[준킬러][수학2] 3미분2

04 수2 05 함수의 증가와 감소

01 함수의 증가와 감소

03 증가와 감소3 (삼차함수와 조건해석, 실수 전체)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 6

1. 함수 $f(x)=x^3+6x^2+15|x-2a|+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 13

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b, c는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. $a^2 \leq 3b$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 05 함수의 증가와 감소

01 함수의 증가와 감소

05 증가와 감소5 (사차함수의 증가와 감소)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 21

3. 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$ 가 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여, a^2+b^2 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $M+m$ 의 값은?

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

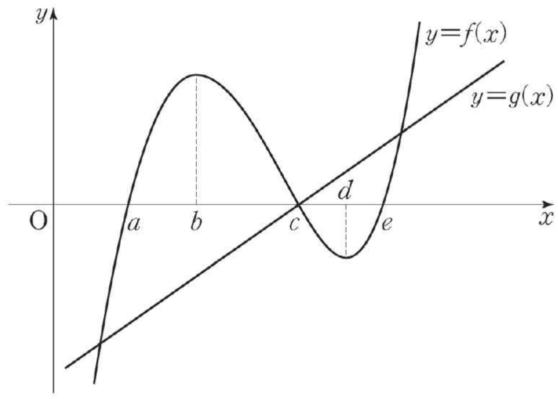
04 수2 05 함수의 증가와 감소

02 함수의 극대와 극소

07 극대와 극소7 (곱함수와 뺀함수)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 18

4. 삼차함수 $y=f(x)$ 와 일차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같고, $f'(b)=f'(d)=0$ 이다.



함수 $y=f(x)g(x)$ 는 $x=p$ 와 $x=q$ 에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p<q$)

① $a<p<b$ 이고 $c<q<d$ ② $a<p<b$ 이고 $d<q<e$

③ $b<p<c$ 이고 $c<q<d$ ④ $b<p<c$ 이고 $d<q<e$

⑤ $c<p<d$ 이고 $d<q<e$

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

02 활용2 (미정계수와 관계식)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 20

5. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.

(나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선은 점 $(2, f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 20

6. 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1 \ (k>0 \text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

7. 사차함수 $f(x)=k(x-1)(x-a)(x-a+1)(x-a+2)$ $(k>0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(나) 함수 $f(x)$의 두 극솟값의 곱은 25이다.

두 상수 a, k에 대하여 ak의 값은?

① 30 ② 40 ③ 45

④ 50 ⑤ 60

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 21

8. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 α, β $(\alpha<\beta)$뿐이다.

(나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f'(\alpha)=0$

ㄴ. $\beta=\alpha+3$

ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2+\beta^2=18$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

03 활용3 (구간정의함수)

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 21

9. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, m의 값은?

① -14 ② -12 ③ -10

④ -8 ⑤ -6

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 21

10. 함수 $f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\ge 0) \end{cases}$의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단 a는 상수이다.)

① 5 ② 7 ③ 9

④ 11 ⑤ 13

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

11. 두 실수 a, b와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} a & (x<-1) \\ |f(x)| & (-1\le x\le 5) \\ b & (x>5) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 $x=-1$, $x=5$에서 미분가능할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $f(9)=0$이면 $a>b$이다.

ㄷ. $a=b$이면 $f(0)=46$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 28

12. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+10$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} b-f(x) & (x<3) \\ f(x) & (x\ge 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$의 극솟값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 14

13. 함수 $f(x)=x^3-x$와 상수 $a(a>-1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ g(x) & (-1\le x\le a) \\ f(x-m)+n & (x>a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.

$m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다)

① 1 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 9

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

04 활용4 (절댓값함수)

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

14. 자연수 n에 대하여 함수

$$f(x)=|x^2-4|(x^2+n)$$

이 $x=a$에서 극값을 갖는 a의 개수가 4이상일 때, $f(x)$의 모든 극값의 합이 최대가 되도록 하는 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 14

15. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.

(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않는 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

06 활용6 (추론과 해석)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 24

16. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.

(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 24

17. 다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합을 구하시오.

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

(나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, f(2))$에서 직선 $y=2$에 접한다.

(다) $f'(0)=0$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 21

18. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고 $g(1)=g'(1)$이다.

(나) $g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$g(2)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

19. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은?

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.

(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3, 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 29

20. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 20

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'\left(\frac{11}{3}\right)<0$

(나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 35를 갖는다.

(다) 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(0)$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq a) \\ 2a-f(x) & (f(x)<a) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=4$에서만 미분가능하지 않다.

(나) 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=\frac{7}{2}$에서 최댓값 $2a$를 가진다.

$f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 10

23. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3보다 작은 실수 a에 대하여 함수

$$g(x)=|(x-a)f(x)|$$

가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 20

24. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)=(x+4)P(x)$, $g(x)=(x-4)Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(-4)\neq 0$, $f(4)\neq 0$, $g(-4)\neq 0$
(나) 방정식 $f(x)g(x)=0$의 서로 다른 모든 해를 크기순으로 나열한 -4, a_1, a_2, a_3, 4는 등차수열을 이룬다.
(다) $f'(a_i)=0$인 $i\in\{1,\ 2,\ 3\}$은 하나만 존재하고 모든 $i\in\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 $g'(a_i)\neq 0$이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의 x좌표의 합은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 23

25. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -x^2+2x+2 & (x<1) \\ f(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 7

26. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 $x=1$과 $x=-1$에서 극값을 갖는다.

$$\{x \mid f(x)\leq 9x+9\}=(-\infty, a]$$

를 만족시키는 양수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 13

27. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2)\end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

07 활용7 (정의된 함수)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 24

28. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{a\,|$ 함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

29. $0<a<\frac{1}{2}$일 때, 곡선 $y=x^2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(a,\,a^2)$에서 그은 접선 l이 x축 위의 점 A에서 만난다. 접선 l을 x축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 m이라 하고, 직선 m이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 또, 점 A를 지나고 접선 l에 수직인 직선을 n이라 할 때, 직선 n이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $S(a)$의 극댓값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{144}$ ② $\frac{1}{48}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{72}$
④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

30. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 점 P는 B를 출발하여 매초 1의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라 B→C→D→A의 방향으로 움직이고, 점 Q는 C를 출발하여 매초 $\frac{2}{3}$의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라 C→D→A→B의 방향으로 움직인다. 두 점 P, Q가 각각 B, C에서 동시에 출발한 후 시각 t초일 때 삼각형 APQ의 넓이를 $f(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? $\left(\text{단, } 0 \le t \le \frac{3}{2}\right)$

<보 기>

ㄱ. $f(t)$는 구간 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(t)$는 $t=\frac{3}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(t)$는 $t=1$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 21

31. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은?

① -7 ② -3 ③ 1
④ 5 ⑤ 9

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

32. 함수 $f(x)=x+(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$에 대하여 $\{f(x)\}^2-x^2f(x)$를 $f(x)-x$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 하자. 함수 $r(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{4}{27}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 21

33. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $|f(x)-t|$가 미분가능하지 않은 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f'(x)=0$의 실근은 1, 4뿐이다.
(나) 함수 $g(t)$는 $t=2$와 $t=-25$에서만 불연속이다.
(다) 방정식 $f(x)=0$은 4보다 큰 실근을 갖는다.

$f(-1)$의 값은?

① 41 ② 44 ③ 47

④ 50 ⑤ 53

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

34. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오.

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

03 최대와 최소3 (Mm 조건 해석)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 28

35. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 19

36. 양수 k에 대하여 함수

$$f(x)=2kx^3-3(3k+1)x^2+18x-2$$

가 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 최댓값 12를 가질 때, k의 값을 구하는 과정이다.

> 함수 $f(x)$에서
>
> $$f'(x)=6kx^2-6(3k+1)x+18$$
> $$=6(kx-1)(x-3)$$
>
> $k=\boxed{(가)}$인 경우를 제외하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로
>
> (ⅰ) $0<k\le\boxed{(가)}$일 때,
> $0<x<3$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
> 따라서 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\boxed{(나)}$이다. 그러나 $\boxed{(나)}=12$를 만족하는 k의 값은 $0<k\le\boxed{(가)}$에 존재하지 않는다.
>
> (ⅱ) $k>\boxed{(가)}$일 때,
> 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.
>
> | x | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{k}$ | $\cdots$ | 3 |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $f'(x)$ | + | + | 0 | − | 0 |
> | $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |
>
> 따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{k}$에서 극대이면서 최대이다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 최댓값 12를 가질 때, $k=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 하고, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$라 할 때, $\frac{g(a)}{b}$의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 12

37. 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+5 & (-1\le x\le 1) \\ x^2-4x+a & (1<x\le 3) \end{cases}$$

의 최댓값과 최솟값의 합이 0일 때, $\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① -5 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -4

④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -3

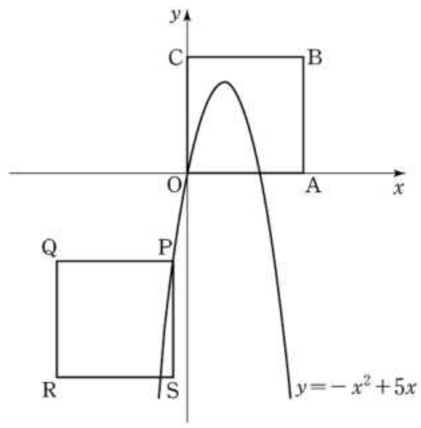
04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

05 최대와 최소5 (활용)

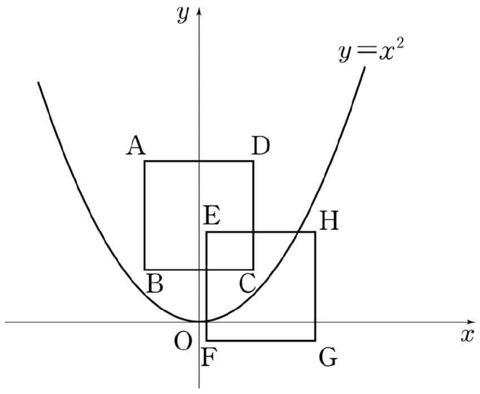
[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 22

38. 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 O(0, 0), A(8, 0), B(8, 8), C(0, 8)을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다. 점 P가 점 $(-1,\ -6)$에서 출발하여 포물선 $y=-x^2+5x$를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동시킨다. 평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 06월 21

39. 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형 ABCD 의 두 대각선의 교점의 좌표는 (0, 1) 이고, 한 변의 길이가 1 인 정사각형 EFGH 의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

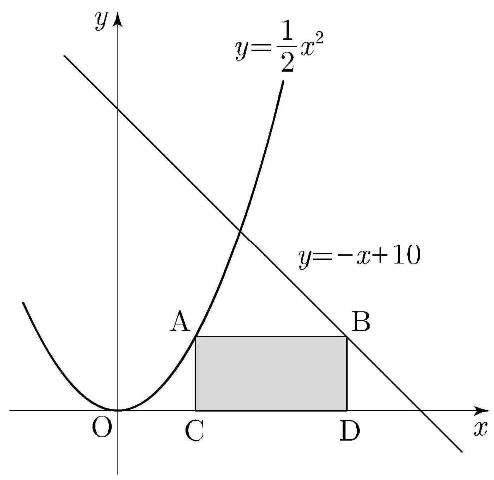


① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{27}$

④ $\frac{11}{54}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

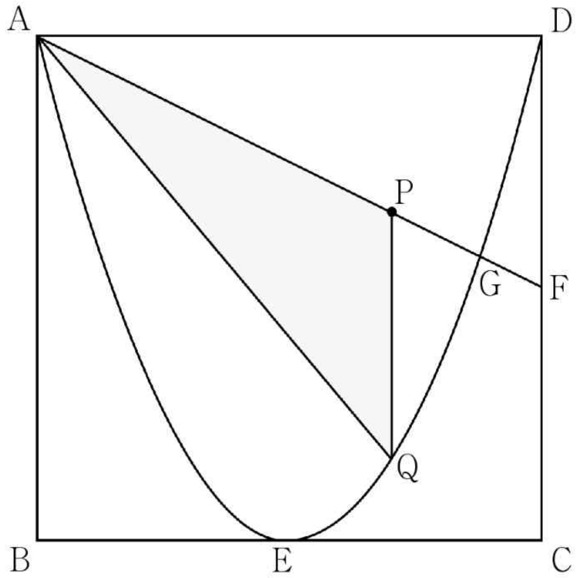
[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

40. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 중에서 제 1 사분면에 있는 점 $\mathrm{A}\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+10$ 과 만나는 점을 B 라 하고, 두 점 A, B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D 라 하자. 직사각형 ACDB 의 넓이가 최대일 때, $10t$ 의 값을 구하시오.
(단, 점 A 의 x 좌표는 점 B 의 x 좌표보다 작다.)



[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 21

41. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 선분 BC와 선분 CD의 중점을 각각 E, F라 하자. 점 E를 꼭짓점으로 하고 두 점 A, D를 지나는 포물선과 선분 AF가 만나는 점을 G라 하자. 선분 AG 위를 움직이는 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 AQP의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A와 점 G가 아니다.)

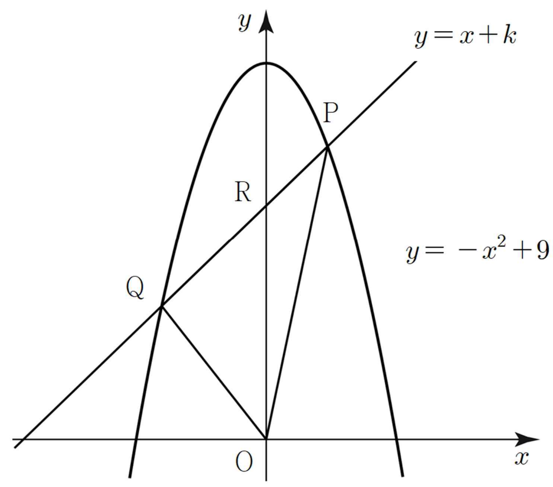


① $\frac{85}{27}$ ② $\frac{343}{108}$ ③ $\frac{173}{54}$

④ $\frac{349}{108}$ ⑤ $\frac{88}{27}$

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

42. 그림과 같이 직선 $y=x+k$ $(3<k<9)$가 곡선 $y=-x^2+9$와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, y축과 만나는 점을 R라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.)



<보 기>

ㄱ. 선분 PQ의 중점의 x좌표는 $-\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $k=7$일 때, 삼각형 ORQ의 넓이는 삼각형 OPR의 넓이의 2배이다.

ㄷ. 삼각형 OPQ의 넓이는 $k=6$일 때 최대이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

43. 점 A(1, 0)과 곡선 $y=2-x^2$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이를 k라 하자. k^2의 최솟값은?

① $\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{11-6\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{5+3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{12-5\sqrt{3}}{4}$

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

44. 좌표평면에서 점 (18, -1)을 지나는 원 C가 곡선 $y=x^2-1$과 만나도록 하는 원 C의 반지름의 길이의 최솟값은?

① $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ② $\sqrt{17}$ ③ $\frac{3\sqrt{17}}{2}$
④ $2\sqrt{17}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{17}}{2}$

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

06 최대와 최소6 (추론과 해석)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 18

45. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

07 최대와 최소7 (Mm로 정의된 함수)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 16

46. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\,(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하도록 하는 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 21

47. 0이 아닌 실수 m에 대하여 두 함수

$$f(x)=2x^3-8x,$$
$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{47}{m}x+\dfrac{4}{m^3} & (x<0) \\ 2mx+\dfrac{4}{m^3} & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 있다. 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$ 중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $m=-1$일 때, $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5$이다.

