[준킬러][수학2] 4적분

04 수2 07 부정적분

02 부정적분의 계산

01 부정적분의 계산1 (기본)

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 8

1. 자연수 n과 실수 x에 대하여 함수 $F_n(x)$가

$$F_n(x)=\int \frac{x^{3n}-1}{x^2+x+1}dx$$

$$F_n(1)=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-5}+\cdots+\frac{1}{2}-1$$

와 같이 정의될 때, $F_n(0)$의 값은?

① $\frac{n(n-1)}{2}$ ② $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ③ $\frac{(n-1)(n-2)}{n+1}$

④ 0 ⑤ 1

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

06 함수 구하기6 (도함수의 정의 이용)

[출처] 2017 모의_공공 경찰대 고3 07월 20

2. 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),\quad f(1)=1$$

$$g(x+y)=g(x)g(y)+f(x)f(y),\quad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=0$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f'(x)=f'(0)g(x)$

ㄴ. $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.

ㄷ. $\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=1$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

3. 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$f(x-y)=f(x)-f(y)+3xy(x-y)$$

를 만족시키는 다항함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 a를 가진다. $f'(0)=b$일 때, $a-b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

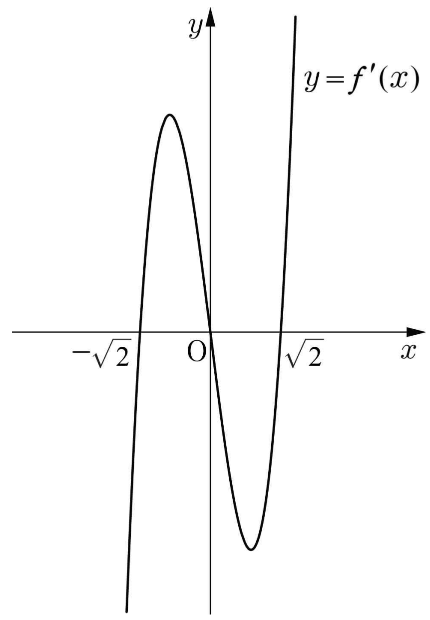
04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

07 함수 구하기7 (도함수 구하기)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 21

4. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(-\sqrt{2})=f'(0)=f'(\sqrt{2})=0$이다.



$f(0)=1$, $f(\sqrt{2})=-3$일 때, $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 모든 정수 m의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 10

5. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $f(0)=2$이고 $f'(4)=-24$이다.
(나) 부등식 $xf'(x)>0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $1<x<3$이다.

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

08 활용1 (몫과 나머지의 해석)

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

6. 5차다항식 $P(x)$에 대하여, $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누면 나머지가 8이고, $P(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누면 나머지가 -8일 때, $P(2)$의 값을 구하시오.

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

09 활용2 (함수의 상황)

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

7. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2$이고, $g'(x)=2x$이다. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때, $f(0)-g(0)$의 값들의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

10 활용3 (극대와 극소)

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 19

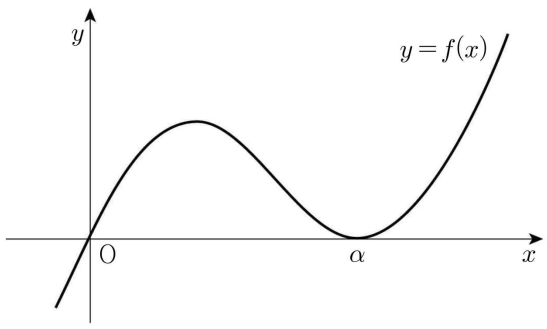
8. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(x-1)^3$이다. 함수 $f(x)$의 극값을 M, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ \mathrm{f}(0))$, $\mathrm{B}(2,\ \mathrm{f}(2))$에서 접하는 두 접선의 교점의 y좌표를 N이라 할 때, $16(M-N)$의 값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 07월 21

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0$$

이고 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $g\left(\frac{\alpha}{3}\right)$의 값은? (단, α는 양수이다.)



(가) $g'(x)=f(x)+xf'(x)$
(나) $g(x)$의 극댓값이 81이고 극솟값이 0이다.

① 56 ② 58 ③ 60
④ 62 ⑤ 64

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

08 계산과 해석1 (정적분 관계식)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 20

10. 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$의 도함수를 $h(x)$라 하자. $f(-1)=f(1)=f(2)=0$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_{1}^{2} f(x)dx > 0$

ㄴ. $h(0) < 0$

ㄷ. $\int_{m}^{n} h(x)dx$의 값이 최대일 때, $m+n=\frac{4}{3}$이다. (단, $m<n$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 08 정적분

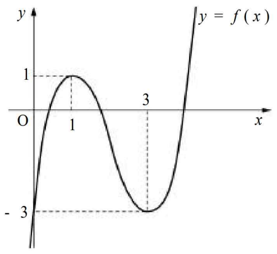
01 정적분의 계산

09 계산과 해석2 (절댓값함수의 해석)

[출처] 2002 모의_공공 평가원 고3 11월 16

11. 그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$가 극댓값 $f(1)=1$과 극솟값 $f(3)=-3$을 가지며, $f(0)=-3$이다.

이때, $\int_0^3 |f'(x)|dx$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

12. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 \lvert f(x)\rvert dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$
(나) $\int_2^3 \lvert f(x)\rvert dx = \int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$ 의 값을 구하시오.

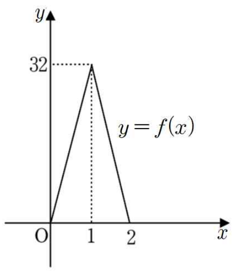
04 수2 08 정적분

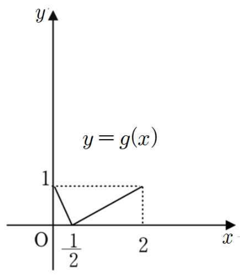
01 정적분의 계산

10 계산과 해석3 (함수 구하기)

[출처] 2003 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

13. 닫힌구간 $[0, 2]$에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다. 이때, $\frac{1}{3}\int_0^2 f(g(x))dx$의 값을 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하시오.





[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

14. 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $g(1)=2$
>
> (나) 모든 실수 x, y에 대하여
> $f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$이다.

이때, $\int_0^3 \{f(x)+g(x)+h(x)\}dx$의 값을 구하시오.

[준킬러][수학2] 4적분

[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

15. 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+1 & (x<1) \\ 1 & (x=1) \\ p(x-2)^3+q(x-2)^2+r(x-2)+5 & (x>1) \end{cases}$$

이고 $g(x)=f'(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
(나) $g'(0)=g'(2)=0$

$\int_0^1 f(x)dx$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 29

16. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^3 f(x)dx$의 최솟값을 m이라 할 때, $4m$의 값을 구하시오.

(가) $f(0)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(2-x)=f'(2+x)$이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq -3$이다.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 28

17. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 정수 m에 대하여 $\int_m^{m+2} f(x)dx=4$이다.
(나) $0\leq x\leq 2$에서 $f(x)=x^3-6x^2+8x$이다.

$4\int_1^{10} f(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 22

18. 두 함수 $f(x)=-x^2+4x$, $g(x)=2x-a$에 대하여 함수 $h(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$가 극솟값 3을 가질 때, $\int_0^4 h(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

11 계산과 해석4 (정의된 함수)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 24

19. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t(t\geq -1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2015 모의_공공 경찰대 고3 07월 22

20. 실수 t에 대하여 함수

$$f(x)=x^2-2|x-t|\ (-1\le x\le 1)$$

의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_0^{\frac{3}{2}} g(t)dt=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

12 계산과 해석5 (미지수를 포함한 절댓값함수. 케이스)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 30

21. x에 대한 방정식 $\int_0^x |t-1|dt=x$의 양수인 실근이 $m+n\sqrt{2}$일 때, m^3+n^3의 값을 구하시오.
(단, m, n은 유리수이다.)

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

13 계산과 해석6 (추론과 해석)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

22. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$ 이다.

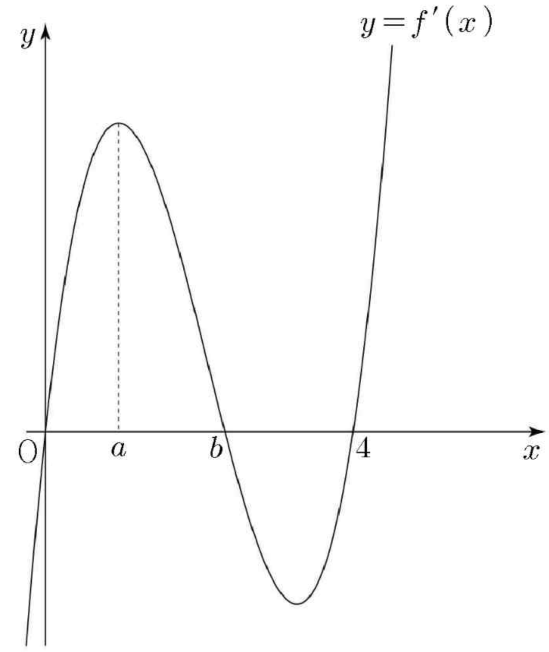
(나) 모든 정수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.

(다) 모든 정수 k 에 대하여 닫힌구간 $[2k,\ 2k+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)dx = a$ 라 할 때, $6a$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 09월 21

23. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f'(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 가질 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=f'(b)=f'(4)=0$)



<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $a<t<b$ 일 때, $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} > \dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}$ 이다.

