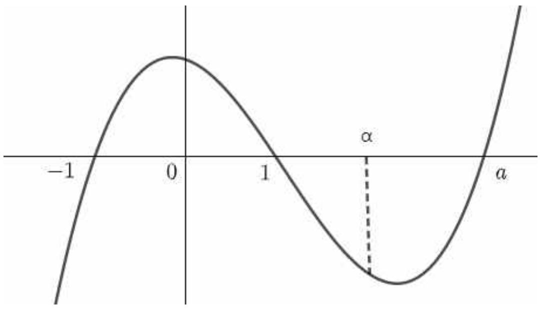
$100=\dfrac{2}{3}a^2$, $a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

22) ④

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$

$g'(x)=0$을 만족하는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $\int_0^x f(t)dt=0$을 만족하는 $x$의 값이다.




위의 $f(x)$의 그래프에서 $x<0$일 때 $\int_0^x f(t)dt=0$의 해가 존재하므로 $g(x)$는 $x<0$일 때 값을 갖는다.

$x=0$일 때 $\int_0^x f(t)dt=0$이므로 $x=0$일 때 $g'(x)=0$은 중근을 갖고 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

$x>0$일 때 $g'(x)\geq 0$이어야 하고 $\int_0^x f(t)dt\geq 0$이어야 한다.

$\int_0^x f(t)dt\geq 0$는 $x>0$일 때 $x=a$에서 최솟값을 갖는다.

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)dt&=\int_0^a (t+1)(t-1)(t-a)dt\\&=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{a}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+at\right]_0^a\\&=-\frac{a^4}{12}+\frac{a^2}{2}\geq 0\end{aligned}$$

$a^2(a^2-6)\leq 0$

$a>1$이므로 $1<a\leq\sqrt{6}$

따라서 $a$의 최댓값은 $\sqrt{6}$

23) ③

${}_4\Pi_2=4^2=16$, ${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$ 이므로

${}_4\Pi_2+{}_4\mathrm{H}_2=16+10=26$

24) 45

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 $a$, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 $b$라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 4개의 $a$와 2개의 $b$를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{4!\times 2!}=15$

P 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 $a$와 1개의 $b$를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!\times 1!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는 $15\times 3=45$

25) ①
1학년 학생 2명을 1명으로 생각하고, 2학년 학생 2명을 1명으로 생각하여 5명의 학생을 원형으로 나열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
이 각각에 대하여 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times 2\times 2=96$

26) ⑤
(ⅰ) 주스 4병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는
$_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\dfrac{6\times 5}{2}=15$
(ⅱ) 생수 2병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는
$_{3}H_{2}={}_{2+3-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=\dfrac{4\times 3}{2}=6$
(ⅲ) 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 3이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $15\times 6\times 3=270$

27) 285
조건 (가), (나)에 의하여 학생 A에게 사탕 1개, 학생 B에게 초콜릿 1개를 먼저 나누어주고 나머지 사탕 5개와 초콜릿 4개를 세 명의 학생에게 나누어주는 경우의 수를 구하면 된다.
그런데 조건 (다)에 의하여 학생 C가 사탕이나 초콜릿을 적어도 1개 받아야 하므로 학생 C가 아무것도 받지 못하는 경우의 수를 빼면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
$_{3}H_{5}\times {}_{3}H_{4}-{}_{2}H_{5}\times {}_{2}H_{4}={}_{7}C_{5}\times {}_{6}C_{4}-{}_{6}C_{5}\times {}_{5}C_{4}$
$={}_{7}C_{2}\times {}_{6}C_{2}-{}_{6}C_{1}\times {}_{5}C_{1}$
$=21\times 15-6\times 5$
$=285$

28) 327
(ⅰ) $f(3)$이 3의 배수인 경우
① $f(3)=3$인 경우
$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는
$_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=6$
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는
$_{4}H_{3}={}_{6}C_{3}=20$
그러므로 $6\times 20=120$
② $f(3)=6$인 경우
$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는
$_{6}H_{2}={}_{7}C_{2}=21$
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는
$_{1}H_{3}={}_{3}C_{3}=1$
그러므로 $21\times 1=21$
①, ②에 의하여 $f(3)$이 3의 배수인 경우의 수는