ㄴ. $m=-1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다.

ㄷ. 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

01 방정식과 미분1 (삼차방정식의 근의 판별)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 28

48. 함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 값을 가장 작은 수부터 차례대로 나열할 때 n번째 수를 a_n이라 하자.

$a=a_n$일 때, $f(x)$의 극댓값을 b_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)$의 값을 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

04 방정식과 미분4 (다항함수, 방정식의 동치변형)

[출처] 2012 모의_공공 경찰대 고3 07월

49. 다음을 만족시키는 한 자리 자연수 a의 개수는?

방정식 $x^3-x^2-ax-3=0$이 서로 다른 세 실근을 가진다

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 29

50. 두 실수 $a(a \neq 0)$, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-bx^2-(a-4)x-3a^2,$$

$$g(x)=(a+b)x^2-2(a+2)x$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, 방정식 $f(x)+g(x)=0$이 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

다음은 실수 b의 범위를 구하는 과정이다.

> 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 a는 양수이다.
>
> 방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
>
> $D=4b^2+\boxed{(가)}\le 0$ …… ㉠
>
> 방정식 $f(x)+g(x)=0$이 서로 다른 2개의 실근을 가지므로 방정식 $x^3+3x^2-9x=\boxed{(나)}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. $h(x)=x^3+3x^2-9x$라 하자.
>
> 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.
>
> | x | $\cdots$ | -3 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $h'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
> | $h(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |
>
> 따라서 $a=\boxed{(다)}$ …… ㉡
>
> ㉠, ㉡에서 $-\sqrt{3}\le b\le\sqrt{3}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $F(a)$, $G(a)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $F(5)+G(4)+k$의 값을 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

05 방정식과 미분5 (변형함수, 방정식의 동치변형)

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 21

51. 좌표평면에서 두 함수

$$f(x)=6x^3-x,\quad g(x)=|x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① $-\frac{11}{18}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{7}{18}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 20

52. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한

방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

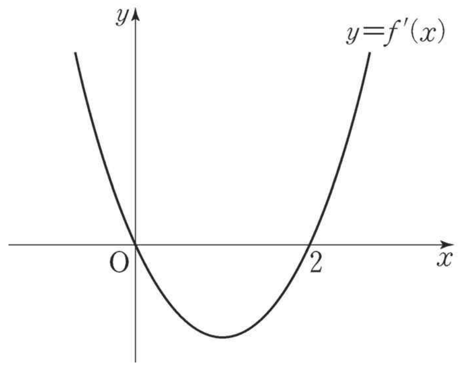
04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

06 방정식과 미분6 (도함수의 그래프 조건)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 21

53. 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

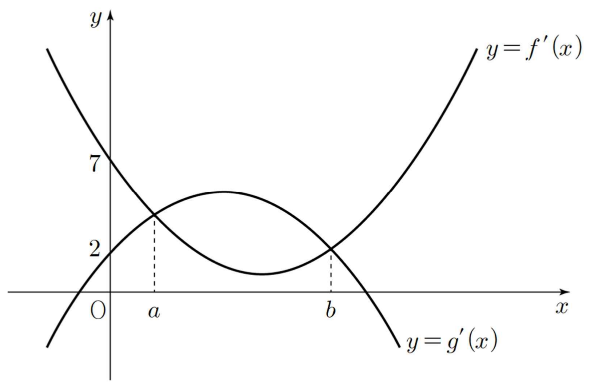
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 18

54. 그림과 같이 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 a, $b\,(0<a<b)$이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=7$, $g'(0)=2$)



<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $h(b)=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

07 방정식과 미분7 (접선의 개수)

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 29

55. 함수 $f(x)=x^3+3x^2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정수 a의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.

(가) 점 $(-4,\,a)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 세 개 있다.

(나) 세 접선의 기울기의 곱은 음수이다.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

09 방정식과 미분9 (함수 구하기)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월 21

56. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)<f(2)$인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x)=f(2-x)$를 만족시킨다. 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 30

57. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
>
> (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

58. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖는다. 방정식

$$|f(x)-f(-3)|=k$$

가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<m$이다. 실수 m의 최댓값은?

① 8 ② 16 ③ 24
④ 32 ⑤ 40

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 14

59. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$ (나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다. (다) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

10 방정식과 미분10 (정의된 함수)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 26

60. 함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$가 만나는 교점의 개수를 $f(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{6} f(k)$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 20

61. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.

ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 21

62. 실수 t에 대하여 x에 대한 사차방정식

$$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자. 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^4}=0$

(나) $g(-3)=6$

함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(1)$의 값은?

① 22　② 24　③ 26
④ 28　⑤ 30

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

63. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $y=n(x^3-3x^2)+k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① 195　② 200　③ 205
④ 210　⑤ 215

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

64. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x|x-k|$$

이다. 함수 $g(x)=x^2-3x-4$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $h(2)=2$
ㄴ. $h(k)=4$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.
ㄷ. $h(k)=3$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

11 방정식과 미분11 (추론과 해석)

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

65. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$가 있다. 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ t-f(x) & (x\geq a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 개수를 $h(t)$라 하자. 예를 들어 $h(0)=3$이다. $h(t)=3$을 만족시키는 모든 정수 t의 개수는?

① 55 ② 57 ③ 59
④ 61 ⑤ 63

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 20

66. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x(x-2)(x-a)$ (단, a는 실수)

(나) 방정식 $|f(x)|=f(0)$은 실근을 갖지 않는다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $0<a<2$이고 $f(a)>0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

ㄷ. 함수 $|f(x)-f(2)|$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않으면 $k<0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 20

67. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수

$f(x)=ax^4+bx^2+c$ (a, b, c는 상수)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근이 α, β, γ이다.

(단, $\alpha<\beta<\gamma$)

(나) $f(1)=-\frac{3}{4}$, $f'(-1)=1$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. $f'(\alpha)=-4$

ㄷ. 방정식 $|f(x)|=k(x-\alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 양수 k의 범위는 $\frac{8}{27}<k<4$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 21

68. 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (나) 함수 $(g \circ f)(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

04 수2 06 방부등식과 직선운동

02 부등식과 미분

04 부등식과 미분4 (함수구한 후 부등식의 해석)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 20

69. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$ (나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린구간 $(-\infty, 0)$, $(0, k)$에서 $f'(x)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>
ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다. ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다. ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq-\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 06 방부등식과 직선운동

02 부등식과 미분

05 부등식과 미분5 (함수 구하기)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 21

70. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 최솟값은?

(가) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 이다.

(나) $f(0) = f'(0)$

(다) $x \geq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$ 이다.

① 28 ② 33 ③ 38
④ 43 ⑤ 48

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 28

71. 자연수 a에 대하여 두 함수

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2,\ g(x) = 3x^2 + a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a의 값을 구하시오.

모든 실수 x에 대하여 부등식
$f(x) \leq 12x + k \leq g(x)$
를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.

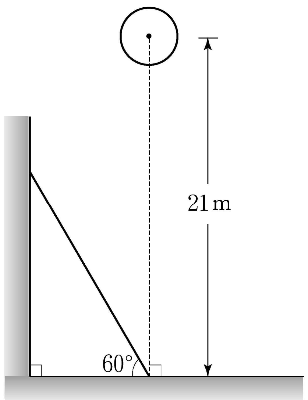
04 수2 06 방부등식과 직선운동

03 속도, 가속도와 미분

07 속도와 가속도의 해석6 (실생활)

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 12

72. 그림과 같이 편평한 바닥에 60° 로 기울어진 경사면과 반지름의 길이가 0.5 m 인 공이 있다. 이 공의 중심은 경사면과 바닥이 만나는 점에서 바닥에 수직으로 높이가 21 m 인 위치에 있다.

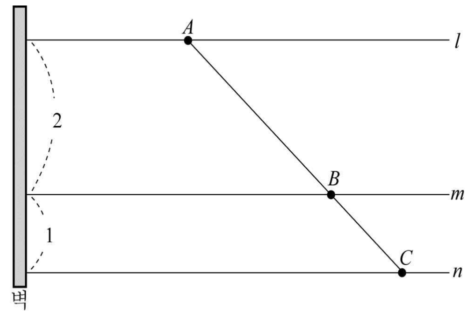


이 공을 자유 낙하시킬 때, t 초 후 공의 중심의 높이 $h(t)$ 는 $h(t)=21-5t^2$ (m) 라고 한다. 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간, 공의 속도는?
(단, 경사면의 두께와 공기의 저항은 무시한다.)

① -20 m/초 ② -17 m/초 ③ -15 m/초
④ -12 m/초 ⑤ -10 m/초

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 13

73. 그림과 같이 케이블 l, m, n은 모두 벽면과 수직이고, 케이블 사이의 거리가 각각 2, 1 이다. l 위의 광원 A 에서 m 위의 물체 B에 빛을 비추면 n 위에 그림자 C가 나타난다.



광원 A 와 물체 B의 시각 $t(t\le 8)$ 에서 벽으로부터의 거리를 각각

$$x=4-\frac{1}{2}t,\ y=t^2-\frac{11}{2}t+10$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 광원, 물체, 그림자의 크기는 무시한다.)

<보 기>

ㄱ. $t=\frac{5}{2}$ 에서 광원과 물체의 속도가 같아진다.

ㄴ. A 와 C 사이의 거리가 3 인 순간은 두 번이다.

ㄷ. $2<t<3$ 에서 그림자 C 의 가속도는 1 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 | 06 방부등식과 직선운동

03 속도, 가속도와 미분

09 변화율2 (넓이)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 07월 24

74. 한 변의 길이가 $12\sqrt{3}$ 인 정삼각형과 그 정삼각형에 내접하는 원으로 이루어진 도형이 있다. 이 도형에서 정삼각형의 각 변의 길이가 매초 $3\sqrt{3}$ 씩 늘어남에 따라 원도 정삼각형에 내접하면서 반지름의 길이가 늘어난다. 정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$ 이 되는 순간, 정삼각형에 내접하는 원의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율이 $a\pi$ 이다. 이때, 상수 a 의 값을 구하시오.

[준킬러][수학2] 3미분2(빠른 정답)

준킬러수2 2023.01.06

1. [정답] ①
2. [정답] ①
3. [정답] ③
4. [정답] ②
6. [정답] ③
7. [정답] ②
8. [정답] ②
9. [정답] ②
10. [정답] ⑤

11. [정답] ③
12. [정답] 6
13. [정답] ④
14. [정답] ③
15. [정답] ③

16. [정답] 12
17. [정답] 13
20. [정답] 10

22. [정답] ②
23. [정답] ①
24. [정답] ①
25. [정답] 7

26. [정답] ④
27. [정답] ③
28. [정답] 147
29. [정답] ①
30. [정답] ④

31. [정답] ④
32. [정답] ⑤
33. [정답] ④
34. [정답] 36
35. [정답] 12

36. [정답] ⑤
37. [정답] ③
38. [정답] 527
39. [정답] ①
40. [정답] 25

41.[정답] ②
42. [정답] ③
43. [정답] ③
44. [정답] ④
45. [정답] ⑤

46. [정답] ①
47. [정답] ⑤
48. [정답] 160
49. [정답] ④
50. [정답] 59

51. [정답] ④
52. [정답] 21
53. [정답] ⑤
54. [정답] ⑤
55. [정답] 9

56. [정답] ④
57. [정답] 51
58. [정답] ④
59. [정답] ①
60. [정답] 13

62. [정답] ⑤
63. [정답] ④
64. [정답] ③
65. [정답] ⑤

68. [정답] ①
69. [정답] ③
70. [정답] ⑤

71. [정답] 34
72. [정답] ①
73. [정답] ③

[준킬러][수학2] 3미분2(해설)

준킬러수2 2023.01.06

1) [정답] ①

[해설]

(ⅰ) $x \geq 2a$일 때,

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 30a + 3$

이므로 $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 > 0$

즉, 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ⅱ) $x \leq 2a$일 때,

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 30a + 3$

이므로 $f'(x) = 3(x+5)(x-1)$

이때, 함수 $f(x)$가 증가하려면 $2a \leq -5$

$\therefore \quad a \leq -\dfrac{5}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 a의 최댓값은 $-\dfrac{5}{2}$이다.

2) [정답] ①

[해설]

ㄱ. 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x) = 3x^2 + 2ax + b \geq 0$이 성립해야 한다.

그러므로 방정식 $3x^2 + 2ax + b = 0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4} = a^2 - 3b \leq 0,\ a^2 \leq 3b$ (참)

ㄴ. $2f(x) = g(x) - g(-x)$에서

$f(x) = \dfrac{g(x) - g(-x)}{2}$

$= \dfrac{(x^3 + ax^2 + bx + c) - (-x^3 + ax^2 - bx + c)}{2}$

$= x^3 + bx$

$f'(x) = 3x^2 + b$이므로 $f'(x) = 0$에서 $3x^2 + b = 0$

이차방정식 $3x^2 + b = 0$의 판별식을 D'이라 하면

$D' = 0^2 - 4 \times 3 \times b = -12b$

ㄱ에 의해 $b \geq \dfrac{a^2}{3} \geq 0$이므로 $D' = -12b \leq 0$

그러므로 이차방정식 $f'(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x) = 0$ 이 실근을 가지므로 $3x^2 + b = 0$ 의 실근이 존재한다. 즉, $b \leq 0$

또한, ㄱ에 의해 $b \geq 0$이므로 $b = 0$이고

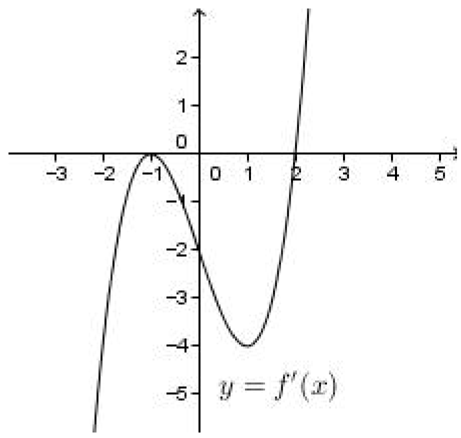
ㄱ에 의해 $a = 0$이다. $g'(x) = 3x^2$이므로 $g'(1) = 3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

3) [정답] ③

[해설]

$(-\infty, 0)$에서 감소하고 $(2, \infty)$에서 증가하는 그래프가 되기 위한 $f'(x)$의 그래프 개형은 $x = -1$에서 접하는 그래프가 나와야 된다.



$f'(x) = (x+1)(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha < \beta)$라 하면

$\alpha = -1$

$a = -(\alpha + \beta),\ b = \alpha\beta$

$a^2 + b^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + (\alpha\beta)^2$

$= 1 - 2\beta + 2\beta^2 = 2\left(\beta - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$

따라서 $\beta = \dfrac{1}{2}$일 때 최솟값을 갖고,

$\beta = 2$일 때 최댓값을 갖는다.

$m = \dfrac{1}{2}, M = 5$

$\therefore\ M + m = \dfrac{11}{2}$

4) [정답] ②

[해설]

$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이므로 그래프를 이용하여 x의 값의 범위에 따라 y'의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)g(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)g'(x)$	$-$	0	|	|	|	0	$-$	$-$	$-$	0	|
y'	$-$	$-$		$+$	$+$	0	$-$	$-$		$+$	$+$

함수 $f(x)g(x)$는 $x=c$에서 극대이고, $p<q$이므로 p는 열린구간 $(a,\ b)$에 포함되고, q는 열린구간 $(d,\ e)$에 포함된다. 따라서 $a<p<b$이고 $d<q<e$이다.