ㄷ. $\int_a^4 f'(x)dx = 0$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=f(a)$ 는 서로 다른 세 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 17

24. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(2)=f(5)$
>
> (나) 방정식 $f(x)-p=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되게 하는 실수 p의 최댓값은 $f(2)$이다.

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은?

① 25 ② 28 ③ 31
④ 34 ⑤ 37

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 21

25. 함수

$$f(x)=(x-1)|x-a|$$

의 극댓값이 1일 때, $\int_0^4 f(x)dx$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{11}{6}$ ⑤ 2

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 15

26. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.
> (나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$에 대하여 $\int_0^{10} g(x)dx$의 값은?

① 48 ② 50 ③ 52
④ 54 ⑤ 56

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

27. 실수 p에 대하여 곡선 $y=x^3-x^2$과 직선 $y=px-1$의 교점의 x좌표 중 가장 작은 값을 m이라 하자. $m<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3-x^2-px+1)dx>0$$

이 되도록 하는 m의 최솟값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 14

28. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x\le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 08 정적분

02 여러가지 함수의 정적분

02 여러가지 함수의 정적분2 (우함수와 기함수의 판단)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 07월 19

29. 정수 a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+10$$

이 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 모든 실수 α에 대하여 $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

(나) $-6<f'(1)<-2$

이때, 함수 $y=f(x)$의 극솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

04 수2 08 정적분

02 여러가지 함수의 정적분

03 여러가지 함수의 정적분3 (우함수와 기함수의 활용)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 20

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(-x)=-f'(x)$$

를 만족시킨다. $f'(1)=0$, $f(1)=2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f'(-1)=0$

ㄴ. 모든 실수 k에 대하여 $\int_{-k}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{k} f(x)dx$

ㄷ. $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여 $\int_{-t}^{t} f(x)dx<6t$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 08 정적분

02 여러가지 함수의 정적분

04 여러가지 함수의 정적분4 (대칭성)

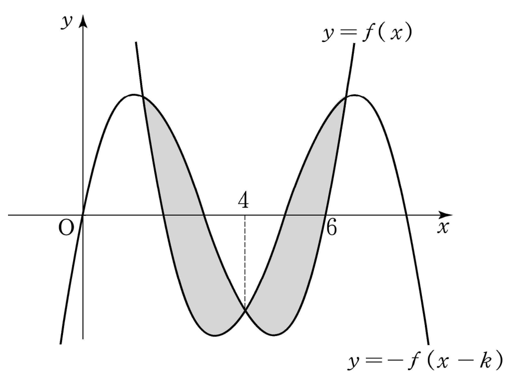
[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 20

31. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(6)=0$

(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, $(\gamma, f(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 만나면 k의 값에 관계없이 $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)+f(x-k)dx=0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나고 가운데 교점의 x좌표의 값이 4일 때, $\int_0^k f(x)dx$의 값을 구하시오.



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 19

32. 삼차함수 $f(x)=x^3-4x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 곡선을 $y=g(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$

ㄴ. $\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=\frac{7}{2}$

ㄷ. 방정식 $\int_0^x g(t)dt=\int_0^x f(t)dt+3$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 29

33. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 t에 대하여 $\int_{0}^{t} f(x)dx = \int_{2a-t}^{2a} f(x)dx$ 이다. (나) $\int_{a}^{2} f(x)dx = 2$, $\int_{a}^{2} \lvert f(x) \rvert dx = \frac{22}{9}$

$f(k)=0$이고 $k<a$인 실수 k에 대하여 $\int_{k}^{2} f(x)dx = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 14

34. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양수 a가 다음 조건을 만족할 때, a의 값은?

(가) 모든 실수 t에 대하여 $\int_{a-t}^{a+t} f(x)dx = 0$이다. (나) $f(a)=f(0)$ (다) $\int_{0}^{a} f(x)dx = 144$

① $2\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$
④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

04 수2 08 정적분

02 여러가지 함수의 정적분

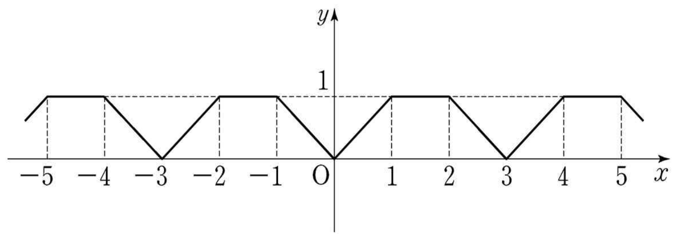
06 여러가지 함수의 정적분6 (주기함수)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 20

35. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x < 2) \\ -x+3 & (2 \le x < 3) \end{cases}$$

이다. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 13$일 때, 상수 a의 값은?



① 10 ② 12 ③ 14

④ 16 ⑤ 18

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월

36. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$

(나) $f(x+2)=f(x)$

(다) $\int_{-1}^{1}(x+2)^2 f(x)dx = 50$, $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = 2$

$\int_{-3}^{3} x^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

37. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=ax^2\,(0 \le x < 2)$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$이다.

$\int_1^7 f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 11

38. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은?

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1 < x < 0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

02 정적분으로 정의된 함수1 (적분함수)

[출처] 2004 모의_공공 사관학교 고3 07월 26

39. 실수 전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(1)=25$

Ⅱ. $f(x)=\frac{1}{2}\int_{x}^{x+1} f(t)dt-\frac{1}{2}\int_{x}^{x-1} f(t)dt-\int_{0}^{1} f(t)dt$

Ⅲ. 임의의 실수 x, y에 대하여
$f(x+y)+f(x-y)=2\{f(x)+f(y)\}$

이때, 미분계수 $f'(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 11

40. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_{1}^{x} f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_{0}^{1} f(t)dt$일 때, $a+f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

03 정적분으로 정의된 함수2 (피적분함수의 변수와 상수의 구분)

[출처] 2017 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

41. 함수 $f(x)=(x-1)^4(x+1)$에 대하여 이차함수 $g(x)$, $h(x)$가

$$f(x)=g(x)+\int_0^x (x-t)^2 h(t)dt$$

를 만족시킬 때, $g(2)+h(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 9

42. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)^2 f'(t)dt=\frac{3}{4}x^4-2x^3$$

을 만족한다. $f(0)=1$일 때, $\int_0^1 f(x)dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

04 수2

08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

04 정적분으로 정의된 함수3 (정적분의 기본정리)

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

43. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)=\int_1^x (t^2-t)dt$에 대하여 직선 $y=6x-k$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$

④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

44. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_1^x (f(t)+t^2+2at-3)dt\right\}$$
$$=\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}(2f(t)-3t+7)\right\}dt$$

(나) $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}=6$

① -1 ② -2 ③ -3

④ -4 ⑤ -5

04 수2

08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

06 활용2 (극대와 극소)

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 11월 21

45. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수

a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월 19

46. 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (t-a)(t-b)dt$가

다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

(가) 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극값을 갖는다.
(나) $f(a)-f(b)=\frac{1}{6}$

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 20

47. 실수 a $(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$라 하자. 함수

$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$가 오직 하나의 극값을

갖도록 하는 a의 최댓값은?

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 20

48. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오.

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

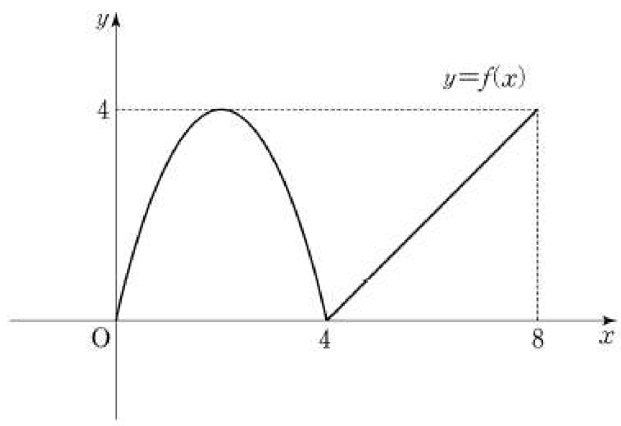
07 활용3 (최대와 최소)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 29

49. 구간 $[0,8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a(0\le a\le 4)$에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

50. 함수

$$f(x)=\begin{cases}1+x & (-1\le x<0)\\ 1-x & (0\le x\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

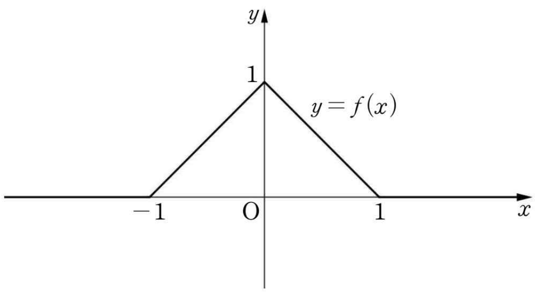
에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\{2x-f(t)\}dt$$

라 할 때, 함수 $g(x)$의 최솟값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{5}{12}$

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{7}{12}$



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 12

51. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1\le x<n$일 때, $|f(x)|=|6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt-\int_{x}^{4} f(t)dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

08 활용4 (양적관계 활용)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 17

52. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$를 갖는다.

$$S=\int_{\alpha}^{0}|f'(x)|dx,\ T=\int_{0}^{\beta}|f'(x)|dx$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $\alpha+\beta=0$이면 $S=T$이다.