$120+21=141$
(ii) $f(6)$이 $3$의 배수인 경우
① $f(6)=3$인 경우
$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$
② $f(6)=6$인 경우
$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{H}_5={}_{10}\mathrm{C}_5=252$
①, ②에 의하여 $f(6)$이 $3$의 배수인 경우의 수는 $21+252=273$
(iii) $f(3),\ f(6)$이 모두 $3$의 배수인 경우
① $f(3)=f(6)=3$인 경우
$f(1),\ f(2)$를 선택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
$f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는
${}_1\mathrm{H}_2={}_2\mathrm{C}_2=1$
그러므로 $6\times1=6$
② $f(3)=3,\ f(6)=6$인 경우
$f(1),\ f(2)$를 선택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
$f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
그러므로 $6\times10=60$
③ $f(3)=f(6)=6$인 경우
$f(1),\ f(2)$를 선택하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$
$f(4),\ f(5)$를 선택하는 경우의 수는
${}_1\mathrm{H}_2={}_2\mathrm{C}_2=1$
그러므로 $21\times1=21$
①, ②, ③에 의하여 $f(3),\ f(6)$이 모두 $3$의 배수인 경우의 수는 $660+21=87$
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$141+273-87=327$

29) 84
조건 (가)에 의하여
$x_1\le x_2-2,\ x_2\le x_3-2$ 이고,
조건 (나)에 의하여
$x_3\le 10$이므로
$0\le x_1\le x_2-2\le x_3-4\le 6$
이때, $x_2-2=x_2{}',\ x_3-4=x_3{}'$이라 하면
$0\le x_1\le x_2{}'\le x_3{}'\le 6\ \cdots$ ㉠
이고, 주어진 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2,\ x_3$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2{}',\ x_3{}'$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2{}',\ x_3{}')$의 개수와 같다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는
$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$의 $7$개에서 중복을 허락하여 $3$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{7}\mathrm{H}_{3} = {}_{7+3-1}\mathrm{C}_{3} = {}_{9}\mathrm{C}_{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$$

30) ①

(ⅰ) 1, 2가 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우

이 두 카드를 한 묶음으로 생각하여 나열하는 경우의 수는 $4!$이고, 두 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 1, 2가 적힌 두 카드가 이웃하도록 5장의 카드를 나열하는 경우의 수는

$4!\times2=\boxed{48}$ 이다.

(ⅱ) 1, 3이 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우

(ⅰ)과 마찬가지로 경우의 수는 $\boxed{48}$ 이다.

(ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)가 동시에 일어나는 경우

1, 2, 3이 적힌 세 카드를 한 묶음으로 생각하여 나열하는 경우의 수는 $3!$이고, 세 카드 중 1이 적힌 카드가 가운데에 위치하도록 세 카드를 나열하는 경우의 수는 2이므로 5장의 카드를 나열하는 경우의 수는 $3!\times2=\boxed{12}$ 이다.

5장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 $5!=120$이므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 경우의 수는

$120-(48+48-12)=\boxed{36}$ 이다.

따라서 $p=48$, $q=12$, $r=36$이므로

$p+q+r=48+12+36=96$

31) ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+4n+1)-(4n^2-4n+1)}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{2+\frac{5}{n}}$$

$$=\frac{8}{2+0}=4$$

32) ③

$-1<\frac{|k|}{3}-2\le1$, $3<|k|\le9$

$k=\pm4$, $\pm5$, $\cdots$, $\pm9$, 12개

33) ③

$\{a_n\}$이 등비수열이므로 $a_n=a\times r^n$으로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a\times r^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a\times\left(\frac{r}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a\times\left(\frac{r}{3}\right)^n=\frac{1}{6}$이어야 한다.

즉, $a=\frac{1}{6}$, $r=3$

따라서 $a_n=\frac{1}{6}\times 3^n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

34) ⑤

$a_n+4^n<a_{n+1}<a_n+4^n+3^n$ 에서

$4^n<a_{n+1}-a_n<4^n+3^n$ 이므로

$4^1<a_2-a_1<4^1+3^1$

$4^2<a_3-a_2<4^2+3^2$

$4^3<a_4-a_3<4^3+3^3$

$\vdots$

$4^{n-1}<a_n-a_{n-1}<4^{n-1}+3^{n-1}$

위의 식을 변끼리 더하면

$4^1+4^2+4^3+\cdots+4^{n-1}<a_n-a_1<(4^1+4^2+4^3+\cdots+4^{n-1})+(3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})$