5)

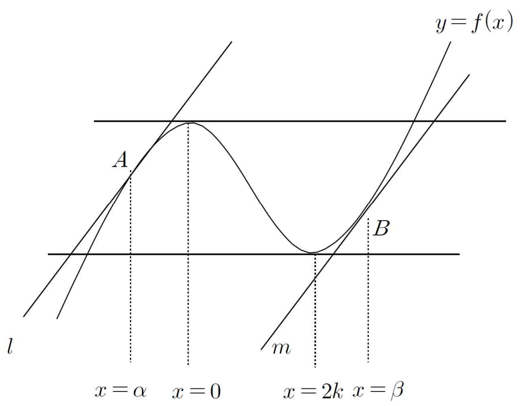
6) [정답] ③

[해설]

$f'(x)=x^2-2kx=x(x-2k)$이고

$\mathrm{A}\left(\alpha,\ \frac{1}{3}\alpha^3-\mathrm{k}\alpha^2+1\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\ \frac{1}{3}\beta^3-\mathrm{k}\beta^2+1\right)$

$(\alpha<\beta)$라 하면 주어진 조건을 만족시키는 경우는 다음 그림과 같고 도형의 모양은 평행사변형이다.



또한 $f'(\alpha)=\alpha^2-2k\alpha=3k^2$에서

$\alpha^2-2k\alpha-3k^2=0,\ (\alpha-3k)(\alpha+k)=0$

이므로

$\alpha=-k\ (\alpha<0<\beta)$

즉, $\beta=3k$이다.

그리고 $f(0)=1$

$f(2k)=\frac{8k^3}{3}-4k^3+1=1-\frac{4}{3}k^3$이므로

$f(0)-f(2k)=\frac{4}{3}k^3$

또한, 점 A에서의 접선 l의 방정식은

$y-\left(-\frac{4}{3}k^3+1\right)=3k^2(x+k)$

$y=3k^2x+\frac{5}{3}k^3+1$

점 B에서의 접선 m의 방정식은

$y-1=3k^2(x-3k)$

$y=3k^2x-9k^3+1$

따라서 직선 $y=1$과 두 접선 l, m의 교점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$x_1=-\frac{5}{9}k$, $x_2=3k$이므로

$x_2-x_1=3k+\frac{5}{9}k=\frac{32}{9}k$

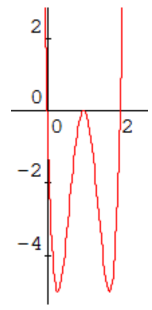
이때 평행사변형의 넓이는 24이므로

$\frac{4}{3}k^3\times\frac{32}{9}k=24,\ k^4=\frac{81}{16}$

따라서 $k=\frac{3}{2}$이다.

7) [정답] ②

[해설]



(가)에서 세 실근은 $a-2,\ a-1=1,\ a$ 이므로

$a=2$이다. 즉 $f(x)=kx(x-1)^2(x-2)$

간단히 계산하기 위하여 $g(x)=kx^2(x^2-1)$이라 두고 극솟값을 구한다.

$g'(x)=2kx(2x^2-1)$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=k\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)=-5,\ k=20$

$\therefore ak=40$

8) [정답] ②

[해설]

조건에서 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

ㄱ. $f'(x)=(x-\alpha)(3x-\alpha-2\beta)$
그러므로 $f'(\alpha)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=\frac{\alpha+2\beta}{3}$에서 극솟값 -4를 가지므로

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)=\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}-\alpha\right)^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}-\beta\right)=-4$$

$(\beta-\alpha)^3=3^3$에서 $\beta-\alpha=3$

그러므로 $\beta=\alpha+3$ (참)

ㄷ. $f(0)=-\alpha^2\beta=16$이고 ㄴ에서 $\beta=\alpha+3$이므로

$$\alpha^3+3\alpha^2+16=(\alpha+4)(\alpha^2-\alpha+4)=0$$

$$\alpha=-4\text{이고 } \beta=-1$$

그러므로 $\alpha^2+\beta^2=17$ (거짓)

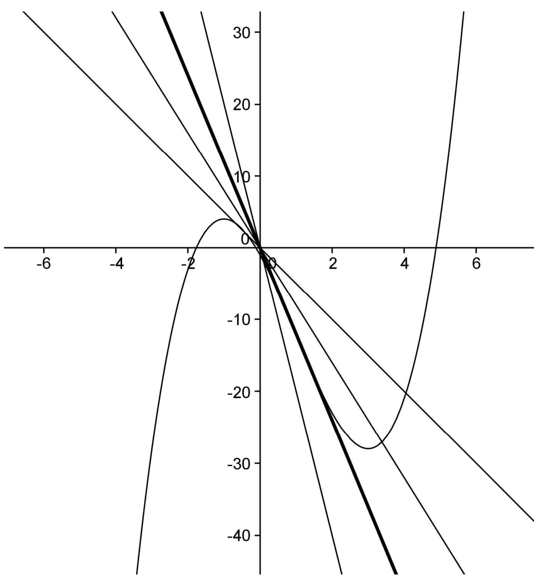
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f(-1)=4,\ f(3)=-28,\ f(0)=-1$에서 그래프의 개형은 다음과 같다



이 때 원점을 지나는 직선 중에서 그림과 같이 $f(x)$의 변곡점을 지나고 변곡점에서의 접선의 기울기와 원점을 지나는 직선의 기울기가 같을 때 실수 전체의 집합에서 미분가능하게 된다

$f''(x)=6x-6=0,\ x=1$일 때 변곡이므로변곡점의 좌표는 $(1,-12)$

$\therefore$ 원점과 $(1,-12)$을 지나는 직선의 기울기는 -12

(변곡점에서의 미분계수 $f'(1)$ 또한 -12)

10) [정답] ⑤

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}a(3x-x^3) & (x<0)\\ x^3-ax & (x\geq 0)\end{cases}\text{에서}$$

$$f'(x)=\begin{cases}a(3-3x^2) & (x<0)\\ 3x^2-a & (x>0)\end{cases}$$

a의 부호에 따라서 도함수의 그래프가 달라지기 때문에 a의 범위를 나누어야 한다.

(ⅰ) $a=0$일 때는 $f'(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 3x^2 & (x\geq 0)\end{cases}$이 되어서 $f(x)$의 극댓값이 발생하지 않는다.

(ⅱ) $a>0$일 때는 $x=-1,\ \sqrt{\frac{a}{3}}$에서 $f(x)$가 극솟값을 가지고 $x=0$에서 극댓값을 가지지만 그 값이 0이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $a<0$일 때는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

이상에서 $f(-1)=a(-3+1)=5,\ a=-\frac{5}{2}$이다.

$\therefore\ f(2)=2^3+\frac{5}{2}\cdot 2=13$

11) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $x=-1,\ x=5$ 에서 미분가능하다면 $g'(-1)=g'(5)=0$,

즉 $f'(-1)=f'(5)=0,\ f'(x)=3(x+1)(x-5)$,

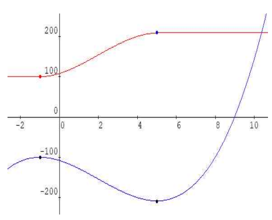
따라서 $x=-1$에서 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $f'(x)=3(x+1)(x-5),\ f(9)=0$

$f(x)=x^3-6x^2-15x-108$

$f(-1)=-100,\ f(5)=-208$

$a=100,\ b=208,\ \therefore a<b$



ㄷ. $f(x)=x^3-6x^2-15x+C$

$a=f(-1)=8+C,\ b=-f(5)=100-C$

$a=b$이면 $C=46,\ \therefore f(0)=C=46$

12) [정답] 6

[해설]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 미분가능하다. 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 3-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3+} g(x)=g(3)$

$b-f(3)=f(3)$

$b=6a-34$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{b-f(x)-f(3)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{-f(x)+\{b-f(3)\}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{-\{f(x)-f(3)\}}{x-3}$

$=-f'(3)$

$=a-9$

$\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$=f'(3)$

$=-a+9$

따라서 $a=9,\ b=20$

$g(x)=\begin{cases}-x^3+6x^2-9x+10 & (x<3)\\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\ge 3)\end{cases}$

$x<3$에서

$g'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$

$x\ge 3$에서

$g'(x)=-3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

$g(1)=-1+6-9+10=6$이므로

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 6을 갖는다

13) [정답] ④

[해설]

(가)에 의하여 $(a,\ f(a))$는 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 $y=f(x)$의 교점이다.

$x=0$에서 변곡점이므로 $1:2$비율관계에 의해 $a=2$가 성립한다.

계속 증가해야 하므로 $(-1,\ 0)$을 변곡점에 대해 대칭시키면 $(1,\ 0)$이므로 (나)를 만족한다.

따라서 $(1,\ 0)$에서 $(2,\ 6)$으로 이동하므로 $m=1,\ n=6$이다.

14) [정답] ③

[해설]

$f(x)=\begin{cases}(x^2-4)(x^2+n) & (x<-2\ \text{또는}\ x>2)\\ -(x^2-4)(x^2+n) & (-2\le x\le 2)\end{cases}$

에서 양변을 미분하면

$f'(x)=\begin{cases}4x^3+2(n-4)x & (x<-2\ \text{또는}\ x>2)\\ -4x^3-2(n-4)x & (-2<x<2)\end{cases}$

즉, $f(x)=|x^2-4|(x^2+n)$에서 $x=-2$와 $x=2$에서 항상 극소이고 $f'(x)=2x\{2x^2+(n-4)x\}$에서 $x=0$에서 극값을 가지며 극값의 개수가 4이상이므로 $n<4$가 된다.

따라서 만족하는 자연수 n은 $n=1,\ 2,\ 3$

그런데, $f(x)=|x^2-4|(x^2+n)\ge 0$이므로 극값의 합이 최대가 되는 경우는 $n=3$일 때이다.

15) [정답] ③

[해설]

(가) 조건에 의해 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이므로

$g(x)=\dfrac{|x||f(x-p)+q|}{x}\ (x\ne 0)$이고 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}|f(x-p)+q|=|f(-p)+q|,$

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0-}|f(x-p)+q|=-|f(-p)+q|$

에서 $f(-p)+q=0$

$\therefore\ f(-p)=-q$

또, $g(0)=0$이므로 $g(x)$는 원점을 지난다.

따라서 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x||f(x-p)+q|}{x} & (x\ne 0)\\ g(0) & (x=0)\end{cases}$

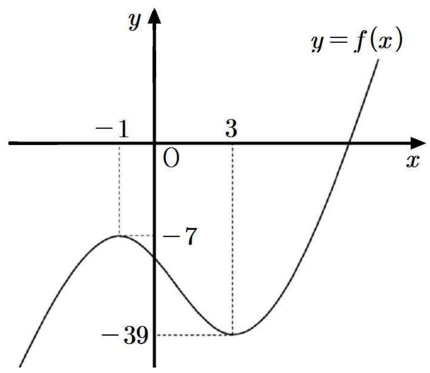
이 때 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$이므로

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x+1)(x-3)$

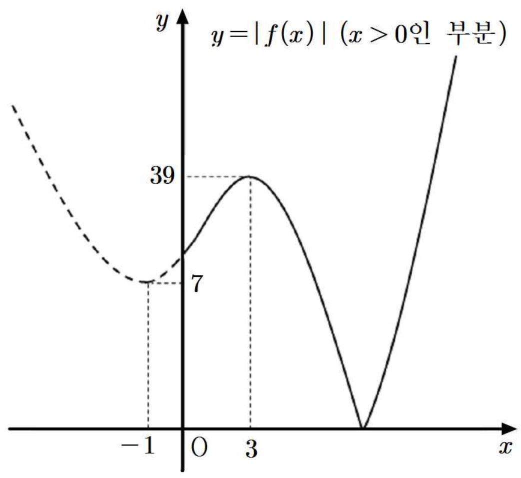
x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-7	↘	-39	↗

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

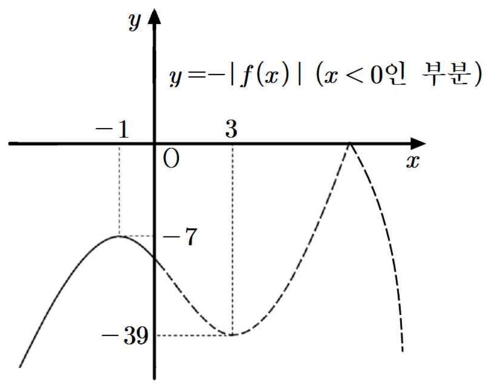


$h(x)=\dfrac{|x||f(x)|}{x}$ (단, $x\neq 0$)이라 하면

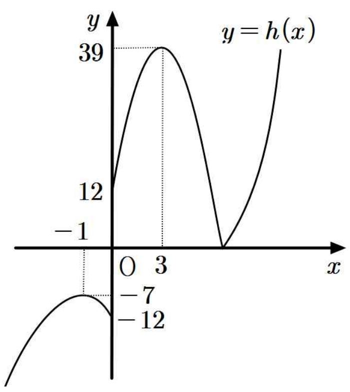
(i) $x>0$에서 $y=|f(x)|$



(ii) $x<0$에서 $y=-|f(x)|$



따라서 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프에서 미분불가능한 점이 2개다. 그런데, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=h(x)$의 그래프를 x축으로 p만큼 y축으로 q만큼 평행이동한 것이므로 $g(x)$의 그래프에서

미분불가능한 점이 1개가 되기 위해선 원래의 함수 $y=f(x)$의 평행이동한 함수 $y=f(x-p)+q$의 극점 중 한 개가 원점에 와야 한다.

즉, 극점이 원점으로 옮겨져야 한다.

따라서 $y=f(x)$의 극점 $(-1,\ -7)$, $(3,\ -39)$에 대하여

(i) 극점 $(-1,\ -7)$이 원점이 되는 경우

$p=1,\ q=7$

(ii) 극점 $(3,\ -39)$이 원점이 되는 경우

$p=-3,\ q=39$

그런데 $p,\ q$가 양수이어야 하므로 모순

(i), (ii)에서 만족하는 $p,\ q$의 값은 $p=1,\ q=7$

$\therefore\ p+q=1+7=8$

16) [정답] 12

[해설]

조건 (가)에서 $f'(2)=0$

조건 (나)에서 $x=1$일 때,

$|f(x)-f(1)|=0$을 만족하므로 함수

$y=|f(x)-f(1)|$의 그래프는

점 $(1,\ f(1))$에서 x축과 만나야 한다.

$f'(x)\neq 0$이면 $y=|f(x)-f(1)|$은

$x=1$에서 미분가능하지 않으므로 모순이다.

따라서 $f'(1)\neq 0$이다.

이때 함수 $y=f(x)-f(1)$이 $x=1$에서 극값을 가지면 $y=|f(x)-f(1)|$이 미분가능하지 않은 점은 0개 또는 2개이므로 모순이다.

따라서 $y=f(x)-f(1)$은 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서,

$f'(x)=k(x-1)^2(x-2)$

(단, k는 0이 아닌 상수)

으로 놓을 수 있다.