ㄷ. $S<T$이고 $f(\alpha)=0$이면 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

09 활용5 (함수 구하기)

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 20

53. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여

(가) $f(x)g(x)=x^3+3x^2-x-3$

(나) $f'(x)=1$

(다) $g(x)=2\int_{1}^{x}f(t)dt$

$\int_{0}^{3}3g(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 20

54. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)
> (나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여
> $\int_0^t |f'(x)|dx = f(t)+f(0)$
> 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_0^k f'(x)dx < 0$
ㄴ. $0 < k \leq 1$
ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 15

55. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_2^x (t-2)f'(t)dt$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=0$에서만 극값을 가질 때, $g(0)$의 값은?

① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -3
④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -4

[출처] 2017 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

56. 음이 아닌 정수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1인 n차 다항함수 $P_n(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$
(나) 음이 아닌 서로 다른 정수 $m,\ n$에 대하여 $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=0$

$\int_{0}^{1} P_3(x)dx$의 값은?

① $-\frac{1}{20}$ ② $-\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{20}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 20

57. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt-xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이고 함수 $g(x)$는 오직 1개의 극값만 가진다. $\int_{0}^{1} g'(x)dx$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 20

58. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(2)$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 20

59. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 14

60. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1} f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>
ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 20

61. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
> (나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_0^3 |f(x)|dx$의 값을 구하시오.

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

10 활용6 (정의된 함수)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 21

62. 양수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_{3t}^x (s^2-4ts+3t^2)ds$$

라 할 때, 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f'(x)=(x-t)(x-3t)$

ㄴ. $t>2$일 때, $g(t)=\dfrac{2}{3}(3t-2)^2$이다.

ㄷ. $t>0$에서 정의된 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{1}{2}$에서만 미분가능하지 않다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

63. 실수 $t(0<t<3)$에 대하여 삼차함수

$$f(x)=2x^3-(t+3)x^2+2tx$$

가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, 세 점 $(0,\ 0)$, $(a,\ 0)$, $(a,\ f(a))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $g(t)$라 하자. $\lim_{t\to 0}\frac{1}{g(t)}\int_0^a f(x)dx$의 값은?

① 1 ② $\frac{13}{12}$ ③ $\frac{7}{6}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 14

64. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\int_t^x f(s)ds=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^2(x-1)$일 때, $g(1)=1$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다.
ㄷ. $\lim_{t\to b}g(t)+g(b)=6$을 만족시키는 실수 b의 값이 0과 3뿐이면 $f(4)=12$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

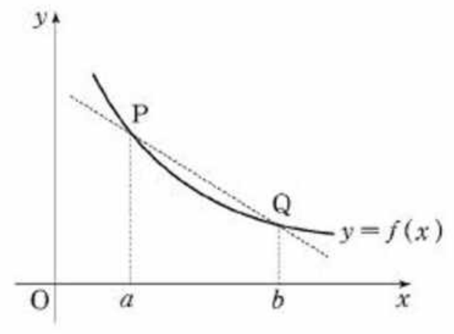
11 활용7 (추론과 해석)

[출처] 2001 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

65. 부등식 $n<\int_0^2 \sqrt{27+2\sin x}\,dx<n+1$ 을 만족하는 양의 정수 n을 구하시오.

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 8

66. 다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 이 그래프 위의 서로 다른 두 점 P(a, f(a)), Q(b, f(b))를 나타낸 것이다.



함수 $F'(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $F(x)$는 구간 $[a, b]$에서 증가한다.

ㄴ. $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$는 직선 PQ의 기울기와 같다.

ㄷ. $\int_a^b \{f(x)-f(b)\}dx \le \frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 10

67. 함수 $f(x)=\begin{cases} -1 & (x<1) \\ -x+2 & (x \ge 1) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 증가한다.

ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 11

68. 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=0$

(나) $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여
$0<xf(y)<yf(x)$

세 수

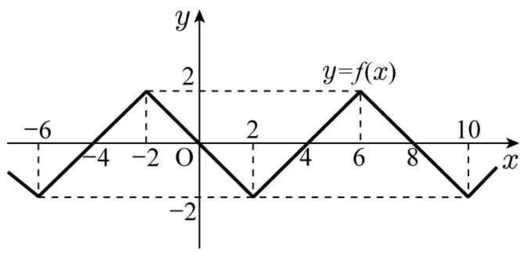
$$A=f'(0),$$
$$B=f(1),$$
$$C=2\int_{0}^{1}f(x)dx$$

의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 9

69. 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같다.



실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{x}^{x+2} f(t)dt$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(-1)=0$

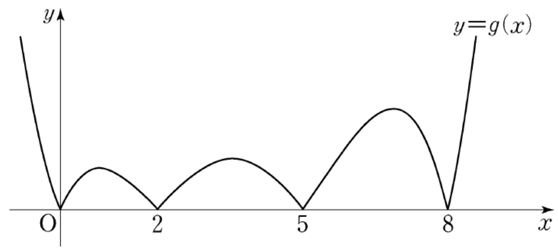
ㄴ. 함수 $g(x)$는 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 감소한다.

ㄷ. $-4 \le x \le 6$에서 방정식 $g(x)=2$의 모든 실근의 합은 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 11월 19

70. 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를 $g(x)=\left|\int_{0}^{x} f(t)dt\right|$라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

ㄷ. $\int_{m}^{m+2} f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 11

71. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x |f(t)-2t|\,dt$$

로 정의하자. 다음 조건을 만족시키는 이차함수 f 중에서 $f(1)$의 최솟값은?

$g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 20

72. 함수 $f(x)=-x+2-t$에 대하여 함수 $g(t)$

$$g(t)=\int_0^t |f(x)|\,dx$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $t>0$)

<보 기>

ㄱ. $g(1)=\frac{1}{2}$

ㄴ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

ㄷ. 방정식 $g(t)=\frac{2}{3}$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 20

73. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\int_{0}^{x} tf(t)dt$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g'(0)=0$

ㄴ. 양수 α에 대하여 $g(\alpha)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0, \alpha)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. 양수 β에 대하여 $f(\beta)=g(\beta)=0$이면 모든 실수 x에 대하여 $\int_{\beta}^{x} tf(t)dt \geq 0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 21

74. 삼차함수 $f(x)=4x^3-24x^2+36x-8k$ (k는 정수)에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \int_{0}^{x} f(t)dt & (x \leq a \text{ 또는 } x \geq b) \\ c & (a < x < b) \end{cases}$$

라 하자. 어떤 정수 k에 대하여 함수 $g(x)$가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않도록 세 실수 a, b, c를 정할 때, $k+a+b+c$의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 21

75. 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)\,dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 20

76. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서만 만난다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다.

ㄴ. $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\ge 0$이면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

03 정적분과 넓이3 (그래프 그리기)

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

77. 두 곡선 $y=x^3+4x^2-6x+5$, $y=x^3+5x^2-9x+6$이 만나는 점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, 곡선 $y=6x^5+4x^3+1$과 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\sqrt{5}$이다. 자연수 a의 값은?

① 160 ② 162 ③ 164

④ 166 ⑤ 168

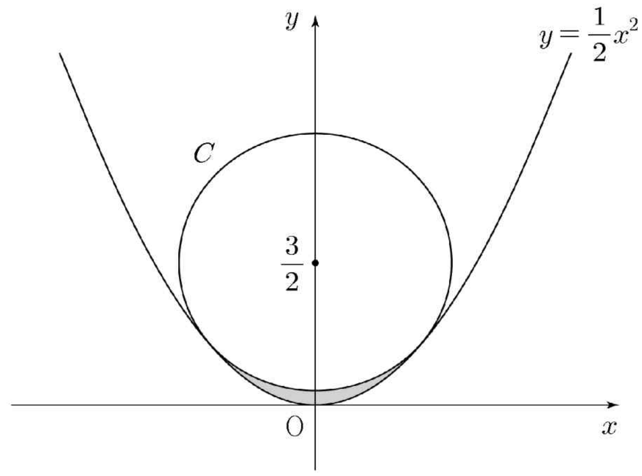
04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

07 정적분과 넓이7 (해석 후 넓이)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 29

78. 그림과 같이 중심이 $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $r\left(r<\frac{3}{2}\right)$인 원 C가 있다. 원 C가 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 원 C와 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프로 둘러싸인  모양의 넓이는 $a+b\pi$이다. $120(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.)



04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

08 정적분과 넓이8 (함수결정 후 넓이)

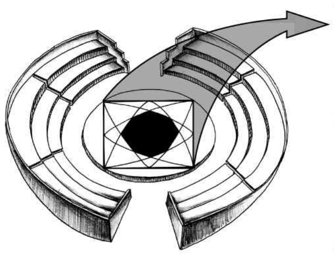
[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 07월 30

79. [그림1]은 무대 디자이너 길섭이가 야외공연 무대디자인 공모전에 출품한 작품이다. [그림1]의 중앙무대를 확대하면 [그림2]와 같고, 중앙 무대를 디자인하는 과정은 다음과 같다.

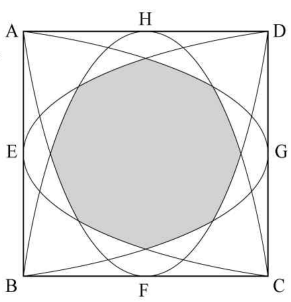
(1) 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD를 그리고 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H라 한다.