이때, 등비수열의 합을 이용하면

$$\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}<a_n-a_1<\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$\frac{4(4^{n-1}-1)}{3}+\frac{4}{3}<a_n<\frac{4(4^{n-1}-1)}{3}+\frac{3(3^{n-1}-1)}{2}+\frac{4}{3}$$

$$\frac{4^n}{3}<a_n<\frac{4^n}{3}+\frac{3^n-3}{2}$$

$2\times 4^n<6a_n<2\times 4^n+3\times 3^n-9$

$$\frac{2\times 4^n}{k^n}<\frac{6a_n}{k^n}<\frac{2\times 4^n+3\times 3^n-9}{k^n}$$

2 이상의 정수 $k$의 값을 범위를 나누어서 생각해보자,

(i) $2\le k<4$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 4^n}{k^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{2\times\left(\frac{4}{k}\right)^n\right\}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 4^n+3\times 3^n-9}{k^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{2\times\left(\frac{4}{k}\right)^n+3\times\left(\frac{3}{k}\right)^n-\frac{9}{k^n}\right\}=\infty$$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n}{k^n}$ 는 발산하고, 실수 $\alpha$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k=4$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 4^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{2\times\left(\frac{4}{4}\right)^n\right\}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 4^n+3\times 3^n-9}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{2\times\left(\frac{4}{4}\right)^n+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{9}{4^n}\right\}=2$$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n}{k^n}=2$

따라서 $\alpha=2$이다.

(iii) $k>4$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 4^n}{k^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{2\times\left(\frac{4}{k}\right)^n\right\}=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 4^n+3\times 3^n-9}{k^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{2\times\left(\frac{4}{k}\right)^n+3\times\left(\frac{3}{k}\right)^n-\frac{9}{k^n}\right\}=0$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n}{k^n}=0$

따라서 $\alpha=0$가 된다.

(i)~(iii)에서 따라 $\alpha$의 값이 존재하는 $k$의 최솟값은 $4$이고, $k=4$일 때 $\alpha=2$이다.

$\therefore\ p+q=4+2=6$

35) ⑤

(i) $n=1$ ; $S_1=\frac{1}{2}$, $a_1=\frac{1}{2}$, $\therefore\ \frac{1}{a_1}=2$

(ii) $n\geq 2$ ; $\frac{S_n}{n!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=-\frac{n}{(n+1)!}$

$S_n=-\frac{n}{n+1}$

$n=2$이면 $a_2=S_2-a_1=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{7}{6}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{a_k}=2-\frac{6}{7}=\frac{8}{7}$

$n\geq 3$이면

$a_n=S_n-S_{n-1}=-\frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{a_n}=-n(n+1)$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$

$=\frac{8}{7}+2+6-\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

$=\frac{64}{7}-\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$=-\frac{1}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n+\frac{64}{7}$

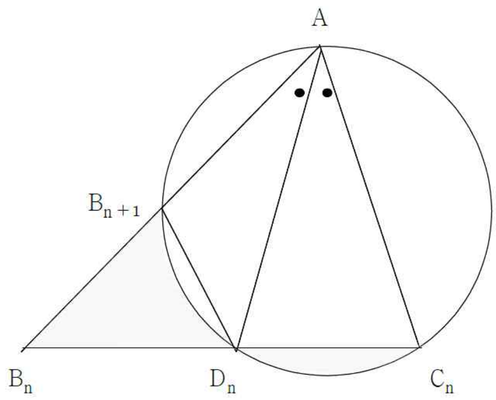
$\therefore\ f(n)=n,\ g(n)=\frac{1}{n(n+1)},\ h(k)=k^2$

$f(5)\times g(3)\times h(6)=5\times\frac{1}{12}\times 36=15$

36) ①

그림 $R_n$에서 $\angle \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{AD}_n = \angle \mathrm{D}_n\mathrm{AC}_n$이므로 $\overset{\frown}{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_n} = \overset{\frown}{\mathrm{D}_n\mathrm{C}_n}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_n} = \overline{\mathrm{D}_n\mathrm{C}_n}$이므로 두 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$, $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은 삼각형 $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{B}_{n+1}$의 넓이와 같다.