$\therefore\ \dfrac{f'(5)}{f'(3)}=\dfrac{k\cdot 4^2\cdot 3}{k\cdot 2^2\cdot 1}=12$

17) [정답] 13

[해설]

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ …… ㉠

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ …… ㉡

주어진 조건이 $f'(0)=0,\ f'(2)=0,\ f(2)=2$ 이므로

㉡ 식에 적용해보면

$c=0,\ b=-3a-8$

이를 ㉠ 에 적용해보면

$d=4a+18$

이들을 ㉠에 대입하여 a대하여 정리해보면

$f(x)=x^4+ax^3+(-3a-8)x^2+(4a+8)$

$=(x^4-8x^2+8)+a(x^3-3x^2+4)$

$=(x^4-8x^2+8)+a(x-1)(x-2)^2$

따라서 $f(x)$는 a값에 상관 없이 $x=1,\ x=2$ 을 지난다.

따라서 점의 좌표는 $f(1)=11,\ f(2)=2$이다.

$f(1)+f(2)=13$

18)

19)

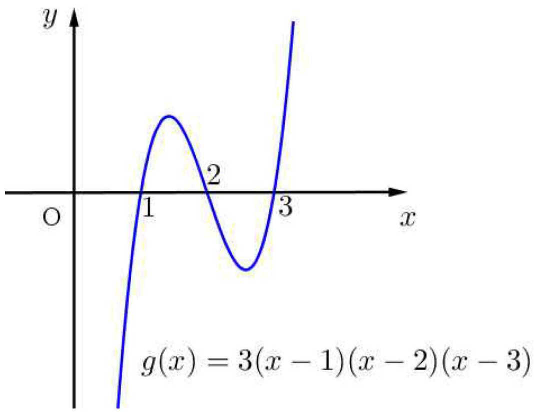
20) [정답] 10

[해설]

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서

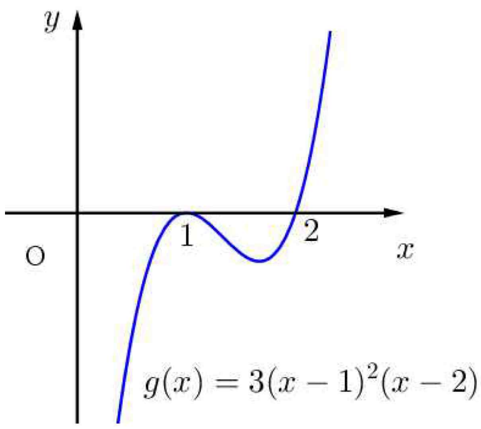
삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, 함수 $f(x)g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{3}$이다.

(ⅰ) 다항식 $g(x)$가 서로 다른 세 개의 일차식을 인수로 가질 때 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$
이므로 함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

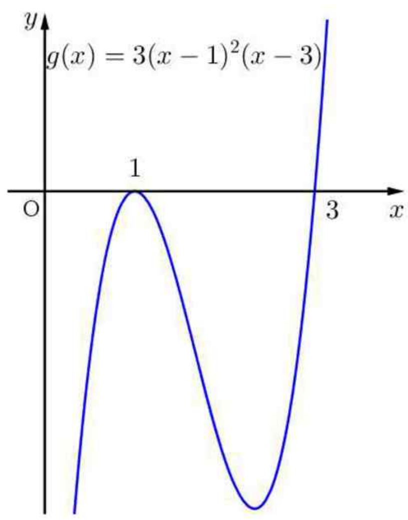


이때, 함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 다항식 $g(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가질 때,
$g(x)=3(x-1)^2(x-2)$ 또는 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$이다.
함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-2)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-2)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
또, 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g'(x)=6(x-1)(x-3)+3(x-1)^2=3(x-1)(3x-7)$
$g'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\frac{7}{3}$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{7}{3}$에서 극솟값을

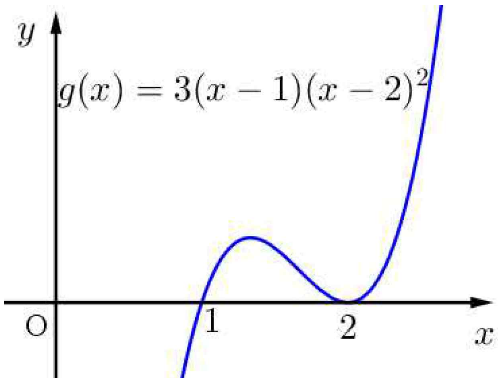
갖는다.

따라서 함수 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) 다항식 $g(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가질 때

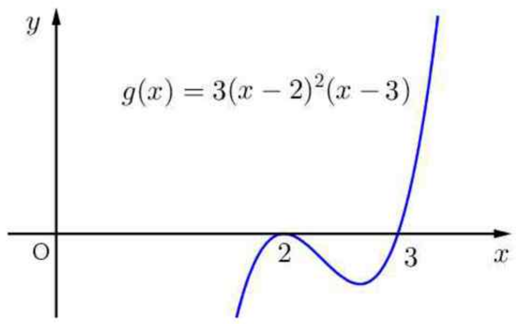
$g(x)=3(x-1)(x-2)^2$ 또는 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$이다.

함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$은 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

한편, 함수 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

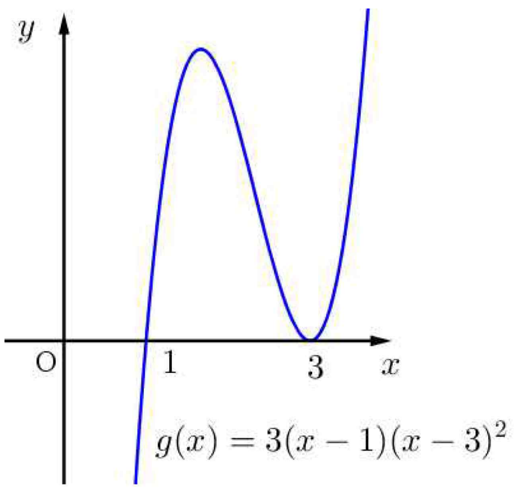


함수 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$은 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iv) 다항식 $g(x)$가 $(x-3)^2$을 인수로 가질 때

$g(x)=3(x-1)(x-3)^2$ 또는 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$이다.

함수 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g'(x)=3(x-3)^2+6(x-1)(x-3)=3(x-3)(3x-5)$

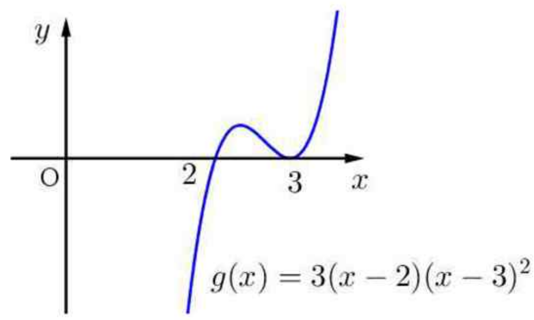
$g'(x)=0$에서

$x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$는 $x=\frac{5}{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

또, 함수 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=3(x-2)(x-3)^2$은 $x=2$에서 극값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서

$g(x)=3(x-2)^2(x-3)$이므로 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$이다.

이때,

$f'(x)=\frac{1}{3}\{2(x-1)(x-3)+(x-1)^2\}$

$=\frac{1}{3}(x-1)(3x-7)$

이므로

$f'(0)=\frac{1}{3}\times(-1)\times(-7)=\frac{7}{3}$

따라서 $p=3$, $q=7$이므로

$p+q=10$

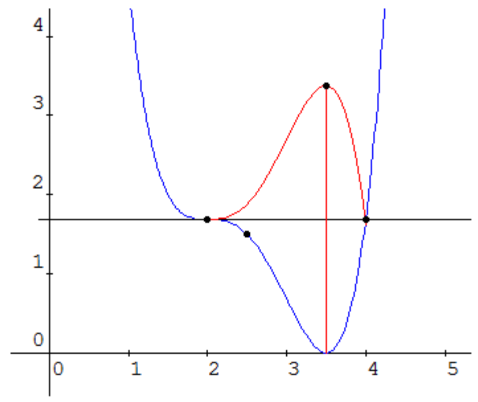
21)

22) [정답] ②

[해설]

$y=2a-f(x)$는 $y=f(x)$을

$y=a$에 대하여 대칭이동한 것이다.



(가)에서 $f(x)=(x-\alpha)^3(x-4)+a$

(나)에서 $f'(x)=(x-\alpha)^2(4x-14)$, $f\left(\frac{7}{2}\right)=0$

두 식으로부터 $\alpha=2$, $a=\frac{27}{16}$이다.

$\therefore f(x)=(x-2)^3(x-4)+\frac{27}{16}$, $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$

23) [정답] ①

[해설]
함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

그러므로 $-|f(a)|=|f(a)|$에서 $f(a)=0$
$f(x)=(x-a)(x-k)$ (k는 상수)라 하면
함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$이다.
그러므로 $g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$
$h(x)=(x-a)^2(x-3)$이라 하면
$a<3$이고 함수 $g(x)$의 극댓값이 32으므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.
$h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2=(x-a)(3x-6-a)=0$
함수 $h(x)$는 $x=\frac{6+a}{3}$에서 극솟값 -32를 갖는다.

$$h\left(\frac{6+a}{3}\right)=\left(\frac{6+a}{3}-a\right)^2\left(\frac{6+a}{3}-3\right)=-4\left(1-\frac{a}{3}\right)^3=-32$$

$\left(1-\frac{a}{3}\right)^3=8$이므로 $1-\frac{a}{3}=2$에서 $a=-3$
따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$에서 $f(4)=7$

24) [정답] ①

[해설]
(나)에서 -4, a_1, a_2, a_3, 4는 등차수열이므로 각각 -4, -2, 0, 2, 4이다.
$f'(-4)\neq 0$, $f(4)\neq 0$이고 (다)에서 $f'(a)=0$이므로

$$f(x)=(x+4)(x-a)^2\ (a=-2,\ 0,\ 2)$$

의 꼴을 가진다.
따라서 $f(x)$, $g(x)$는 다음 3가지의 조합이 가능하다.
(ⅰ) $f(x)=(x+4)(x+2)^2$, $g(x)=x(x-4)(x-2)$
(ⅱ) $f(x)=(x+4)x^2$, $g(x)=(x-4)(x-2)(x+2)$
(ⅲ) $f(x)=(x+4)(x-2)^2$, $g(x)=x(x-4)(x+2)$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 (ⅱ)의 경우이다.
즉, $(x+4)x^2=(x-4)(x-2)(x+2)$에서

$$x^3+4x^2=x^3-4x^2-4x+16$$
$$8x^2+4x+6=0$$

따라서 이차방정식 $8x^2+4x+6=0$의 근과 계수의 관계에서 두 근의 합은 $-\frac{1}{2}$

25) [정답] 7

[해설]
함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
$f(x)=x^2+ax+b$
라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-x^2+2x+2 & (x<1)\\ x^2+ax+b & (x\geq 1)\end{cases}$$에서

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$f(1)=\lim_{x\to 1}(-x^2+2x+2)=3$
$1+a+b=3$, $b=2-a$
따라서 $f(x)=x^2+ax+(2-a)$
또한, 함수 $g(x)$가 실수 전체에서 증가해야 하므로

$$g'(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x<1)\\ 2x+a & (x>1)\end{cases}$$

에서 $x>1$에서 $2x+a\geq 0$을 만족해야 한다.
따라서 $x=1$을 대입했을 때, $2+a\geq 0$에서
$a\geq -2$ …… ㉠
$f(3)=9+3a+(2-a)=2a+11$이므로
㉠에서 $2a+11\geq -4+11=7$
$\therefore f(3)\geq 7$
따라서 $f(3)$의 최솟값은 7이다.

[다른 풀이]

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$

라 하면 $g(x)=\begin{cases} -x^2+2x+2 & (x<1) \\ x^2+ax+b & (x\geq 1) \end{cases}$

(i) $x=1$에서 연속

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)$이어야 하므로

$3=1+a+b,\ b=2-a$

(ii) 실수 전체의 집합에서 증가

함수 $f(x)$의 대칭축에서 $-\frac{a}{2}\leq 1,\ a\geq -2$

(i), (ii)에서

$f(3)=9+3a+b=9+3a+(2-a)=2a+11\geq 7$

따라서 $f(3)$의 최솟값은 7이다.

26) [정답] ④

[해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=f'(1)=0$이므로 $3x^2+2ax+b=0$의 두 근이 -1, 1이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$-\frac{2a}{3}=0,\ \frac{b}{3}=-1$

즉 $a=0,\ b=-3$이므로 $f(x)=x^3-3x+c$

$f(x)\leq 9x+9$에서

$x^3-12x\leq 9-c$

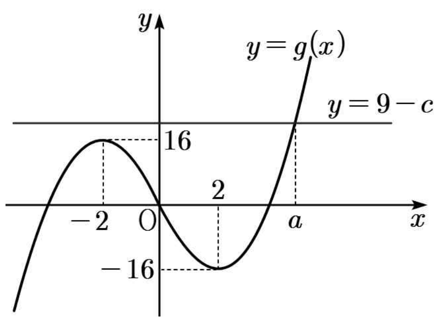
$g(x)=x^3-12x$라 하면 $g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $g(-2)=16$, $x=2$에서 극솟값 $g(2)=-16$을 가지므로 그래프는 다음과 같다.



$f(x)\leq 9x+9$를 만족하는 x의 범위가 $x\leq a$이므로 위의 그림에서 $9-c\geq 16$을 만족해야 하고 $g(x)=16$에서

$x^3-12x=16,\ (x+2)^2(x-4)=0$

이므로 $a\geq 4$이다.

따라서 양수 a의 최솟값은 4이다.

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, $x=1$과 $x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=3(x+1)(x-1)=3x^2-3$

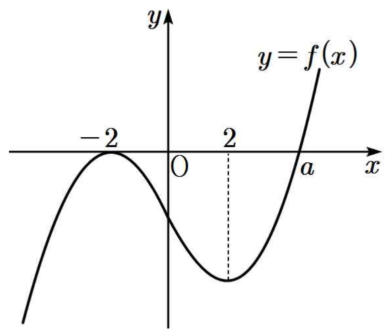
$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-3)dx$

$=x^3-3x+C$

$\{x\,|\,f(x)\leq 9x+9\}=(-\infty,\ a]$를 만족하므로

$x^3-3x+C\leq 9x+9$

즉, $x^3-12x+C-9\leq 0$을 만족하는 범위는 $x\leq a$ $(a>0)$이므로 그래프를 그리면 다음과 같다.



극대가 되는 $x=-2$에서 (극댓값)≤ 0을 만족해야 하므로

$-8+24+C-9\leq 0,\ C\leq -7$ $\cdots\cdots$ ㉠

그런데 $x=a$가 $y=f(x)$의 근이므로

$a^3-12a+C-9=0$

$C=-a^3+12a+9$

㉠에 대입하면 $-a^3+12a+9\leq -7$

따라서 $a^3-12a-16\geq 0$

인수정리를 이용하면 $(a-4)(a+2)^2\geq 0$이므로

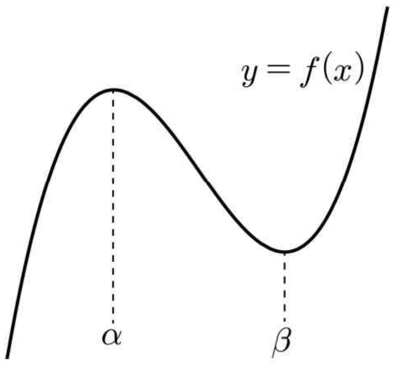
$a-4\geq 0$

따라서 양수 a의 최솟값은 4이다.

27) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.



(i) $\alpha<\beta\le-2$인 경우

$x\ge-2$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.