(2) 변 BC를 좌표평면 위의 x축과 평행하게 놓고 두 점 B, C를 지나며 점 H를 꼭짓점으로 하는 이차함수의 그래프와 두 점 A, D를 지나며 점 F를 꼭짓점으로 하는 이차함수의 그래프를 그린다.

(3) 변 AB를 좌표평면 위의 x축과 평행하게 놓고 (2)와 같은 방법으로 세 점 A, B, G를 지나는 이차함수와 세 점 C, D, E를 지나는 이차함수의 그래프를 추가로 그린다.



[그림1]

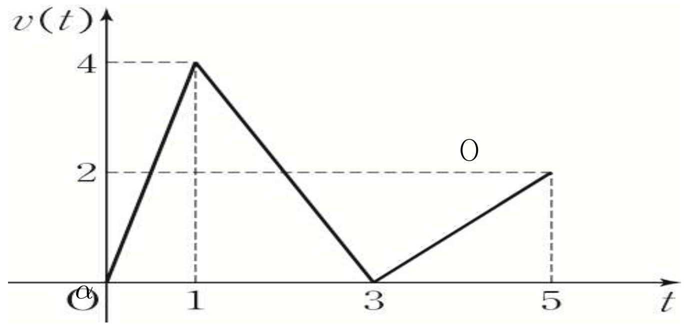


[그림2]

[그림2]의 어두운 부분의 넓이를 $\frac{p\sqrt{2}+q}{3}$라 할 때, $p-q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 07월 14

80. 반지름의 길이가 1, 중심이 O인 원을 밑면으로 하고 높이가 $2\sqrt{2}$인 원뿔이 평면 α 위에 놓여있다. 그림과 같이 원뿔을 평면 α와 평행하고 원뿔의 밑면의 중심 O를 지나는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 일부분은 포물선이다. 이때 단면의 넓이는?



① $\frac{13}{8}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{15}{8}$

④ 2 ⑤ $\frac{17}{8}$

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

81. 함수 $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x+1$과 이차함수 $g(x)$는 어떤 실수 α에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$, $f'(\alpha)=g'(\alpha)$
(나) $f(\alpha+1)=g(\alpha+1)$, $f'(\alpha+1)=g'(\alpha+1)$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 할 때, $\dfrac{S_2}{S_1}$의 값은?

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

82. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \geq 0$일 때, $f(x)=x^2-2x$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)+f(x)=0$이다.

실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[t, t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 좌표평면에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 17

83. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
>
> (나) $\int_{0}^{6} f(x)dx=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 9 ② 12 ③ 15

④ 18 ⑤ 21

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 20

84. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

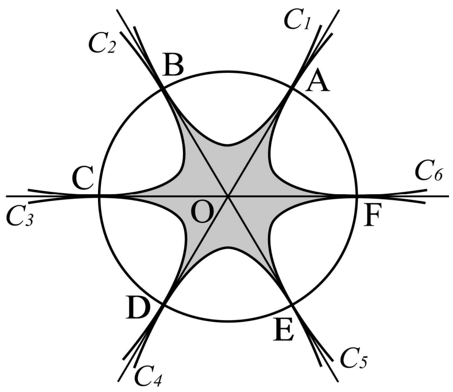
04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

09 정적분과 넓이9 (곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 10

85. 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 2 인 원의 둘레를 6 등분하는 점을 각각 A, B, C, D, E, F 라 하자. 두 점 A, B에서 두 직선 OA, OB에 접하는 포물선 C_1 을 그리고, 두 점 B, C에서 두 직선 OB, OC에 접하는 포물선 C_2 를 그린다.



이와 같은 방법으로 포물선 C_3, C_4, C_5, C_6 을 그릴 때, 6 개의 포물선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $2\sqrt{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ③ $3\sqrt{3}$

④ $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 14

86. 좌표평면 위의 점 $P\left(\frac{1}{2}, -2\right)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 접선을 l, m이라 할 때, 두 접선 l, m과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

87. 직선 l 이 함수 $f(x)=x^4-2x^2-2x+3$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 접할 때, 직선 l 과 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이가 A 이다. $30A$ 의 값을 구하시오.

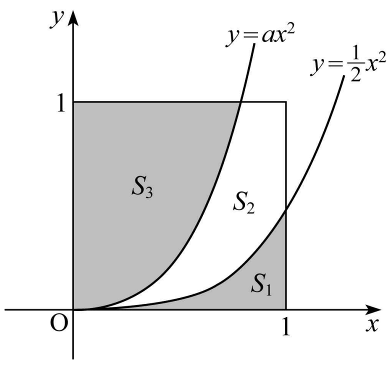
04 수2 09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

01 넓이와 해석1 (넓이조건과 관계식)

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 10

88. 그림과 같이 네 점 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부를 두 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=ax^2$으로 나눈 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.



S_1, S_2, S_3이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{16}{9}$　② $\frac{17}{9}$　③ 2

④ $\frac{19}{9}$　⑤ $\frac{20}{9}$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 20

89. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{a}x^2 & (-a\le x\le a)\\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 S이다. $40S$의 값을 구하시오.

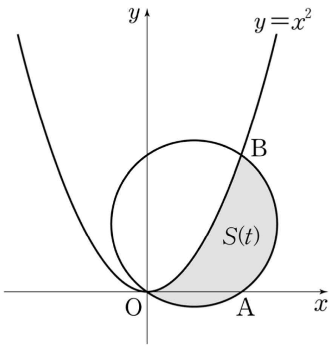
04 수2 09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

03 넓이와 해석3 (넓이로 정의된 함수)

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 29

90. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 O(0, 0), A(t, 0), B(t, t²)을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y \le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\dfrac{p\pi+q}{4}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)



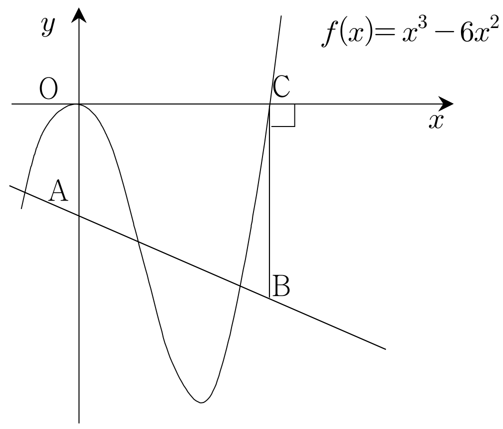
04 수2 09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

04 넓이와 해석4 (넓이가 같을 조건)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 23

91. 그림과 같이 임의로 그은 직선 l이 y축과 만나는 점을 A, 점 C(6, 0)을 지나고 y축과 평행하게 그은 직선과의 교점을 B라 하자. 사다리꼴 OABC의 넓이가 곡선 $f(x)=x^3-6x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같을 때, 임의의 직선 l은 항상 일정한 점 D를 지난다. 이 때, △ODC의 넓이를 구하시오. (단, $\overline{AB}$는 $\overline{OC}$ 아래에 있다.)



04 수2 09 정적분의 활용

03 속도와 거리

01 속도와 거리1 (위치, 위치조건)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 10월 19

92. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P는 점 A(5)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 $3t^2-2$이고, 점 Q는 점 B(k)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 1이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 2번 만나도록 하는 정수 k의 값은? (단, $k \neq 5$)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 20

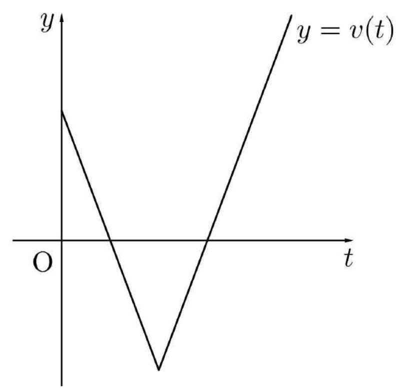
93. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도는

$$v(t) = |at-b|-4 \quad (a>0,\ b>4)$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 $s(k)$, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량을 $x(k)$라 할 때, 두 함수 $s(k)$, $x(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq k < 3$이면 $s(k)-x(k) < 8$이다.
(나) $k \geq 3$이면 $s(k)-x(k) = 8$이다.

시간 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)



04 수2 09 정적분의 활용

03 속도와 거리

02 속도와 거리2 (속도, 가속도 조건)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 14

94. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t)=3t^2-12t+9\ (t \ge 0)$$

이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 구간 $(3, \infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ. $k=-4$이면 구간 $(0, \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 09 정적분의 활용

03 속도와 거리

03 속도와 거리3 (이동거리)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 17

95. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0 \le t \le 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \le t < 1) \\ -2t+6 & (1 \le t < 3) \\ t-3 & (3 \le t \le 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$인 실수 x에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[준킬러][수학2] 4적분

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

96. 원점에서 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면

$$f(t)=t^2+t,\ g(t)=5t$$

이다. 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만날 때까지 점 P가 움직인 거리는?

① 82 ② 84 ③ 86
④ 88 ⑤ 90

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 11

97. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t,\ v_2(t)=2t$$

이다. 두 점 P, Q가 시각 $t=a(a>0)$에서 만날 때, 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 14

98. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-6t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=2$에서 점 P가 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 -4이다.
ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 14

99. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 09 정적분의 활용

03 속도와 거리

05 속도와 거리5 (실생활)

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

100. 동일한 직선도로 위를 같은 방향으로 달리는 두 자동차 A와 B가 있다. 자동차 A가 매시 72 km의 속력으로 달리고 있던 중 P지점에 이르렀을 때, P지점에서 100 m 앞에 정지하고 있던 자동차 B를 발견하고 제동장치를 작동하여 $-5\ \text{m/초}^2$의 가속도로 운행하였다. A가 제동장치를 작동한지 4초가 되는 순간에 정지하고 있던 B는 $6\ \text{m/초}^2$의 가속도로 출발하였고, 동시에 A는 $10\ \text{m/초}^2$의 가속도로 계속하여 운행하였다. 이 때, P지점에서 A가 B를 추월하는 지점까지의 거리는 몇 m 인지를 구하시오.