$R_n$

그림 $R_1$의 삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{B_1C_1}}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times 3\times 2\times \cos\frac{\pi}{3} = 7$$

즉, $\overline{\mathrm{B_1C_1}} = \sqrt{7}$

또한, $\angle \mathrm{B_1AC_1}$의 이등분선이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점이 $\mathrm{D_1}$이므로

$\overline{\mathrm{AB_1}} : \overline{\mathrm{AC_1}} = \overline{\mathrm{B_1D_1}} : \overline{\mathrm{D_1C_1}} = 3:2$

따라서,

$$\overline{\mathrm{B_1D_1}} = \frac{3\sqrt{7}}{5},\ \overline{\mathrm{D_1C_1}} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

또한, 삼각형 $\mathrm{AD_1C_1}$의 외접원의 중심을 O라 하면

$\angle \mathrm{D_1OC_1} = \angle \mathrm{B_2OD_1} = \dfrac{\pi}{3}$이므로 두 삼각형 $\mathrm{D_1OC_1}$, $\mathrm{B_2OD_1}$은 모두 정삼각형이고 $\angle \mathrm{B_2D_1C_1} = \dfrac{2}{3}\pi$이다.

따라서, $\angle \mathrm{B_2D_1B_1} = \dfrac{\pi}{3}$이므로

$$S_1 = \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\sin\frac{\pi}{3} = \frac{21\sqrt{3}}{50}$$

또한, 삼각형 $\mathrm{B_1D_1B_2}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{B_1B_2}}^2 = \left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 2\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{91}{25} - \frac{42}{25} = \frac{49}{25}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{B_1B_2}} = \frac{7}{5}$$

따라서, $\overline{\mathrm{AB_2}} = 3 - \dfrac{7}{5} = \dfrac{8}{5}$이므로

$$\overline{\mathrm{AB_1}} : \overline{\mathrm{AB_2}} = 3 : \frac{8}{5} = 1 : \frac{8}{15}$$

이때, 넓이의 비는 $1:\frac{64}{225}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$$

37) ③

곡선 $y=x^3+2n^3$ 위의 점 P에서의 접선 $l$과 원 $C_n$ 위의 점 O에서의 접선 $m$이 서로 수직이므로 접선 $l$은 원 $C_n$의 중심을 지난다.

또한 점 P에서의 접선 $l: y=3n^2(x-n)+3n^3=3n^2x$은 원점 O를 지나므로 선분 OP는 원 $C_n$의 지름이 된다.

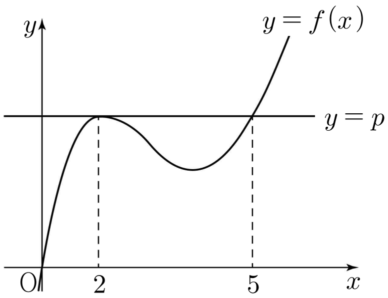
따라서 원 $C_n$의 지름의 길이는 두 점 $\mathrm{P}(n,\ 3n^3)$, $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$2r_n=\sqrt{9n^6+n^2}$, $r_n=\frac{\sqrt{9n^6+n^2}}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^6+n^2}}{2n^3}=\frac{3}{2}$$

38) ②

조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.




$f(x)-p=(x-2)^2(x-5)$

$f(0)=0$ 이므로 $p=20$

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+20=x^3-9x^2+24x$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^3-9x^2+24x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2\right]_0^2=28$$

39) ③

타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$ 의 장축의 길이는 $2\times 4=8$

40) ②

직선 $y=\frac{1}{2}x$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{64}=1$ 의 한 점근선이고,

점근선 중 기울기가 양수인 점근선의 방정식이 $y=\dfrac{8}{\sqrt{k}}x$ 이므로 $\dfrac{8}{\sqrt{k}}=\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{k}=16$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{k}=32$ 이다.

41) ②

포물선 $y^2-4y-ax+4=0$

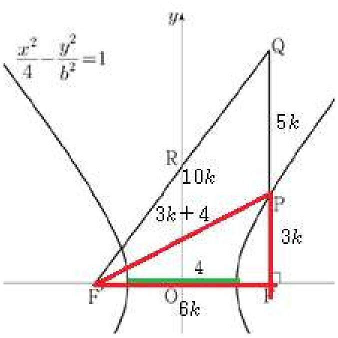
즉, $(y-2)^2=ax$의 그래프는 포물선 $y^2=ax$의 그래프를 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, 포물선 $y^2=ax$의 초점의 좌표가 $\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$이므로 포물선 $(y-2)^2=ax$의 초점의 좌표는 $\left(\dfrac{a}{4},\ 2\right)$이다.