$f(-2)<g(-2)<g(2)$

$g(2)\ne f(-2)$이므로 모순

(ii) $\alpha<-2<\beta$인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 열린구간 $(-\infty,\ \alpha)$에서 존재하므로 모순

(iii) $\alpha=-2$인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

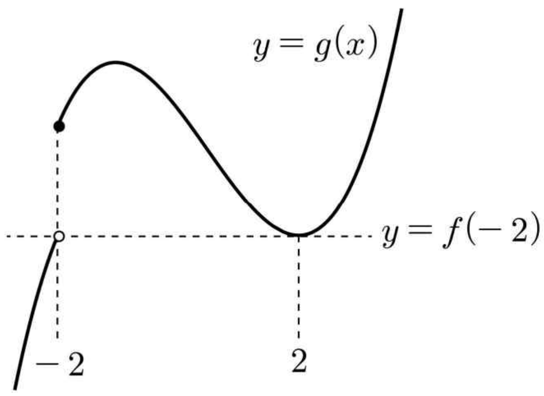
$f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-12x+\dfrac{1}{2}$

$g(2)\ne f(-2)$이므로 모순

(iv) $-2<\alpha<\beta$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2)=f(-2)$이므로

$f(2)+8=f(-2)f(x)=x^3+ax^2+bx+\dfrac{1}{2}$($a$, b는 상수)라

하자. $8+4a+2b+\dfrac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\dfrac{1}{2}$

$b=-6,\ f(x)=x^3+ax^2-6x+\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax-6$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(2)=12+4a-6=0,\ a=-\dfrac{3}{2}$

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+\dfrac{1}{2}$이므로

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

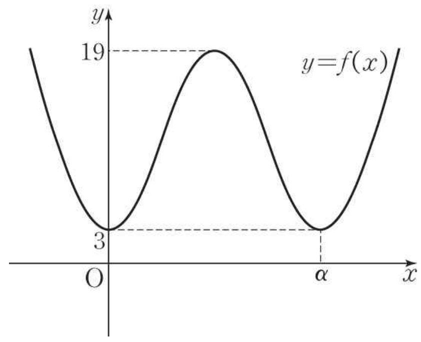
따라서 극댓값은 $f(-1)=4$

28) [정답] 147

[해설]

함수 $g(t)$가 두 개의 불연속인 점을 가지려면 $y=f(x)$의 두 개의 극솟값이 같아야 한다.

주어진 조건에서 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속이고, $f(0)=3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$이라 두면, 함수 $f(x)$의 극댓값이 19이어야 하므로

$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$

에서 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^2}{4}\cdot\dfrac{\alpha^2}{4}+3=19$ $\therefore\ \alpha=4$

따라서 $f(x)=x^2(x-4)^2+3$이므로 $f(-2)=147$

29) [정답] ①

[해설]

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로

접선 l의 방정식은 $y-a^2=2a(x-a)$ 즉, $y=2ax-a^2$

이고 점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$이다.

이때, 직선 m의 방정식은 $y=-2ax+a^2$

직선 n의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2a}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{x}{2a}+\dfrac{1}{4}$

이므로 점 $\mathrm{B}(0,\ a^2)$, 점 $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$이다.

$\therefore\ S(a)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}-a^2\right)\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a(1-4a^2)}{16}$ $\left(\because\ 0<a<\dfrac{1}{2}\right)$

$S'(a)=\dfrac{1-12a^2}{16}=0$에서 $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}$이므로

$S(a)$는 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$에서 극솟값을 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$에서 극댓값을 갖는다.

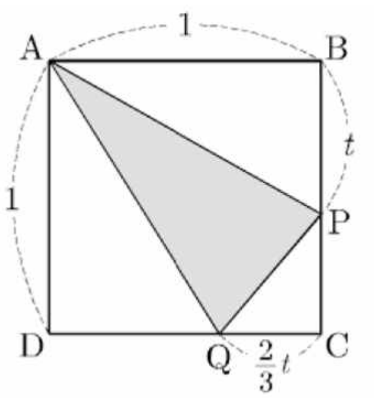
따라서 구하는 값은

$$S\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{1}{16}\times\frac{\sqrt{3}}{6}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{144}$$

30) [정답] ④

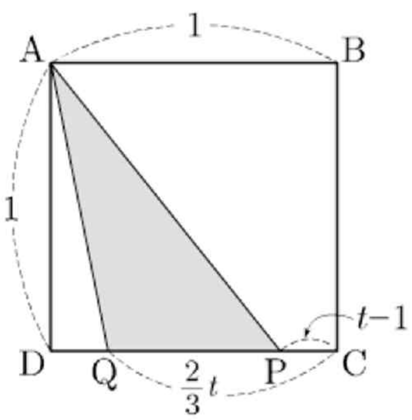
[해설]

$0\le t\le 1$일 때, 점 P는 선분 BC, 점 C는 선분 CD 위에 있다.



$$\therefore\ f(t)=1-\left\{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t\cdot(1-t)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}t\right)\right\}$$
$$=\frac{t^2}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ \ (0\le t\le 1)$$

$1<t\le\frac{3}{2}$일 때, 점 P와 Q는 선분 CD 위에 있다.



$$\therefore\ f(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{t}{6}$$

ㄱ. $\lim_{t\to 1-}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\lim_{t\to 1+}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=-\frac{1}{6}$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄴ. $0<t<1$일 때, $f'(t)=\frac{2}{3}t-\frac{1}{2}$이므로

$t=\frac{3}{4}$에서 함수 $f(t)$는 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $f(t)$가 $t=1$에서 연속이고
$t=1$를 기준으로 $f'(t)$의 부호가 양에서 음으로 변하므로
$f(t)$는 $t=1$에서 극댓값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

31) [정답] ④

[해설]

$(x^4-4x^3+10x-30)-(2x+2)>0$

$\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x-32>0$

$\Leftrightarrow (x^3+8)(x-4)>0$

로부터

$$f(t)=\begin{cases} t^4-4t^3+8t-32 & (t<-2,\ t>4) \\ -t^4+4t^3-8t+32 & (-2\le t\le 4)\end{cases}$$

$x=t$인 지점에서의 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 서로 달라야 하므로 $y=f(t)$의 개형이 바뀌는 $t=-2,\ 4$와 $f'(t)=0$을 만족하는 $t=-2,\ 1-\sqrt{3}1,\ 1+\sqrt{3},\ 4$이 주어진 조건을 만족한다.

따라서 구하고자 하는 답은

$-2+(1-\sqrt{3})+1+(1+\sqrt{3})+4=5$

32) [정답] ⑤

[해설]

$g(x)=f(x)-x$라 하자.

$\{f(x)\}^2-x^2f(x)$ 를 $f(x)-x$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 하자.

이를 $g(x)$로 표현하면,

$(g(x)+x)^2-x^2(g(x)+x)=g(x)Q(x)+r(x)$이다.

(단, $Q(x)$는 몫 $r(x)$는 나머지 $r(x)$의 차수는 3차 이하)

이므로 $r(x)=-x^3+x^2$이다.

이제 극댓값과 극솟값을 구하자.

$r'(x)=x(-3x+2)$이므로

$x=0$에서 극솟값 0을 가지고

$x=\dfrac{2}{3}$에서 극댓값 $\dfrac{4}{27}$을 가진다.

따라서 두 개의 합은 $\dfrac{4}{27}$이다.

33) [정답] ④

[해설]

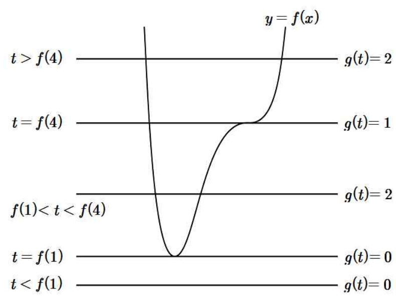
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이다.

(가)에서 방정식 $f'(x)=0$의 실근이 1, 4뿐이므로
$f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$이거나 $f'(x)=4(x-1)^2(x-4)$이다.

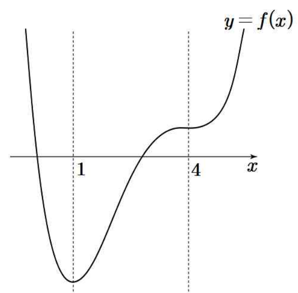
(i) $f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	$f(4)$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 실수 t에 대한 함수 $g(t)$의 값은 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 $t=f(1)$, $t=f(4)$에서 불연속이므로 (나)에 의하여 $f(1)=-25$, $f(4)=2$이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



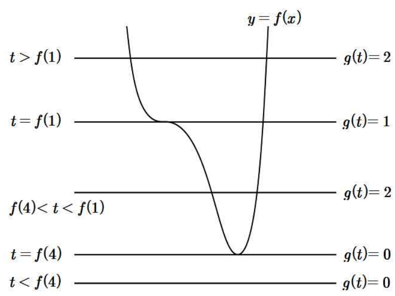
이때 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 모두 4보다 작으므로 (다)를 만족시키지 못한다.

(ii) $f'(x)=4(x-1)^2(x-4)$일 때

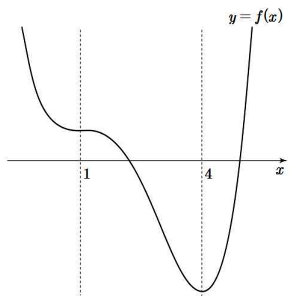
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(1)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 실수 t에 대한 함수 $g(t)$의 값은 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 $t=f(4)$, $t=f(1)$에서 불연속이므로 (나)에 의하여 $f(1)=2$, $f(4)=-25$이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=0$은 4보다 큰 실근을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여

$f'(x)=4(x-1)^2(x-4)$
$=4x^3-24x^2+36x-16$

$\therefore a=-8,\ b=18,\ c=-16$

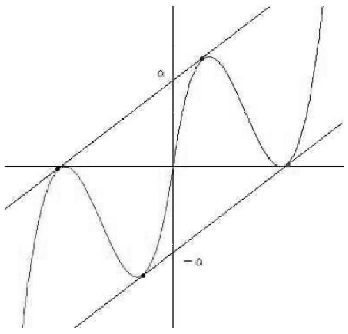
또한 $f(1)=2$이므로 $d=7$

따라서 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-16x+7$이므로

$f(-1)=50$

34) [정답] 36

[해설]
$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



$x>0$일 때,

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=4$인 점을 $x=b,\ c(b<c)$라 하면

$b+c=\frac{4a}{3},\ bc=\frac{a^2-4}{3}$

$\frac{c(c-a)^2+b(-b+a)^2}{c+b}=4$

이것을 풀면

$c^2+b^2=(c+b)^2-2bc=\frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}$

$c^3+b^3=(c+b)^3-3bc(b+c)=\frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a$

$c^3+b^3-2a(c^2+b^2)+a^2(c+b)=4(c+b)$

즉, $\left(\frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a\right)-2a\left(\frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}\right)+\frac{4}{3}a^3=\frac{16}{3}a$

$\therefore\ f'(0)=a^2=36$

35) [정답] 12

[해설]

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=0 \Leftrightarrow x=-a,\ \frac{a}{3}$ 로부터

$f(-a)=a^3+2,\ f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{5}{27}a^3+2,\ f(a)=a^3+2$

이므로

$-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}$

$\therefore\ a=2,\ M=10$

따라서 $a+M=12$

36) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$에서

$$f'(x)=6kx^2-6(3k+1)x+18$$

$=6(kx-1)(x-3)$

$=6k\left(x-\frac{1}{k}\right)(x-3)$

$\frac{1}{k}=3$인 경우 $f'(x)=2(x-3)^2\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 따라서 $k=\boxed{\frac{1}{3}}$인 경우를 제외하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로

(i) $0<k\leq\boxed{\frac{1}{3}}$일 때,

$0<x<3$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. 따라서 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(3)=\boxed{-27k+25}$이다. 그러나 $\boxed{-27k+25}=12$를 만족하는 $k=\frac{13}{27}$이므로 $0<k\leq\boxed{\frac{1}{3}}$에 존재하지 않는다.

(ii) $k>\boxed{\frac{1}{3}}$일 때,

닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{k}$에서 극대이면서 최대이다.

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{2}{k^2}-\frac{3(3k+1)}{k^2}+\frac{18}{k}-2=12$$

$(7k-1)(2k-1)=0$에서 $k>\frac{1}{3}$이므로 $k=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 최댓값 12를 가질 때, $k=\boxed{\frac{1}{2}}$이다.

(가), (다)에 알맞은 수는 각각 $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{2}$

(나)에 알맞은 식은 $g(k)=-27k+25$

따라서 $\frac{g(a)}{b}=32$

37) [정답] ③

[해설]

$y=x^3-6x^2+5$의 양변을 미분하면

$$y'=3x^2-12x=3x(x-4)$$

즉, $y'=0$에서 $x=0,\ x=4$이므로

$x=0$에서 극대, $x=4$에서 극소를 갖는다.

주어진 범위가 $-1 \leq x \leq 1$이므로 $x=0$일 때, 최댓값 5,
$x=-1$에서 최솟값 -2를 갖는다.
즉, $y=x^2-4x+a(1<x \leq 3)$은 $x=2$에서 대칭이고
최솟값을 갖는다.
즉, 최댓값이 5이므로 최솟값은 -5이어야 한다.
따라서 $a-4=-5$

$$\therefore \lim_{x \to 1+} f(x)=a-3=-4$$

38) [정답] **527**

[해설]

점P 의 좌표를 $(x, -x^2+5x)$라 하면 두
정사각형OABC,PQRS가 겹칠 때, $0 \leq x \leq 5$이다.

두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=x(-x^2+5x)=-x^3+5x^2$이다.

$S'(x)=-3x^2+10x=-3x\left(x-\frac{10}{3}\right)$이므로

$S'(x)=0$에서 $x=0, \frac{10}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	5
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$		↗		↘	

증감표에서 $S(x)$는 $x=\frac{10}{3}$일 때, 최댓값을 갖고 최댓값은

$$S\left(\frac{10}{3}\right)=-\frac{1000}{27}+5 \cdot \frac{100}{9}=\frac{500}{27}$$

$$\therefore p+q=27+500=527$$

39) [정답] ①

[해설]

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 (x, x^2)이라 하자.

곡선 $y=x^2$과 정사각형 ABCD는 y축에 대하여 각각 대칭이므로 $0<x<1$인 경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.