[준킬러][수학2] 4적분(빠른 정답)

준킬러수2 2023.01.06

1. [정답] ④
2. [정답] ⑤
3. [정답] ②
4. [정답] ①
5. [정답] ②

6. [정답] 46
7. [정답] 28
8. [정답] **12**
9. [정답] ⑤
10. [정답] ③

12.[정답] **45**
13. [정답] 10.67
14. [정답] 18
15. [정답] ②

16. [정답] **27**
17. [정답] 71
18. [정답] 13
19. [정답] 17
20. [정답] 19

21. [정답] 9
22. [정답] 167
23. [정답] ⑤
24. [정답] ②
25. [정답] ①

26. [정답] ②
27. [정답] ②
28. [정답] ⑤
29. [정답] ②
30. [정답] ⑤

31. [정답] 16
32. [정답] ⑤
33. [정답] 25
34. [정답] ①
35. [정답] ①
36. [정답] 102
37. [정답] ③
38. [정답] ②
39. [정답] 50
40. [정답] ④

41. [정답] 57
42. [정답] ④
43. [정답] ⑤
44. [정답] ③
45. [정답] ②

46. [정답] ②
47. [정답] ④
48. [정답] **8**
49. [정답] **43**
50. [정답] ②

51. [정답] ②
52. [정답] ⑤
53. [정답] 27
54. [정답] ⑤
55. [정답] ⑤

56. [정답] ①
57. [정답] ②
58. [정답] ②
59. [정답] 110
60. [정답] ⑤

61. [정답] 8
62. [정답] ⑤
63. [정답] ⑤
64. [정답] ②
65. [정답] 10

66. [정답] ③
67. [정답] ③
68. [정답] ④
69. [정답] ④
70. [정답] ⑤

71. [정답] ②
72. [정답] ⑤
73. [정답] ⑤

74. [정답] ②
75. [정답] ⑤

76. [정답] ⑤
77. [정답] ④
78. [정답] 140
79. [정답] 15
80. [정답] ④

81. [정답] ⑤
82. [정답] 35
83. [정답] ④
84. [정답] 2
85. [정답] ①

86. [정답] ④
87. [정답] **32**
88. [정답] ①
89. [정답] **290**
90. [정답] 13

91. [정답] 54
92. [정답] ②
93. [정답] 14
94. [정답] ④
95. [정답] ①

96. [정답] ⑤
97. [정답] ②
98. [정답] ⑤
99. [정답] ③
100. [정답] 190

[준킬러][수학2] 4적분(해설)

준킬러수2 2023.01.06

1) [정답] ④

[해설]

$F_n(x)=\int \frac{x^{3n}-1}{x^2+x+1}dx$에서

$\frac{x^{3n}-1}{x^2+x+1}=\frac{(x-1)(x^3-1)(x^{3(n-1)}+x^{3(n-2)}+\cdots+x^3+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{1}{3n-1}x^{3n-1}-\frac{1}{3n-2}x^{3n-2}+\frac{1}{3n-4}x^{3n-4}-\frac{1}{3n-5}x^{3n-5}$

$+\cdots+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x+C$ …… ①

주어진 조건

$F_n(1)=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-5}+\cdots+\frac{1}{2}-1$

로 부터 적분상수 $C=0$이다. 따라서 $F_n(0)=0$이다.

2) [정답] ⑤

[해설]

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=0$에서 $g(0)=1,\ g'(0)=0$

$f(1+0)=f(1)g(0)+f(0)g(1)$에서 $f(0)g(1)=0$

$g(1+0)=g(1)g(0)+f(1)f(0)$에서 $f(1)f(0)=0$

$f(1)=1$이므로 $f(0)=0$

ㄱ. $f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}$

$=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)g(y)+f(y)g(x)-f(x)}{y}$

$=\lim_{y\to 0}f(x)\frac{g(y)-1}{y}+\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}g(x)$

$=f'(0)g(x)$ …… ㉠

추가로

$g'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{g(x+y)-g(x)}{y}$

$=\lim_{y\to 0}\frac{g(x)g(y)+f(y)f(x)-g(x)}{y}$

$=\lim_{y\to 0}g(x)\frac{g(y)-1}{y}+\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}f(x)$

$=f'(0)f(x)$ …… ㉡

ㄷ. ㉠, ㉡ 에서

$f'(0)=\frac{g'(x)}{f(x)}=\frac{f'(x)}{g(x)}$

정리하면

$2g(x)g'(x)-2f(x)f'(x)=0$

적분하면

$\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=1\ (\because g(0)=1,\ f(0)=0)$

ㄴ. ㄷ에서 $\{g(x)\}^2=1+\{f(x)\}^2\geq 1$이므로 $x=0$를 포함하는 열린구간에서 $0<g(x)\leq 1$인 점이 없다. 따라서 이 열린구간에서 $g(x)\geq 1=g(0)$이므로 $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.

3) [정답] ②

[해설]

주어진 항등식의 우변에 $3xy(x-y)$ 으로부터

$f(x)=-x^3+kx$이다. 따라서 $f'(x)=-3x^2+k$

$f'(2)=-12+k=0,\ f(2)=-8+2k=a,\ k=12,\ a=16$

$f'(0)=k=b,\ b=12 \therefore a-b=16-12=4$

4) [정답] ①

[해설]

함수 $f'(x)$는 삼차함수이고

$f'(0)=f'(\sqrt{2})=f'(-\sqrt{2})=0$ 이므로

$f'(x)=kx(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$=kx(x^2-2)$

$=kx^3-2kx$ (단, k는 상수)

$f(x)=\frac{k}{4}x^4-kx^2+C$ (단, C는 적분상수)

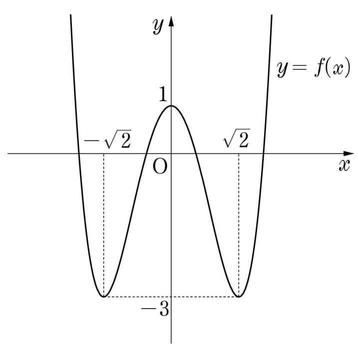
$f(0)=C=1$

$f(\sqrt{2})=k-2k+C=-k+1=-3$

이므로 $k=4$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+1$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(-2)=f(2)=1>0$,

$f(-1)=f(1)=-2<0$

이므로

$f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수는 -2, -1, 0, 1이다.

따라서 $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 모든 정수 m의 값의 합은 -2

5) [정답] ②

[해설]
조건 (나)에서 $f'(x)=ax(x-1)(x-3)$ $(a<0)$이라 하면
조건 (가)에서 $f'(4)=-24$이므로
$f'(4)=12a=-24$에서 $a=-2$
따라서 $f'(x)=-2x(x-1)(x-3)=-2x^3+8x^2-6x$이므로

$f(x)=-\frac{1}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3-3x^2+2$ ($\because f(0)=2$)

$\therefore f(2)=\frac{10}{3}$

6) [정답] 46

[해설]

나눗셈 정리를 이용하면

$P(x)=(x-1)^3Q(x)+8 \cdots (1)$

$=(x+1)^3R(x)-8 \cdots (2)$

양변을 x에 관하여 미분하면

$P'(x)=3(x-1)^2Q(x)+(x-1)^3Q'(x)$

$=(x-1)^2\{3Q(x)+(x-1)Q'(x)\}$

$=3(x+1)^2R(x)+(x+1)^3R'(x)$

$=(x+1)^2\{3R(x)+(x+1)R'(x)\}$

따라서

$P'(x)=a(x-1)^2(x+1)^2=a(x^2-1)^2 \cdots (3)$

이 식을 x에 관하여 적분하면

$P(x)=\frac{1}{5}ax^5-\frac{2}{3}ax^3+ax+C \cdots (4)$

식 (1)과 식 (2)에서 $P(1)=8$, $P(-1)=-8$ 이므로 식 (4)로부터

$P(1)=\frac{1}{5}a-\frac{2}{3}a+a+C=\frac{8}{15}a+C=8 \cdots (5)$

$P(-1)=-\frac{1}{5}a+\frac{2}{3}a-a+C=-\frac{8}{5}a+C=-8 \cdots (6)$

식 (5)와 (6)을 연립하여 풀면 $a=15$, $C=0$ 이다.

따라서

$P(x)=3x^5-10x^3+15x$

$\therefore P(2)=3\cdot 2^5-10\cdot 2^3+15\cdot 2$

$=96-80+30=46$

7) [정답] 28

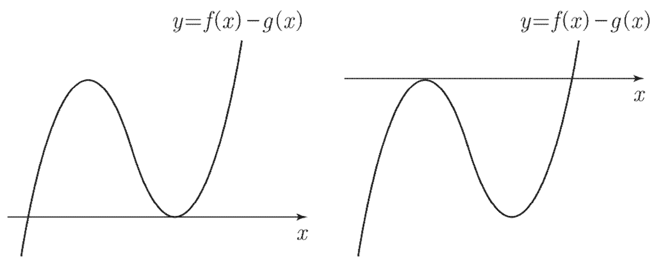
[해설]

$f'(x)-g'(x)=6x^2-2x$이므로

$f(x)-g(x)=2x^3-x^2+C$이다.