따라서 $\dfrac{a}{4}=3$, $2=b$. 즉, $a=12$, $b=2$이므로

$a+b=12+2=14$

42) ④




삼각형 QFF′의 세 변의 길이는 $10k$, $8k$, $6k=2c$

쌍곡선의 정의에서 삼각형 PFF′의 세 변의 길이는

$3k+4$, $3k$, $6k=2c$

$(3k+4)^2=(3k)^2+(6k)^2$,

$(3k)^2-2(3k)-4=0$, $3k=1+\sqrt{5}$

$b^2=c^2-4=(3k)^2-4=(1+\sqrt{5})^2-4=2+2\sqrt{5}$

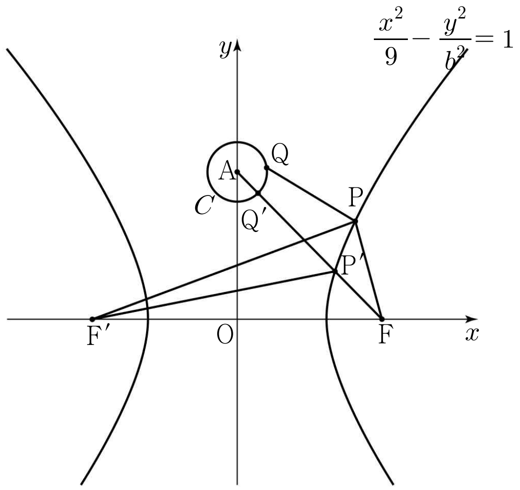
43) 54

쌍곡선의 주축의 길이가 6이므로 $a^2=9$

점 P가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6$

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\left(\overline{\mathrm{PF}}+6\right)=\left(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}}\right)+6$

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}}$는 두 점 P, Q가 선분 AF 위의 점일 때 최소이다.




그림과 같이 선분 AF가 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 원 $C$와 만나는 점을 각각 P′, Q′이라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}} \geq \left(\overline{\mathrm{P'Q'}}+\overline{\mathrm{P'F}}\right)+6$

$=\left(\overline{\mathrm{AF}}-1\right)+6$

$=\sqrt{c^2+25}+5$

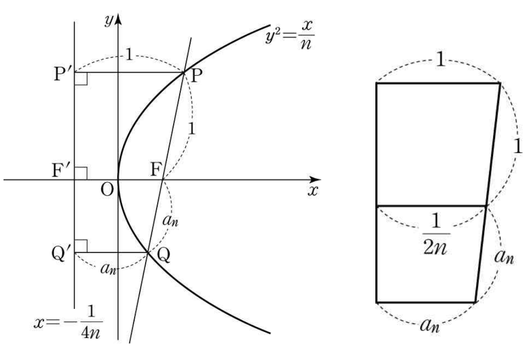
$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 최솟값이 12이므로 $\sqrt{c^2+25}+5=12$

$c^2=24$

$\therefore\ b^2=c^2-a^2=24-9=15$

따라서 $a^2+3b^2=9+3\times15=54$

44) ①




포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 초점은 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{4n},\ 0\right)$이다.

세 점 P, F, Q에서 준선 $x=-\frac{1}{4n}$에 내린 수선의 발을 각각 P′, F′, Q′이라 하면 $\overline{\mathrm{FF'}}=\frac{1}{2n}$이고,

포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PP'}}=1,\ \overline{\mathrm{QQ'}}=a_n$

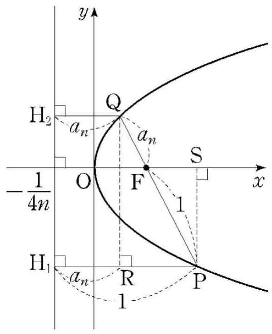
$\frac{1}{2n}=\frac{1\cdot a_n+1\cdot a_n}{1+a_n},\ \frac{1}{2n}=\frac{2a_n}{1+a_n}$

$4na_n=1+a_n,\ a_n(4n-1)=1$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{4n-1}$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=210$$

[다른 풀이]