이때, 점 C의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\left\{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\times\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=(1-x)x^2=x^2-x^3 \text{ 이다.}$$

$$\therefore S'(x)=3x^2+2x=x(-3x+2)$$

이때 $S'(x)=0$에서

$$x=\frac{2}{3} \ (\because \ 9<x<1)$$

따라서 함수 $S(x)$는 $x=\frac{2}{3}$에서 극대이자 최대이므로

구하는 넓이의 최댓값은

$$\therefore S'\left(\frac{2}{3}\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}$$

40) [정답] **25**

[해설]

$\frac{1}{2}x^2=-x+10$에서 $x^2+2x-20=0$

$$\therefore x=-1 \pm \sqrt{21}$$

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=-x+10$는 $x=-1\pm\sqrt{21}$일 때
만나므로 t의 범위는 $0<t<-1+\sqrt{21}$이다.
점 A, B의 y좌표가 같으므로
$-x+10=\frac{1}{2}t^2$에서 $x=10-\frac{1}{2}t^2$

따라서 점 B의 x좌표는 $10-\frac{1}{2}t^2$이다.

$$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=\left(10-\frac{1}{2}\mathrm{t}^2\right)-\mathrm{t}, \ \overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\mathrm{t}^2$$

직사각형 ACDB의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$

$=\left(10-\frac{1}{2}t^2-t\right)\times\frac{1}{2}t^2$

$=-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^3+5t^2(0<t<-1+\sqrt{21})$

$f'(t)=-t^3-\frac{3}{2}t^2+10t$

$=-\frac{t}{2}(2t-5)(t+4) \ (0<t<-1+\sqrt{21})$

$f'(t)=0$에서 $t=\frac{5}{2}$ ($\because \ t>0$)

함수 $f(t)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

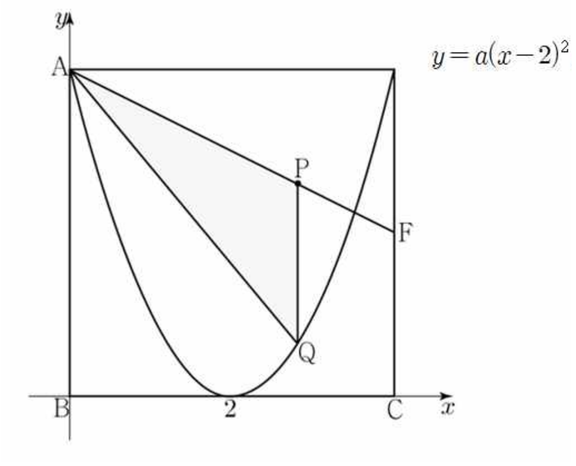
따라서 함수 $f(t)$는 $t=\frac{5}{2}$일 때, 극대이자 최대이다.

$\therefore\ 10t=10\times\frac{5}{2}=25$

41)[정답] ②

[해설]

주어진 그림을 꼭짓점 B를 원점으로, 직선 BC를 x축, 직선 BA를 y축으로 하는 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



직선 AF의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+4$

포물선 $y=a(x-2)^2$ $(a>0)$은 점 A$(0,\ 4)$를 지나므로 $4=a\times(0-2)^2$, $a=1$

포물선 $y=(x-2)^2$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+4$가

만나는 점의 x의 좌표는 $x=0$, $x=\frac{7}{2}$

점 P의 x좌표를 $t\left(0<t<\frac{7}{2}\right)$라 하면

점 P$\left(t,\ -\frac{1}{2}t+4\right)$, 점 Q$\left(t,\ (t-2)^2\right)$이고

삼각형 AQP의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times t\times\left\{-\frac{1}{2}t+4-(t-2)^2\right\}=-\frac{1}{4}(2t^3-7t^2)$

$S'(t)=-\frac{1}{4}(6t^2-14t)=-\frac{1}{2}t(3t-7)$

$S'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{7}{3}$

$S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{7}{2}\right)$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	$S\left(\frac{7}{3}\right)$	$\searrow$	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{7}{3}$에서 극대이면서 최대이므로

$S(t)$의 최댓값은

$-\frac{1}{4}\times\left\{2\times\left(\frac{7}{3}\right)^3-7\times\left(\frac{7}{3}\right)^2\right\}=\frac{343}{108}$

42) [정답] ③

[해설]

$-x^2+9=x+k \Rightarrow x^2+x+k-9=0$ 의 두 근 $\alpha,\ \beta$는 P, Q의 x좌표 이다.

ㄱ. $\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $k=7$이면 $P(1,8)$, $Q(-2,5)$
QR을 밑변으로 보면 높이가 2배이므로 넓이도 2배이다. (참)

ㄷ. $\mathrm{OR}=\mathrm{k}$, $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=\mathrm{k}-9$
$\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{OPR}+\triangle\mathrm{OPQ}$

$=\frac{1}{2}|\alpha|k+\frac{1}{2}|\beta|k=\frac{1}{2}|\alpha-\beta|k$ $(\because \alpha\beta<0)$

$=\frac{1}{2}k\sqrt{1-4(k-9)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{-4k^3+37k^2}$

여기서 $f(k)=-4k^3+37k^2$이라 두면

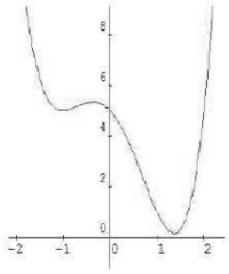
$f'(k)=-12k^2+74k=0$

$k=\frac{37}{6}$일 때, $f(k)$는 최댓값을 가진다.

$\therefore\ k=\frac{37}{6}$일 때, $\triangle OPQ$의 넓이는 최대이다. (거짓)

43) [정답] ③

[해설]



$f(x)=\overline{\mathrm{AP}}=(x-1)^2+(2-x^2)^2=x^4-3x^2-2x+5$

$f'(x)=4x^3-6x-2=2(x+1)(2x^2-2x-1)$

각각 극솟값, 극댓값, 극솟값을 갖는다

그림의 $f(x)$의 그래프에서 구하는 최솟값은

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$일 때이므로

$x-1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, $2-x^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

$(x-1)^2+(2-x^2)^2$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\dfrac{11-6\sqrt{3}}{4}$

44) [정답] ④

[해설]

원과 곡선이 만나는 점을 $\mathrm{P}(x,\ x^2-1)$라 하고, 점 $(18,\ -1)$과 점 P 사이의 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{(x-18)^2+x^4}$

$f(x)=x^4+(x-18)^2$라 하면

$f'(x)=4x^3+2(x-18)$

$\quad=2(2x^3+x-18)$

$\quad=2(x-2)(2x^2+4x+9)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최솟값

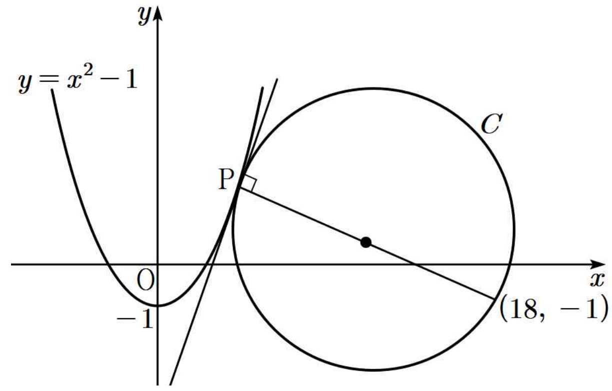
$f(2)=272$를 갖는다.

원의 반지름이 최소일 때는 d가 지름일 때이므로 반지름의

최솟값은 $\dfrac{d}{2}=\dfrac{\sqrt{272}}{2}=2\sqrt{17}$이다.

[다른 풀이]

좌표평면에서 점 $(18,\ -1)$을 지나는 원 C가 곡선 $y=x^2-1$과 만나도록 하는 원 C의 반지름의 길이의 최소가 되는 경우는 아래 그림과 같다.



즉, 만나는 접점을 $\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$라 하면 곡선 $y=x^2-1$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $y'=2t$이다.

직선 AP의 기울기와 접선의 기울기가 수직이므로

$\dfrac{t^2}{t-18}\times 2t=-1$, $2t^3+t-18=0$

$(t-2)(2t^2+4t+9)=0$

$\therefore t=2$

따라서 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$이므로 최소가 되는 원 C의 지름은

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(18-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{17}$

따라서 원 C의 반지름의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{17}$

45) [정답] ⑤

[해설]

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면 $g(x)$는 모든 실수에서 미분 가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}(x^3+ax^2+bx+c)=c$$

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$g(0)=f(0)=c$$

$$\therefore c=\frac{1}{2}$$

$x=0$에서 미분 가능하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^3+ah^2+bh}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}(h^2+ah+b)$$

$$=b$$

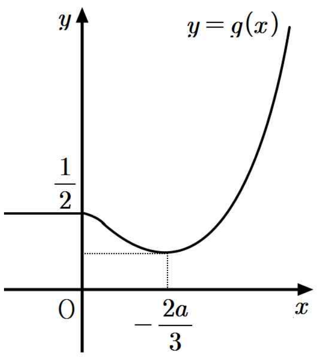
$$\lim_{h\to 0-}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{h}=0$$

$$\therefore\ b=0$$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$

또, 양변을 미분하면 $f'(x)=3x^2+2ax=3x\left(x+\frac{2}{3}a\right)$이므로

조건에서 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작은 값을 만족하는 $g(x)$의 개형은 아래와 같다.



ㄱ. $g(0)=\frac{1}{2}$, $g'(0)=0$이므로

$g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a$ …… ㉠

그런데 $f\left(-\frac{2}{3}a\right)<\frac{1}{2}$에서

$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}$

$=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$

$\therefore a<0$

$\therefore \frac{3}{2}+a<\frac{3}{2}$ …… ㉡

$\therefore g(1)<\frac{3}{2}$ ($\because$ ㉠, ㉡) (참)

ㄷ. $g(x)$의 최솟값이 $f\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$에서

$\frac{4}{27}a^3=-\frac{1}{2}$ $\therefore a=-\frac{3}{2}$ …… ㉢

$g(2)=f(2)$

$=8+4a+\frac{1}{2}$

$=\frac{5}{2}$ ($\because$ ㉢) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

46) [정답] ①

[해설]

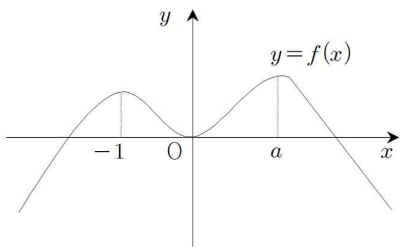
$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$

$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}=-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(-1)=2a+1$, $f(a)=a^4+2a^3$이고,

$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1=(a+1)^3(a-1)$

이므로 $0<a<1$이면 $f(a)<f(-1)$

$a\geq 1$이면 $f(a)\geq f(-1)$이다.

(ⅰ) $0<a<1$인 경우

$t<-1$이면 $g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq -1$이면 $g(t)=f(-1)=2a+1$

따라서, $g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (t>-1)\end{cases}$이고,

$\lim_{t\to -1-0}g'(t)=\lim_{t\to -1+0}g'(t)=0$이므로 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

그러므로 $0<a<1$일 때 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅱ) $a\geq 1$인 경우

$f(-1)=f(\alpha)$ $(0<\alpha\leq a)$이라 하자.

$t<-1$이면 $g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$-1\leq t<\alpha$이면 $g(t)=f(-1)=2a+1$

$\alpha\leq t<a$이면 $g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq a$이면 $g(t)=f(a)=a^4+2a^3$

따라서, $g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<\alpha)\\ -12t^3+12(a-1)t^2+12at & (\alpha<t<a)\\ 0 & (t>a)\end{cases}$

$\lim_{t\to-1-0} g'(t) = \lim_{t\to-1+0} g'(t) = 0$ 이므로

$g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

$\lim_{t\to a-0} g'(t) = \lim_{t\to a+0} g'(t)$ 이어야 하므로

$-12a^3+12(a-1)a^2+12a^3=0$ 에서 $12(a-1)a^2=0$ ∴ $a=1$

$a=1$ 이면 $f(x)=-3x^4+6x^2$ 이므로 $f(-1)=f(1)$

∴ $\alpha=a=1$

$$\therefore\ g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12t & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<1)\\ -12t^3+12t & (t>1)\end{cases}$$

$g'(-1)=0$, $g'(1)=0$ 이므로

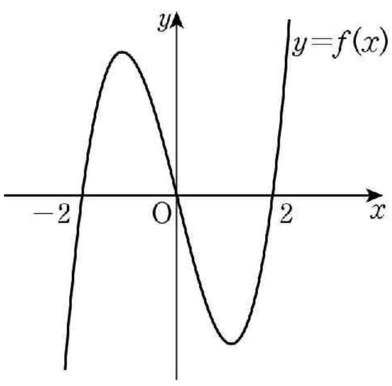
$a=1$ 일 때, $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i),(ii)에서 함수 $g(t)$가 수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 a의 값의 범위는 $0<a\le1$ 이므로

구하는 a의 최댓값은 1이다.

47) [정답] ⑤

[해설]
그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



ㄱ. $m=-1$일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-5$

$g\left(\frac{1}{2}\right)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 $h\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-5$

ㄴ. $m=-1$일 때, $g(x)=\begin{cases}47x-4 & (x<0)\\ -2x-4 & (x\ge0)\end{cases}$

(i) $x<0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x좌표를 $x_1(x_1<0)$이라 하면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_1$에서만 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$일 때, $g(0)-4<0=f(0)$이므로 $x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다.

즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(iii) $x>0$일 때,

$f(x)-g(x)=2x^3-6x+4$
$=(x-1)^2(x+2)\ge0$

즉, $f(x)\ge g(x)$

$x>0$에서 $h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다.

따라서 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 양수 m에 대하여

$x=0$일 때, $g(0)=\frac{4}{m^3}>0=f(0)$이므로

$x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $f(x)$의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$x>0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 y절편도 양수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x좌표를 $x_2(x_2>0)$이라 하면 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_2$에서만 미분가능하지 않다.

그러므로 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이려면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능해야 한다.

$x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접한다고 할 때, 접점의 x좌표를 t라 하자.

$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$에서

$2t^3-8t=-\frac{47}{m}t+\frac{4}{m^3}$ ……㉠

$6t^2-8=-\frac{47}{m}$ ……㉡

$t\times$(㉡ − ㉠ 에서

$4t^3=-\frac{4}{m^3}$

$t=-\frac{1}{m}$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\frac{6}{m^2}-8=-\frac{47}{m}$, $8m^2-47m-6=0$

$(8m+1)(m-6)=0$

m은 양수이므로 $m=6$

$m=6$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의

그래프는 $x=-\frac{1}{6}$인 점에서 접한다.

(i) $m=6$일 때, 함수 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge f(x)$이므로 $h(x)=f(x)$이다.

그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(ii) $0<m<6$일 때, $x<0$에서 m의 값이 작아질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 커지고 y절편도 커지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.
그러므로 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge f(x)$이므로 $h(x)=f(x)$이다. 따라서 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.
(iii) $m>6$일 때, $x<0$에서 m의 값이 커질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 작아지고 y절편도 작아지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 점의 x좌표를 각각 x_3, x_4라고 하면 함수 $h(x)$는 $x=x_3$, $x=x_4$에서 미분가능하지 않다.
(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

48) [정답] **160**

[해설]

$$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$

$$f(1)=2-3(a+1)+6a=3a-1,$$

$$f(a)=2a^3-3a^2(a+1)+6a^2=-a^2(a-3)$$

이므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는

$$f(1)f(a)=-a^2(3a-1)(a-3)<0$$

$a^2>0$이므로 $(3a-1)(a-3)>0$

그런데 a는 자연수이므로 $a>3$

그러므로 $a_1=4,\ a_2=5,\ \cdots,\ a_n=n+3$

$a=a_n$일 때, $f(x)=2x^3-3(a_n+1)x^2+6a_nx$이고

$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $b_n=f(1)=3a_n-1$

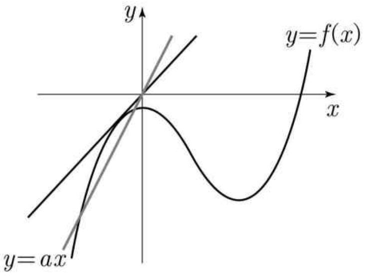
따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{10}(2n+5)=160$

49) [정답] ④

[해설]

$x^3-x^2-ax-3=0$에서 $x^3-x^2-3=ax$이므로

방정식 $x^3-x^2-ax-3=0$의 실근은 곡선 $y=x^3-x^2-3$과 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표이다.
$f(x)=x^3-x^2-3$이라 하면
$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같고 $y=ax$의 그래프가 그림과 같이 y축과 원점을 지나며 함수 $y=f(x)$에 접하는 접선 사이에 있을 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 교점을 갖는다.