$y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(x)-g(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $f(x)-g(x)$의 (극솟값)$=0$또는 (극댓값)$=0$이어야 한다.



$f'(x)-g'(x)=2x(3x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{3}$이므로

$f(0)-g(0)=C=0$

또는 $f\left(\frac{1}{3}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}-\frac{1}{9}+C=0$

$\therefore C=0$ 또는 $C=\frac{1}{27}$

$\therefore \frac{q}{p}=0+\frac{1}{27}=\frac{1}{27}$

$\therefore p=27$, $q=1$, $p+q=28$

8) [정답] **12**

[해설]

$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^4+C$ 에서 $M=f(1)=C$

$f'(0)=-1,\ f'(2)=1$

$x=0$에서의 접선은 $y=-x+\frac{1}{4}+C$

$x=2$에서의 접선은 $y=(x-2)+\frac{1}{4}+C$

$-x+\frac{1}{4}+C=x-2+\frac{1}{4}+C$ 에서 $x=1$이므로

$N=C-\frac{3}{4}$

$\therefore\ 16(M-N)=12$

9) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=x(x-\alpha)^2$이고, $g'(x)=(xf(x))'$이므로

$g(x)=xf(x)+C,\ g(x)=x^2(x-\alpha)^2+C$

$g'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

$y=g(x)$는 $x=0,\ x=\alpha$에서 극솟값, $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을

갖는다. $g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=81,\ g(0)=g(\alpha)=0$

이를 이용하여 α와 $g(x)$를 구하면 $\alpha=6,\ g(x)=x^2(x-6)^2$

$\therefore g\left(\frac{\alpha}{3}\right)=g(2)=64$

<별해>

함수 $f(x)$를 구하면 $f(x)=x(x-\alpha)^2$이므로,

$f'(x)=(x-\alpha)^2+2x(x-\alpha),\ g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(x)=4x^3-6\alpha x^2+2\alpha^2x=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

$y=g(x)$는 $x=0,\ x=\alpha$에서 극솟값, $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을

갖는다. $g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=81,\ g(0)=g(\alpha)=0$

이를 이용하여 α와 $g(x)$를 구하면 $\alpha=6,\ g(x)=x^2(x-6)^2$

$\therefore g\left(\frac{\alpha}{3}\right)=g(2)=64$

10) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $f(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)\ (a<0)$라 하자.

$1<x<2$일 때, $f(x)>0$

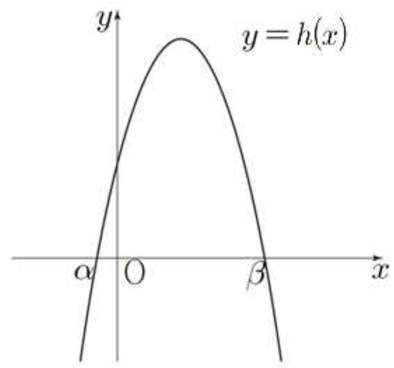
$\int_1^2 f(x)dx>0 \therefore$ (참)

ㄴ. $h(x)=f'(x)=a(3x^2-4x-1)$

$h(0)=-a>0 \therefore$ (거짓)

ㄷ. 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 두 실근을

$\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하자.



$\int_m^n h(x)dx$의 값이 최대가 되려면

닫힌 구간 $[m,n]$이 $h(x)\geq 0$를 만족시키는

구간과 일치하여야 하므로 $m=\alpha,\ n=\beta$

$\therefore m+n=\alpha+\beta=\frac{4}{3} \therefore$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

11)

12)[정답] 45

[해설]

$f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx\ (a\neq 0)$라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\int_0^2 |f(x)|dx=4,\ \int_0^2 f(x)dx=-4$

이므로 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)\leq 0$이다.

또한, 조건 (나)에 의하여

$\int_2^3 |f(x)|dx=\int_2^3 f(x)dx$

이므로 구간 $[2,\ 3]$에서 $f(x)\geq 0$이다.

따라서 $f(2)=0$이므로

$f(2)=4a+2b=0$

$\therefore\ b=-2a$

즉, $f(x)=ax^2-2ax$ 이므로

$$\int_0^2(ax^2-2ax)dx=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}a-4a=-\frac{4}{3}a=-4$$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-6x$ 이므로

$f(5)=3\times5^2-6\times5=75-30=45$

13) [정답] 10.67

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}32x & (0\le x\le1)\\ -32x+64 & (1\le x\le2)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-2x+1 & \left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3} & \left(\frac{1}{2}\le x\le2\right)\end{cases}$$

(ⅰ) $0\le x\le\frac{1}{2}$일 때,

$f(g(x))=f(-2x+1)=32(-2x+1)=-64x+32$

(ⅱ) $\frac{1}{2}\le x\le2$일 때,

$$f(g(x))=f\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)=32\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{3}x-\frac{32}{3}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^2f(g(x))dx$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}(-64x+32)dx+\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{64}{3}x-\frac{32}{3}\right)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left[-32x^2+32x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{32}{3}x^2-\frac{32}{3}x\right]_{\frac{1}{2}}^2\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(8+24)=\frac{32}{3}=10.666\cdots\cdots$$

$\therefore\ 10.67$

14) [정답] 18

[해설]

$f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(1)=h(y)$

$f(1)=1$이고 위 식은 모든 실수 y에 대하여 성립해야하므로

$h(x)$는 상수함수이다. $\therefore\ h(x)=1$

따라서 ㉠의 식은 $f(xy+1)=xg(y)+1$ …… ㉡

㉡의 양변에 $y=1$을 대입하면 $f(x+1)=xg(1)+1$

$g(1)=2$이므로 $f(x+1)=2x+1$ $\therefore\ f(x)=2x-1$ …… ㉢

따라서 $f(x+1)=2(xy+1)-1=2xy+1$이므로

㉡에서 $2xy+1=xg(y)+1$

따라서 $g(y)=2y$ 즉, $g(x)=2x$이다.

$\therefore\ f(x)+g(x)+h(x)=4x$

$$\therefore\ \int_0^3\{f(x)+g(x)+h(x)\}dx=\int_0^3 4xdx=\left[2x^2\right]_0^3=18$$

[별해]

$f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)\cdots$ ㉠

(1) ㉠에 $x=0$ 을 대입하면

$f(1)=h(y)$; $h(y)=1$ $\therefore\ h(x)=1$

(2) $h(x)=1$ 이므로 ㉠에서 $f(xy+1)=xg(y)+1\cdots$ ㉡

㉡에 $y=1$ 을 대입하면 $f(x+1)=xg(1)+1=2x+1$

$\therefore$ x 대신 $x-1$ 을 대입하면 $f(x)=2(x-1)+1=2x-1$

이 때, ㉡에서

$2(xy+1)-1=xg(y)+1$; $2xy=xg(y)$; $g(y)=2y$

$\therefore\ g(x)=2x$

$$\therefore\ \int_0^3\{f(x)+g(x)+h(x)\}dx$$

$$=\int_0^3\{(2x-1)+2x+1\}dx$$

$$=\int_0^3 4xdx=\left[2x^2\right]_0^3=2\cdot3^2=18$$

15) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로

$$g(x)=\begin{cases}3ax^2+2bx+c & (x<1)\\ 3p(x-2)^2+2q(x-2)+r & (x\ge1)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}6ax+2b & (x<1)\\ 6p(x-2)+2q & (x\ge1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속일 조건으로부터

$a+b+c+1=1$, $-p+q-r+5=1$

$\therefore\ a+b+c=0$ …… ㉠,

$p-q+r=4$ …… ㉡

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분 가능할 조건으로부터

$3a+2b+c=3p-2q+r$ …… ㉢

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분 가능할 조건으로부터

$6a+2b=-6p+2q$ …… ㉣

$g'(0)=g'(2)=0$인 조건으로부터

$2b=2q=0$

$\therefore\ b=q=0$ …… ㉤

㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤에서

$a=1,\ b=0,\ c=-1$

$p=-1,\ q=0,\ r=5$

$\therefore\ \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^3-x+1)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$

$=\frac{3}{4}$

16) [정답] 27

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수) 라 하면

조건 (가)에 의하여 $c=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 에서

조건 (나)에 의하여 $a=-6$

$f'(x)=3x^2-12x+b$

$=3(x-2)^2+b-12$

조건 (다)에 의하여 $b\geq 9$ 이고

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(x^3-6x^2+bx)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^3$

$=-\frac{135}{4}+\frac{9b}{2}\geq\frac{27}{4}$ ($\because\ b\geq 9$)

$b=9$일 때, 최솟값 $m=\frac{27}{4}$

따라서 $4m=27$

17) [정답] 71

[해설]

$\int_1^{10}f(x)dx=\int_0^{10}f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$

$+\int_6^8 f(x)dx+\int_8^{10}f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$

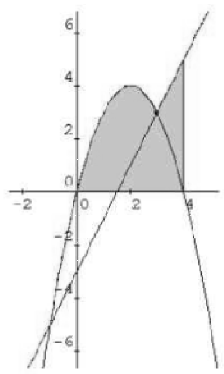
$=5\times 4-\int_0^1(x^3-6x^2+8x)dx$

$=20-\frac{9}{4}=\frac{71}{4}$

따라서 $4\int_1^{10}f(x)dx=71$

18) [정답] 13

[해설]