점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 $H_1$,

점 Q에서 준선에 내린 수선의 발을 $H_2$,

점 Q에서 선분 $PH_1$에 내린 수선의 발을 R,

점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{PF}=1=\overline{PH_1}$, $\overline{FS}=1-\frac{1}{2n}$, $\overline{QF}=a_n=\overline{QH_2}$

$\triangle PQR \propto \triangle FPS$에서

$\overline{PQ} : \overline{PR}=\overline{FP} : \overline{FS}$이고

$(1+a_n) : (1-a_n)=1 : \left(1-\frac{1}{2n}\right)$

$1-a_n=\left(1-\frac{1}{2n}\right)(1+a_n)=1-\frac{1}{2n}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)a_n$

$\frac{1}{2n}=\left(2-\frac{1}{2n}\right)a_n$

$a_n=\frac{1}{4n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=220-10=210$

45) 116

원의 중심을 A$(0,\ a)$라 하고, 원과 직선 PF의 접점을 R라 하자.

$\overline{PF'}=p$, $\overline{PQ}=\overline{PR}=q$, $\overline{RF}=r$라 하면

$\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$이므로

$p+q=5\sqrt{2}$ …… ㉠

쌍곡선의 주축의 길이가

$2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

이므로 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{PF}-\overline{PF'}=q+r-p=4\sqrt{2}$ …… ㉡

$\overline{AQ}=\overline{AR}$, $\overline{AF}=\overline{AF'}$이고 $\angle AQF'=\angle ARF=90^\circ$이므로 두 직각삼각형 AQF'과 직각삼각형 ARF는 서로 합동이다.

따라서 $\overline{RF}=\overline{QF'}$이므로

$r=5\sqrt{2}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$p-q=\sqrt{2}$ …… ㄹ

ㄱ, ㄹ을 연립하면

$p=3\sqrt{2}$, $q=2\sqrt{2}$

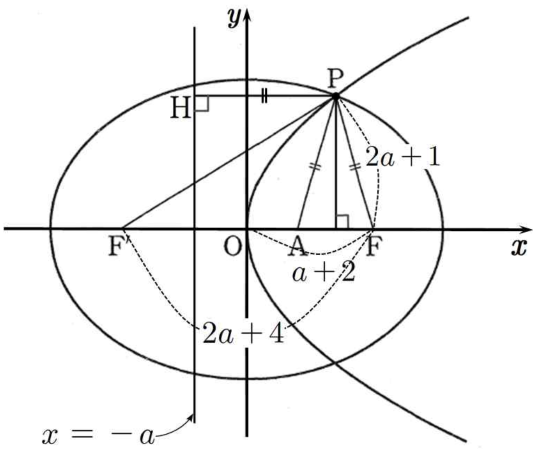
따라서

$\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2=p^2+(q+r)^2$

$=(3\sqrt{2})^2+(7\sqrt{2})^2$

$=18+98=116$

46) 29




점 P의 $x$좌표는 $a+1$이고 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=2a+1$이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}=2a+4$이다.

$\triangle\mathrm{PAF}$와 $\triangle\mathrm{F'FP}$는 닮음이므로

$(2a+4):(2a+1)=(2a+1):2$가 성립한다.

⇨ $(2a+1)^2=2(2a+4)$

⇨ $4a^2=7$

$\therefore\ a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$이다.

한편 타원의 정의에 의하여 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{FP}}$와 같다.

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{FP}}=(2a+4)+(2a+1)$

$=4a+5$

$=5+2\sqrt{7}$

따라서 $p=5$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=29$이다.

[다른 풀이]

포물선의 방정식은 $y^2=4ax$이고, 점 P의 $x$좌표는 $a+1$이므로 $\mathrm{P}(a+1,\sqrt{4a^2+4a})$이다.

점 P에서 포물선의 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PH}}=2a+1$

또한 F의 $x$좌표 $c$는 $a+2$이고

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=2c=2a+4$

따라서 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=4a+5$

한편 $\overline{\mathrm{AF}}$의 중점을 M이라고 하면

$\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{F'M}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2$이므로

$(2a+4)^2=(2a+3)^2+\left(\sqrt{4a^2+4a}\right)^2$

$\therefore\ a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(장축의 길이) $=4a+5=5+2\sqrt{7}$

$\therefore\ p=5,\ q=2$

$p^2+q^2=29$

불꽃수학

김성은