원점에서 함수 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식을 구하자.
접점을 $(t,\ f(t))$라 할 때, 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)=(3t^2-2t)(x-t)+t^3-t^2-3$
접선이 원점을 지나므로
$0=(3t^2-2t)(0-t)+t^3-t^2-3$
$2t^3-t^2+3=0$
$(t+1)(2t^2-3t+3)=0$
$\therefore\ t=-1\ (\because 2t^2-3t+3>0)$
따라서 원점에서 함수 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 $y=5x$이다.
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 교점을 갖도록 하는 a의 범위는 $a>5$이다.
따라서 구하는 한 자리 자연수 a의 개수는 6, 7, 8, 9로 총 4개다.

50) [정답] **59**

[해설]

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 a는 양수이다. $f'(x)=ax^2-2bx-(a-4)$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4b^2+\boxed{4a^2-16a}\le 0$ …… ㉠

방정식 $f(x)+g(x)=0$이 서로 다른 2개의 실근을 가지므로

$f(x)+g(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+ax^2-3ax-3a^2=0$이고, $a>0$에서

$x^3+3x^2-9x-9a=0$

따라서 방정식 $x^3+3x^2-9x=\boxed{9a}$의 서로 다른 실근의

개수는 2이다.

$h(x)=x^3+3x^2-9x$라 하자.

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

방정식 $x^3+3x^2-9x=9a$가 서로 다른 2개의 실근을 가지려면 $9a=27$ 또는 $9a=-5$이어야 하고 $a>0$이므로

$a=\boxed{3}$ …… ㉡

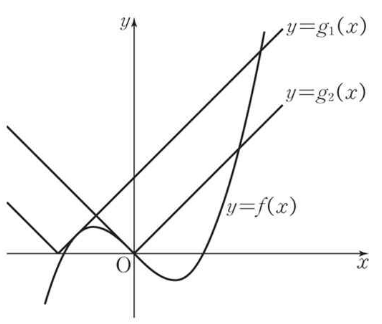
㉠, ㉡에서 $b^2 \le 3$이므로 $-\sqrt{3} \le b \le \sqrt{3}$

$\therefore F(a)=4a^2-16a,\ G(a)=9a,\ k=3$

따라서 $F(5)+G(4)+k=59$

51) [정답] ④

[해설]



두 함수 $f(x)=6x^3-x$와 $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $g(x)$의 그래프가 곡선 $f(x)=6x^3-x$에 접해야 한다.

$$g(x)=\begin{cases} x-a & (x \ge a) \\ -x+a & (x<a) \end{cases}$$

즉, $f'(x)=1$ 또는 $f'(x)=-1$이면서 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a의 값을 찾으면 된다.

(ⅰ) $f'(x)=1$이면서 두 함수 $g_1(x)$와 $f(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때

$18x^2-1=1,\ x^2=\dfrac{1}{9}$

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{3}\ (x<0)$

$y=\dfrac{1}{9}$이므로 점 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$을 지날 때의 a값은

$a=-\dfrac{4}{9}$

(ⅱ) $f'(x)=-1$이면서 두 함수 $g_2(x)$와 $f(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때

$18x^2-1=-1,\ x^2=0 \therefore\ x=0$

$y=0$이므로 점 $(0,\ 0)$을 지날 때의 a값은 $a=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 a값의 합은 $-\dfrac{4}{9}$이다.

52) [정답] **21**

[해설]

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하면

$$g(x)=\begin{cases} -7x & (f(x)<-x) \\ 2f(x)-5x & (f(x)\ge -x) \end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은 $g(x)=k$와 같다.

$f(x)=-x$에서

$$\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=-x,\ \frac{x}{2}(x^2-9x+22)=0$$

이때 모든 실수 x에 대하여

$x^2-9x+22=\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는 오직 원점 $(0,\ 0)$에서만 만난다.

따라서 함수 $h(x)$를 $h(x)=2f(x)-5x=x^3-9x^2+15x$라 하면

$g(x)=\begin{cases} -7x & (x<0) \\ h(x) & (x\ge 0) \end{cases}$이다.

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$이므로 $h'(x)=0$에서

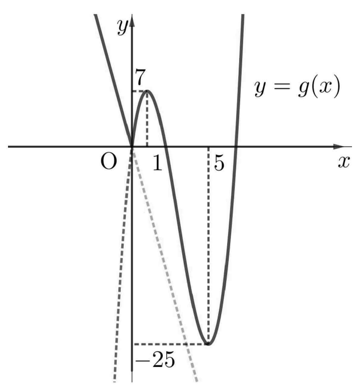
$x=1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값

$h(1)=1-9+15=7$을 갖고, $x=5$에서 극솟값

$h(5)=125-225+75=-25$를 갖는다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k의 값의 범위는 $0<k<7$이다.

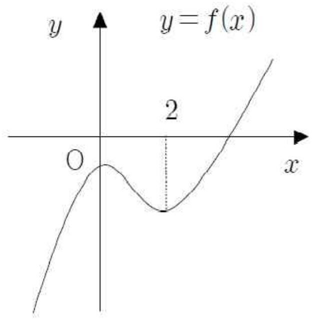
따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$$1+2+3+\cdots+6=\frac{6}{2}(1+6)=21$$

53) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f(0)<0$이면 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

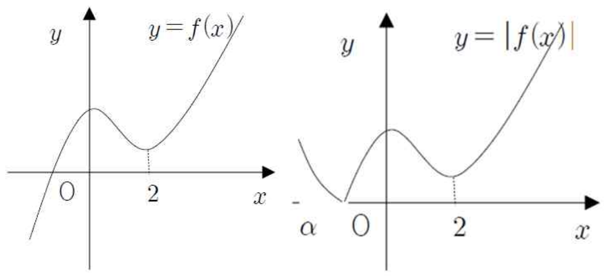


이 때, $f(2)<f(0)<0$ 이므로 $|f(0)|<|f(2)|$ <참>

ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$일 때 $f(0)>f(2)$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형을 각 경우에 따라 그리면 다음과 같다.

(ⅰ) $f(0)>f(2)>0$ 일 때,

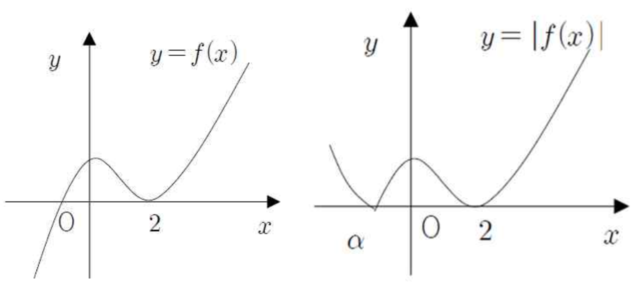
함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 $|f(\alpha)|=0\ (\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 2개이다.

(ⅱ) $f(0)>f(2)$ 이고, $f(2)=0$ 일 때,

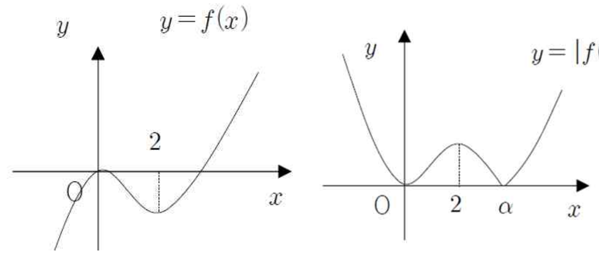
함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 $|f(\alpha)|=0\ (\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 2개이다.

(ⅲ) $f(0)=0$ 이고 $f(2)<0$ 일 때,

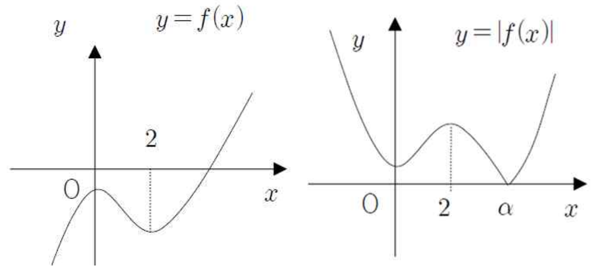
함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 $|f(\alpha)|=0\ (\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 0과 α로 2개이다.

(ⅳ) $f(2)<f(0)<0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



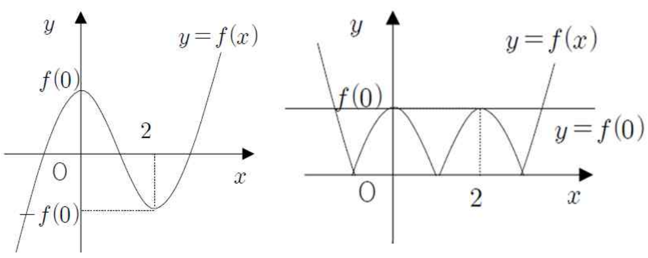
그러므로 $|f(\alpha)|=0$라 하면 a의 값은 0과 α로 2개이다.

따라서 (ⅰ),(ⅱ),(ⅲ),(ⅳ)에 의하여

극소인 a의 값의 개수는 2이다. <참>

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$ 이므로 $f(2)=-f(0)$

함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$과의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

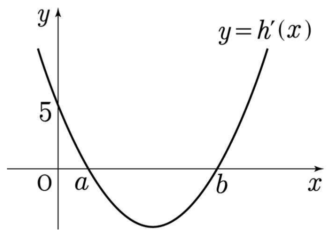
위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$의 서로 다른 교점의 개수는 4개이므로 서로 다른 실근의 개수도 4개이다. <참>

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

54) [정답] ⑤

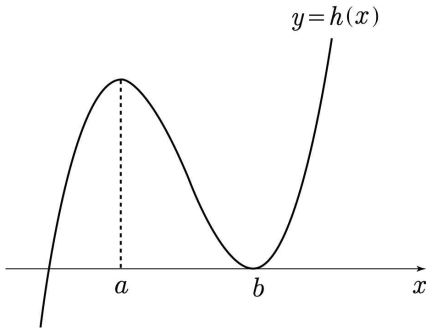
[해설]

함수 $y=h'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $h(b)=0$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$를 만족시키는 γ가

열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다.

열린 구간 $(0,\ b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여

$h'(x)<5$ 이므로

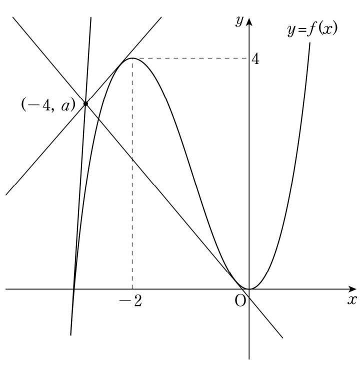
$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$

$h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

55) [정답] 9

[해설]



함수 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 4, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다. 세 접선의 기울기의 곱이 음수이므로 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 세 접선의 기울기 중 한 접선의 기울기만 음수이다.

$0<a<4$이므로 정수 a의 최댓값 M은 3이다.

따라서 $M^2=9$

56) [정답] ④

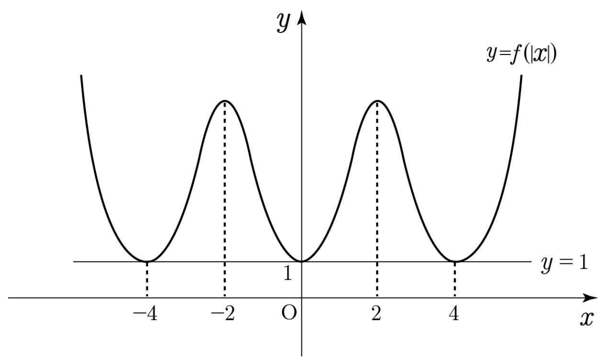
[해설]

사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대해 대칭이므로

$f(x)=(x-2)^4+a(x-2)^2+b$

$f(0)<f(2)$이고 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $f(x)$가 $x=0,\ 4$에서 극솟값 1을 갖고 $x=2$에서 극댓값을 가져야 한다.



$f(0)=f(4)=1$에서 $16+4a+b=1$

$f'(x)=4(x-2)^3+2a(x-2)$에서

$f'(0)=f'(4)=0$이므로 $-32-4a=0$

$a=-8,\ b=17$이므로

$f(x)=(x-2)^4-8(x-2)^2+17$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값 $f(2)=17$

57) [정답] 51

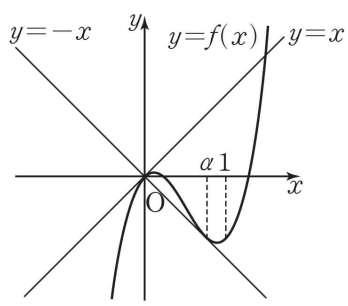
[해설]

$f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx\,(a>0,\ a,\ b,\ c$는 상수$)$로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3ax+2bx+c$이고,

$f'(1)=1$에서 $3a+2b+c=1$

…… ㉠



두 조건 (가), (나)에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같이 직선 $y=x$와 원점에서 접하고, 직선 $y=-x$와 점 $(\alpha,\ f(\alpha))\,(0<\alpha<1)$에서 접한다.

$f'(0)=1$이므로 $c=1$이고, ㉠에서 $3a+2b=0$, 즉

$b=-\frac{3}{2}a$이므로

$$f(x)=ax^3-\frac{3}{2}ax^2+x,\ f'(x)=3ax^2-3ax+1$$

$f(\alpha)=a\alpha^3-\frac{3}{2}a\alpha^2+\alpha=-\alpha$에서 $\alpha(2a\alpha^2-3a\alpha+4)=0$

$\alpha\neq 0$이므로 $2a\alpha^2-3a\alpha+4=0$ …… ㉡

$f'(\alpha)=3a\alpha^2-3a\alpha+1=-1$에서

$3a\alpha^2-3a\alpha+2=0$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a\alpha^2-2=0,\ a\alpha^2=2$ …… ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면 $4-3a\alpha+4=0,\ a\alpha=\frac{8}{3}$ …… ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면 $\frac{8}{3}\alpha=2,\ \alpha=\frac{3}{4}$

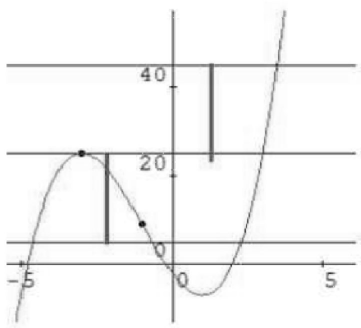
㉤에서 $\frac{3}{4}a=\frac{8}{3},\ a=\frac{32}{9}$

따라서 $f(x)=\frac{32}{9}x^3-\frac{16}{3}x^2+x$이므로

$$f(3)=96-48+3=51$$

58) [정답] ④

[해설]



주어진 조건을 만족하는 때는
$x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가질 때이고
구하는 m의 최댓값은 극댓값과 극솟값의 차이다
따라서
$f'(x)=3(x+3)(x-1)=3x^2+6x-9$
$f(x)=x^3+3x^2-9x+C$
$\therefore\ m=f(-3)-f(1)=32$

59) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에서 $f(0)=0$이고 $g(0)=0$이므로

$g(x)=f(x)+|f'(x)|$에서 $f'(0)=0$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=(x^2+ax+b)+x(2x+a)$에서 $f'(0)=b=0$

그러므로 $f(x)=x^2(x+a),\ f'(x)=x(3x+2a)$

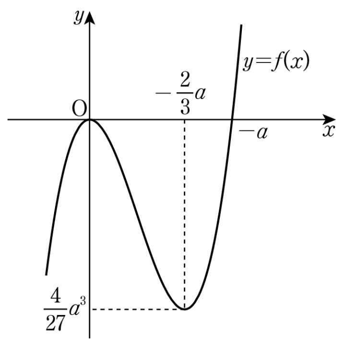
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

조건 (나)에서 $-a>0$이므로 $-\frac{2}{3}a>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$\frac{4}{27}a^3$	↗

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (다)에서 $\left|f\left(-\frac{2}{3}a\right)\right|=4$이므로

$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{27}a^3=-4$이고 $a^3=-27$에서 $a=-3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$이고

$g(x)=x^2(x-3)+|3x(x-2)|$

따라서 $g(3)=9$

60) [정답] 13

[해설]

함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$는

제3사분면에서 1개의 교점을 갖는다.