$f(x)=f(x)(f(x)>=g(x))$
$g(x)(f(x)<g(x))$
3이 극솟값이면 그림과 같이 직선 $g(x)=2x-a$는 점 $(3,\ 3)$을 지난다
따라서 $a=-3$

$\int_0^4 h(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x)dx+\int_3^4(2x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^3+\left[x^2-3x\right]_3^4$

$=13$

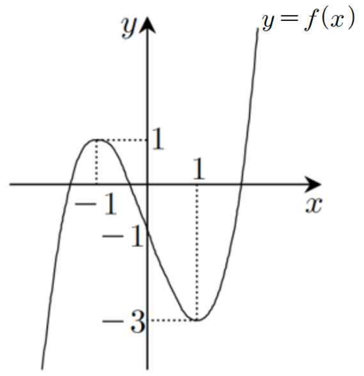
19) [정답] 17

[해설]

$f(x)=x^3-3x-1$에서 $f'(x)=3x^2-3$

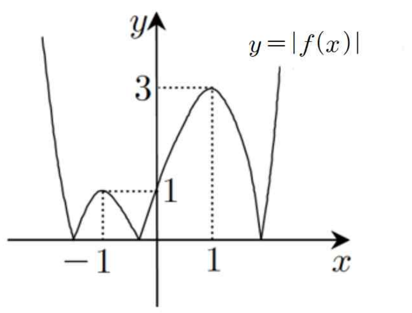
따라서 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은 ± 1이다.

이때, $f(1)=-3$, $f(-1)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[그림1]

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

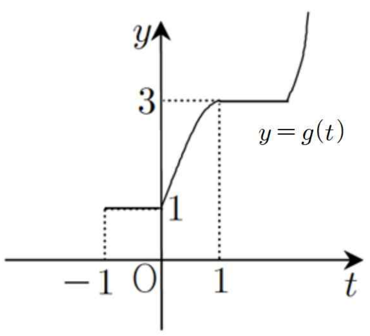


[그림2]

따라서 $-1 \leqq x \leqq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값 $g(t)$는 구간 $[-1,1]$에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (-1 \leqq t \leqq 0) \\ -t^3+3t+1 & (0 \leqq t \leqq 1) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



[그림3]

$$\therefore \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \int_{-1}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)dt$$

$$=\int_{-1}^{0} 1dt + \int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)dt = [t]_{-1}^{0} + [-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t]_0^1$$

$$=1+(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1)=\frac{13}{4} \quad \therefore p+q=4+13=17$$

20) [정답] 19

[해설]

절댓값을 풀면

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-2t & (x<t) \\ x^2-2x+2t & (x \geq t) \end{cases}$$

$$f(x)\text{의 최댓값}= g(t)=\begin{cases} 2t+3 & (t<-1) \\ t^2 & (-1 \leq t \leq 1) \\ 3-2t & (1<t) \end{cases}$$

따라서 $\int_0^{\frac{3}{2}} g(t)dt = \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^{\frac{3}{2}}(3-2t)\,dt = \frac{7}{12}$

그러므로 $p+q=19$

21) [정답] 9

[해설]

ⅰ) $x<1$일 때, $\int_0^x(-t+1)\,dt = x$이므로

$-\frac{x^2}{2}+x=x \therefore x=0$

ⅱ) $x \geq 1$일 때,

$$\int_0^1(-t+1)\,dt + \int_1^x(t-1)\,dt = x$$

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)=x \Leftrightarrow x^2-4x+2=0$$

$\therefore x=2+\sqrt{2}(\because x \geq 1)$

ⅰ), ⅱ)에 의해 양수인 실근은 $x=2+\sqrt{2}$ 이므로 $m=2$, $n=1$이다. 따라서 $m^3+n^3=9$

22) [정답] 167

[해설]

함수 $f(x)$가 점 (3, 7), (4, 8), (5, 10), (6, 13)을 지나고 $1 \leq f'(x) \leq 3$이므로

(1) 두 점 (3, 7), (4, 8)의 기울기가 1 이므로 $3 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x)=x+4$

(2) 두 점 (5, 10), (6, 13)의 기울기가 3 이므로 $5 \leq x \leq 6$ 에서 $f(x)=3x-5$

(3) 주어진 조건에 의해 (4, 8)과 (5, 10)을 지나는 함수는 이차함수이고

$f(x)=ax^2+bx+c,\quad f'(x)=2ax+b$

실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(4)=8a+b=1,\quad f'(5)=-10a+b=3$

$a=1,\ b=-7,\quad f(4)=8$에서 $c=20$

(1), (2), (3)에 의해

$$\int_3^6 f(x)dx=\int_3^4(x+4)dx+\int_4^5(x^2-7x+20)dx+\int_5^6(3x-5)dx$$

$=\dfrac{167}{6}$

$\therefore\ 6a=167$

23) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=4$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. 사차함수 $f(x)$는 구간 (a,t)에서 미분가능하고 구간 $[a,t]$에서 연속이므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'(c)$

인 c가 구간 (a,t)에 존재한다. 또한
사차함수 $f(x)$는 구간 (t,b)에서 미분가능하고
구간 $[t,b]$에서 연속이므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}=\dfrac{f(b)-f(t)}{b-t}=f'(d)$

인 d가 구간 (t,b)에 존재한다.
함수 $f'(x)$가 구간 (a,b)에서 감소하고
$a<c<t<d<b$이므로 $f'(c)>f'(d)$이다.
그러므로

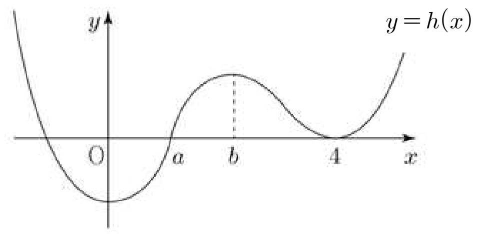
$\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'(c)>f'(d)=\dfrac{f(b)-f(t)}{b-t}$

이다. (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-f(a)$라 하자.
주어진 조건에 의하여 함수 $y=h(x)$는
$x=0,b,4$일 때 극값을 갖는다.

$0=\int_a^4 f'(x)dx=f(4)-f(a)$이므로 $h(4)=0$

함수 $h(x)$의 그래프의 모양은



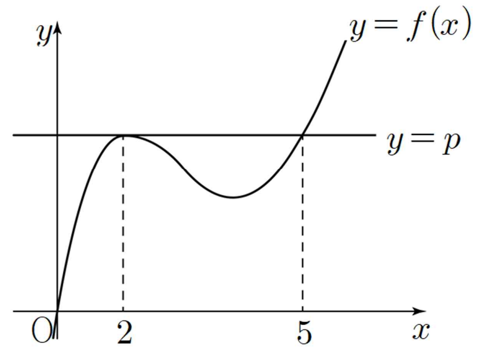
이므로 곡선 $y=h(x)$와 x축은 서로 다른 세 점에서 만난다.
그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$는 서로 다른 세 점에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

24) [정답] ②

[해설]

조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는
함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)-p=(x-2)^2(x-5)$

$f(0)=0$이므로 $p=20$

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+20=x^3-9x^2+24x$

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3-9x^2+24x)dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2\right]_0^2=28$

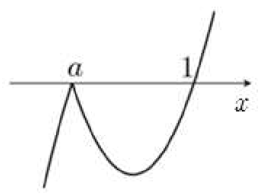
25) [정답] ①

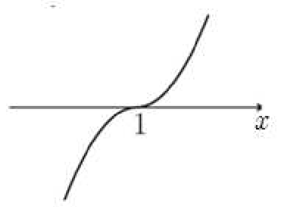
[해설]

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-a) & (x\ge a)\\-(x-1)(x-a) & (x<a)\end{cases}$$

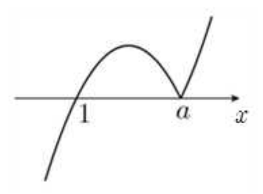
함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

(ⅰ) $a<1$일 때　　　　(ⅱ) $a=1$일 때





(ⅲ) $a>1$일 때

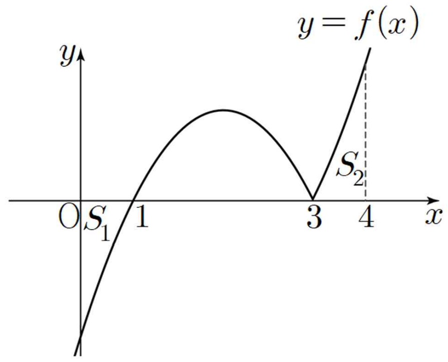


함수 $f(x)$의 극댓값이 1이므로 그래프의 개형은 (ⅲ)과 같아야 하고, 극댓값을 갖는 x의 값은 $\frac{a+1}{2}$

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right)=-\left(\frac{a+1}{2}-1\right)\left(\frac{a+1}{2}-a\right)=1$$

$\frac{(a-1)^2}{4}=1$, $a>1$이므로 $a=3$

그림과 같이 영역 S_1의 넓이와 영역 S_2의 넓이가 같으므로



$$\int_0^4 f(x)dx=\int_1^3\{-(x-1)(x-3)\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

26) [정답] ②

[해설]