함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$가 접하는

경우 그 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$라 하자.

접선의 방정식은 $y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$이고

접선이 원점을 지나므로 $t^3=1$

t는 실수이므로 $t=1$이고 접점의 좌표는 $(1,\ 3)$이다.

원점을 지나는 접선의 기울기가 3이므로 $f(3)=2$

$f(1)=1$, $f(2)=1$, $k>3$인 경우 $f(k)=3$

따라서 $\sum_{k=1}^{6} f(k)=1+1+2+3+3+3=13$

61)

62) [정답] ⑤

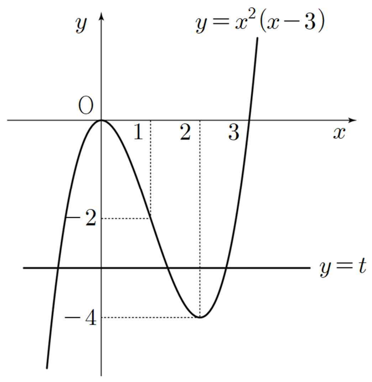
[해설]

$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$

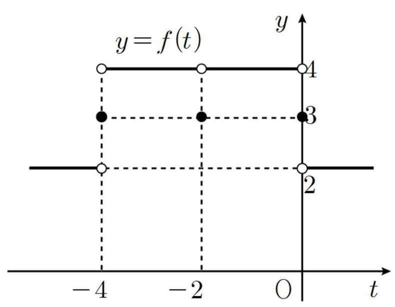
$x=1$ 또는 $x^2(x-3)-t=0$

$x^2(x-3)-t=0$의 서로 다른 실근의 개수는

$y=x^2(x-3)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.



따라서 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(t)$가 $t=-4,\ -2,\ 0$에서 불연속이다.

함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $t=-4,\ -2,\ 0$에서 연속이어야 한다.

$t=-4$일 때,

$\lim_{t\to -4-} f(t)g(t)=2g(-4)$,

$\lim_{t\to -4+} f(t)g(t)=4g(-4)$,

$f(-4)g(-4)=3g(-4)$이고

함수 $f(t)g(t)$가 $t=-4$에서 연속이므로

$2g(-4)=4g(-4)=3g(-4)$

따라서 $g(-4)=0$

같은 방법으로 $g(-2)=g(0)=0$

(가)에서 $g(x)$가 삼차 이하의 다항함수이므로

$g(x)=ax(x+2)(x+4)$ $(a\neq 0)$이라 하면

(나)에서 $g(-3)=6$이므로 $a=2$

$g(x)=2x(x+2)(x+4)$

따라서 $g(1)=30$

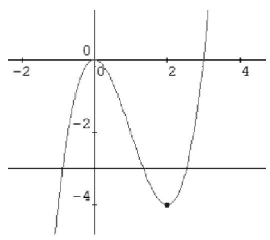
63) [정답] ④

[해설]

$n(x^3-3x^2)+k=0$

$x^3-3x^2=-\dfrac{k}{n}$

$y=x^3-3x^2$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $-4<-\dfrac{k}{n}<0$

$0<k<4n$, $a_n=4n-1$

$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\times 55-10=210$

64) [정답] ③

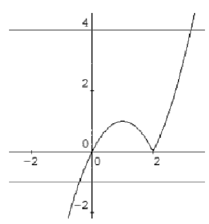
[해설]

$(g\circ f)(x)=(f(x))^2-3(f(x))-4=(f(x)+1)(f(x)-4)=0$

이므로 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점은

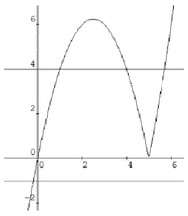
즉, 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 실근은 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=4$이다.

ㄱ. $k=2$일 때 $f(x)=x|x-2|$의 그래프는 그림과 같다.



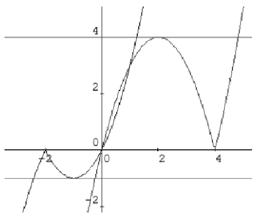
따라서 $h(2)=2$이다.

ㄴ. $k=5$일 때 $f(x)=x|x-5|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $h(k)=4$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 5이다.

ㄷ. $k=-2$, $k=4$일 때, $f(x)=x|x-k|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $h(k)=3$을 만족시키는 k의 값의 합은 $(-2)+4=2$이다.

65) [정답] ⑤

[해설]

$x=a$에서 연속이므로

$f(a)=t-f(a)\ \therefore f(a)=\dfrac{t}{2}$

$h(t)$는 $f(a)=\dfrac{t}{2}$ 를 만족하는 a의 개수이다.

$h(t)=3$이려면 $y=\dfrac{t}{2}$가 $f(x)$의 극댓값, 극솟값 사이에 존재해야 한다.

$f'(x)=3x^2+6x-9=0$ 에서 $x=-3,\ 1$

$f(-3)=27,\ f(1)=-5$ 이므로

$-5<\dfrac{t}{2}<27$

$-10<t<54$

$\therefore$ 정수 t의 개수는 63개

66)

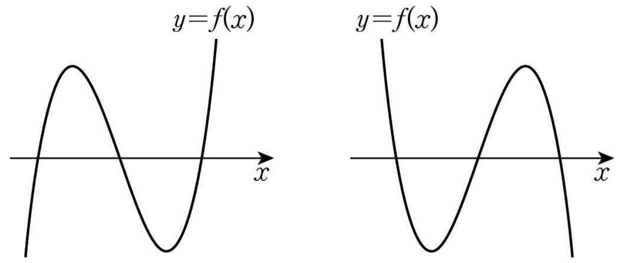
67)

68) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)$의 삼차항의 계수를 a라 하면 조건 (가)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $a<0$일 때



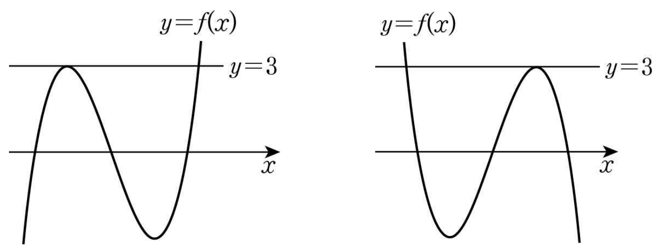
함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖고, 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$은 $x=3$에서 최솟값 1을 갖는다.

그러므로 조건 (나)에서 함수 $g(f(x))=\{f(x)-3\}^2+1$은 $f(x)=3$인 x에서 최솟값 1을 가지므로 $m=1$

한편, 방정식 $g(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2

그러므로 직선 $y=3$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $a<0$일 때



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 3

조건 (다)의 방정식 $g(f(x))=17$을 풀면

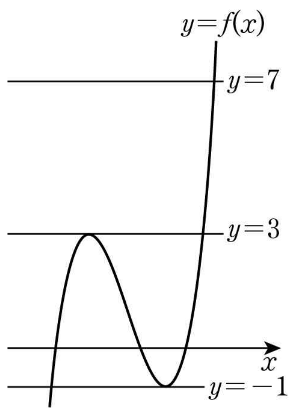
$\{f(x)-3\}^2+1=17$, $\{f(x)-3\}^2=16$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=7$

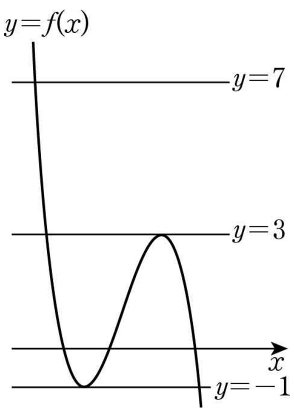
조건 (다)에서 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$의 실근의 개수를 유추하면 1이므로 방정식 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

그러므로 세 직선 $y=-1$, $y=3$, $y=7$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때



$a<0$일 때

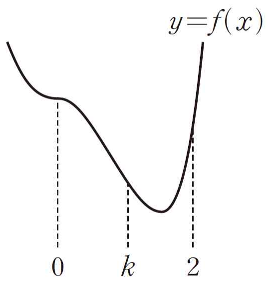


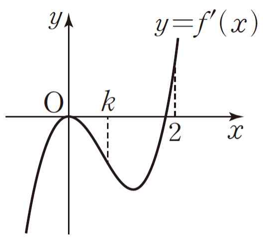
즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 -1
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 3, 극솟값은 -1이므로
그 합은 $3+(-1)=2$

69) [정답] ③

[해설]

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 아래쪽 그림과 같다.





ㄱ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축은 열린구간 $(k,\ 2)$에서 한 점에서 만난다. 즉, 방정식 $f'(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다. (참)

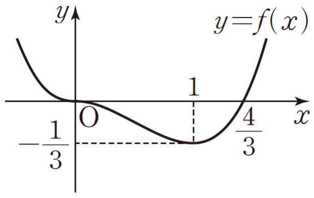
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지만 극댓값은 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(0)=0$이면 양수 a에 대하여 $f(x)=x^3(x-a)$로 놓을 수 있다.

$f(x)=x^4-ax^3$에서 $f'(x)=4x^3-3ax^2$이고

$f'(2)=32-12a=16$에서 $a=\frac{4}{3}$이므로 $f(x)=x^3\left(x-\frac{4}{3}\right)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-\frac{1}{3}$을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\frac{1}{3}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

70) [정답] ⑤

[해설]

조건 (가)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓을 수 있다.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

조건 (나)에서 $f(0)=f'(0)$이므로 $c=b$

즉, $f(x)=x^3+ax^2+bx+b$이므로

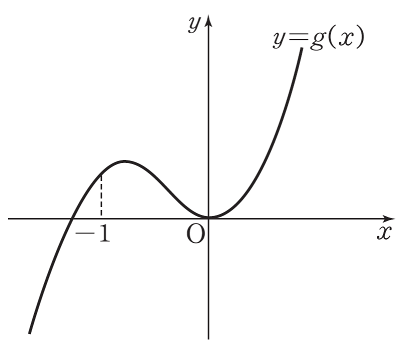
$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

$$g(x)=(x^3+ax^2+bx+b)-(3x^2+2ax+b)$$
$$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$$

$$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$$

$g(0)=0$이고, 조건 (다)에서 $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이므로

그림과 같이 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



따라서 $g'(0)=0$이므로

$b-2a=0,\ b=2a$

$$g(x)=x^3+(a-3)x^2$$
$$=x^2(x+a-3)$$

$g(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3-a$

$x\geq -1$에서 $g(x)\geq 0$이므로 $3-a\leq -1$, 즉 $a\geq 4$이어야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$에서

$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8$이고 $a\geq 4$이므로

$$f(2)=10a+8\geq 10\times 4+8=48$$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

71) [정답] 34

[해설]

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x+k \le g(x)$를 만족시키는 자연수 k의 값의 범위를 구하여 보자.

(i) $f(x) \le 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다

$h(x)=f(x)-12x$라고 하면

$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x$,

$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12=-2(x+2)(2x^2-x+3)$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$

$h(x)$는 $x=-2$에서 최대이고 최댓값은 20

그러므로 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x) \le 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $k \ge 20$

(ii) $g(x) \ge 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x) \ge 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다

부등식 $3x^2-12x+a-k \ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-3\times(a-k) \le 0,\ k \le a-12$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x) \ge 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $k \le a-12$

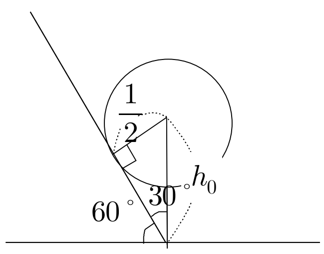
(i), (ii)에 의해 $20 \le k \le a-12$이고 이를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이므로 $22 \le a-12 < 23$

따라서 $34 \le a < 35$이므로 자연수 a의 값은 34

72) [정답] ①

[해설]

공이 빗면과 충돌할 때의 공의 중심과 바닥사이의 거리를 h_0라 하면 아래 그림에서



$h_0 \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\therefore h_0=1$

구와 빗면이 만나는 시각을 t라 하면 $h(t)=1$에서

$21-5t^2=1$

$\therefore t=2(\because\ t>0)$

따라서 t초 후의 공의 중심의 속도는 $h'(t)=-10t$이므로 충돌하는 순간의 속도는

$h'(1)=-20$

73) [정답] ③

[해설]

ㄱ. 광원과 물체의 속도는 각각

$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2},\ \frac{dy}{dt}=2t-\frac{11}{2}$ 이므로

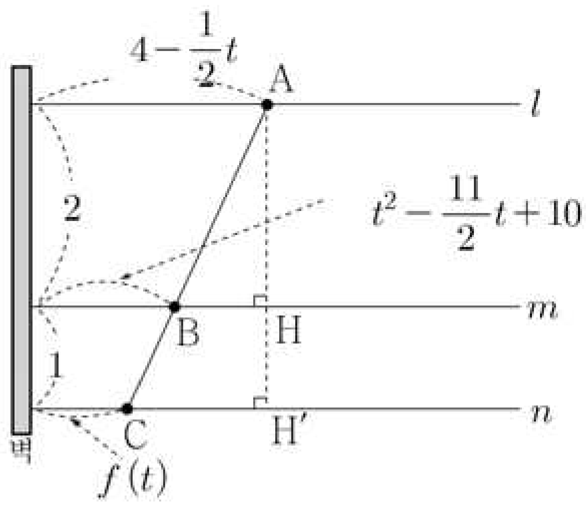
$t=\frac{5}{2}$에서 속도는 $-\frac{1}{2}$ 로 같다. ∴ 참

ㄴ. $\overline{AB}+\overline{BC}=3$ 인 순간은

$t^2-\frac{11}{2}t+10=4-\frac{1}{2}t$ 이므로

$t=2$ 또는 $t=3$ ∴ 참

ㄷ. 그림자 C 의 시각 t 에서 벽으로부터의 거리를 $f(t)$, 점 A 에서 직선 m, n 에 내린 수선의 발을 각각 H, H′ 라 하자.



$\overline{BH}=\left(4-\frac{1}{2}t\right)-\left(t^2-\frac{11}{2}t+10\right)=-t^2+5t-6$

$\overline{CH'}=4-\frac{1}{2}t-f(t)$

$\overline{BH} : \overline{CH'}=2:3$ 이므로 $f(t)=\frac{3}{2}t^2-8t+13$ 이다.

속도 v 는 $v=\frac{df(t)}{dt}=3t-8$ 이므로

가속도 a 는 $a=\dfrac{dv}{dt}=3$ 이다. ∴ 거짓

74)