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$

$$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$$

$$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

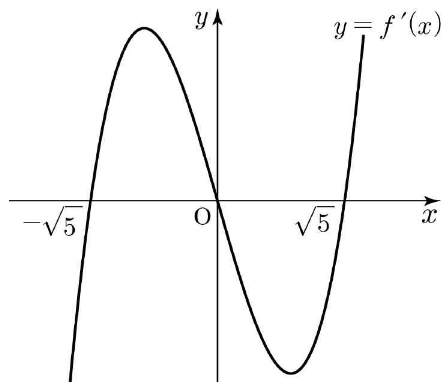
$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여

$$f(0)=9,\ C=9$$

조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$

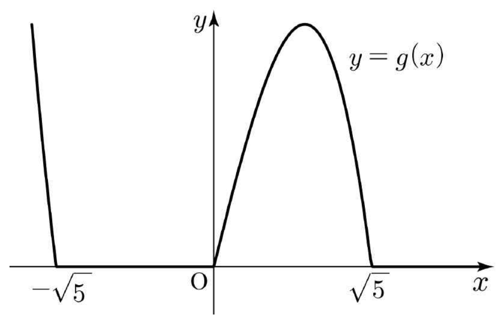
$$\alpha=-\sqrt{5}$$

함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$이므로

함수 $g(x)=\begin{cases}0 & (f'(x)\geq 0)\\ -2f'(x) & (f'(x)<0)\end{cases}$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_0^{10}g(x)dx=-2\int_0^{\sqrt{5}}f'(x)dx$$

$$=-2\left[f(x)\right]_0^{\sqrt{5}}$$

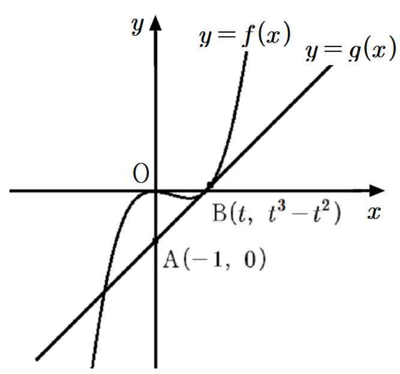
$$=-2\{f(\sqrt{5})-f(0)\}$$

$$=-2\times(-16-9)$$

$$=50$$

27) [정답] ②

[해설]



직선 AB의 기울기와 점 B에서의 접선의 기울기가 같음을 이용하여 t를 구하면

$$\frac{t^3-t^2+1}{t}=f'(t)=3t^2-2t$$

$$2t^3-t^2-1=(t-1)(2t^2+t+1)=0$$

$$\therefore t=1$$

즉, $p=1$이므로 $x^3-x^2=x-1$을 정리하면,

$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=-1$$

따라서 $m=-1$

28) [정답] ⑤

[해설]

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

$f'(0)=f'(2)=0$이므로 $f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$이다.

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=x^3-3x^2+C\ (C\text{ 는 적분상수})$$

따라서 $f(x)-f(0)=x^3-3x^2$이고

$$f(x+p)-f(p)$$
$$=(x+p)^3-3(x+p)^2+C-(p^3-3p^2+C)$$
$$=x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\le 0)\\ x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x & (x>0)\end{cases}$$

이다.

ㄱ. $p=1$이면

$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\le 0)\\ x^3-3x & (x>0)\end{cases}$이므로

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & (x<0)\\ 3x^2-3 & (x>0)\end{cases}$$

따라서 $g'(1)=3-3=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때 $\lim_{x\to 0-}g'(x)=\lim_{x\to 0-}(3x^2-6x)=0$

$$\lim_{x\to 0+}g'(x)=\lim_{x\to 0+}\{3x^2+2(3p-3)x+(3p^2-6p)\}$$
$$=3p^2-6p$$

이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$3p^2-6p=0$이어야 한다..

따라서 양수 p의 값은 $p=2$뿐이므로 양수 p의 개수는 1이다.

(참)

ㄷ. $\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2)dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{-1}^{0}$$
$$=0-\left(\frac{1}{4}+1\right)$$
$$=-\frac{5}{4}$$

이고,

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\{x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+(p-1)x^3+\frac{3p^2-6p}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}+(p-1)+\frac{3p^2-6p}{2}$$
$$=\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

이므로

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$$
$$=\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$
$$=\frac{3}{2}p^2-2p-2$$
$$=\frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

따라서 $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1}g(x)dx\ge 0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

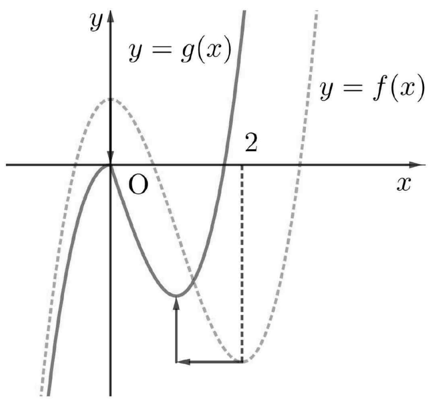
[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고

$f'(0)=f'(2)=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=2$에서 극소이다.

이때, 곡선 $=f(x)-f(0)$은 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-f(0)$만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=f(x+p)-f(p)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)-f(0)$, $y=f(x+p)-f(p)$는 모두 원점을 지나고 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $g'(1)=0$이다. (참)

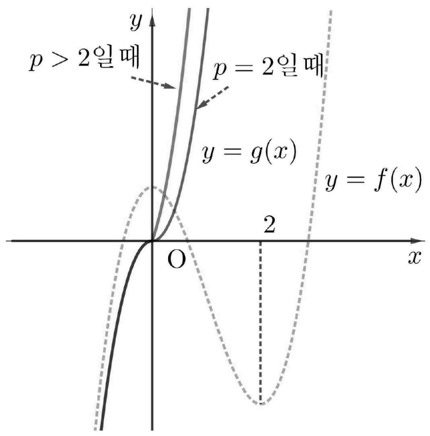
ㄴ. $\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = g(0) = 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때 $\lim_{x\to 0-} g'(x) = \lim_{x\to 0-}(3x^2-6x) = 0$이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $\lim_{x\to 0+} g'(x) = 0$이어야 한다.

그런데 $f'(x)=0$인 양수 x의 값은 2뿐이므로 양수 p의 값은 2뿐이다. 따라서 양수 p의 개수는 1이다.

(참)

ㄷ. $p \ge 2$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$p=2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$

$p>2$일 때, 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)-f(p) \ge f(x+2)-f(2)$이므로

$\int_{-1}^{1} g(x)dx \ge 0$

따라서 $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \ge 0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

29) [정답] ②

[해설]

$f(x) = x^4 + bx^2 + 10$

$f'(x) = 4x^3 + 2bx$, $f'(1) = 4+2b$ 이므로

$-6 < 4+2b < -2$

$-10 < 2b < -6$

$-5 < b < -3$ 이므로 $b = -4$

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 10$

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

극솟값은 $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 6$

30) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(-x) = -f'(x)$ 이고 $f'(1)=0$

$f'(-1) = -f'(1) = 0$ (참)

ㄴ. $f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(0)=0$

$f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$

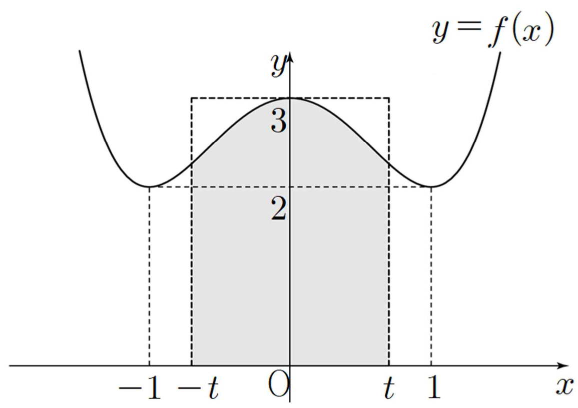
$f(x) = x^4 - 2x^2 + C$

$f(1) = 2$, $C=3$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

$f(-x) = f(x)$ 이므로

$\int_{-k}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{k} f(x)dx$ (참)



ㄷ. 함수 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ 의 그래프는 그림과 같다.

$x=-t$, $x=t$, x축, $y=f(x)$로

둘러싸인 영역의 넓이 $\int_{-t}^{t} f(x)dx$ 는

$x=-t$, $x=t$, x축, $y=3$으로

둘러싸인 직사각형의 넓이 $6t$ 보다 작다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

31) [정답] 16

[해설]

$f(x) = x(x-a)(x-6)$ $(0<a<6)$ $\cdots$ ㉠

$-f(x-k) = -(x-k)(x-k-a)(x-k-6)$ $\cdots$ ㉡

위의 두 함수의 그래프는 $x=4$에 대하여 대칭이므로

㉠에서 $f(8-x)=(8-x)(8-x-a)(2-x)$

$=-(x-2)(x+a-8)(x-8)$ ⋯ ㉢

㉡과 ㉢이 일치하므로 $k=2,\ a=3$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x(x-3)(x-6)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_0^2=16$$

[다른 풀이]

조건 (나)에서 $k=0$일 때에도 성립하므로

$\int_\alpha^\gamma 2f(x)dx=0,\ \int_\alpha^\gamma f(x)dx=0$ 에서 $\alpha=0,\ \beta=3,\ \gamma=6$

($\because$ 변곡점이 x축 위에 있어야 한다.)

$\therefore\ f(x)=x(x-3)(x-6)$

또, 문제의 그림에서 $x=k$와 $x=6$의 중점이 $x=4$이므로

$\frac{k+6}{2}=4 \qquad \therefore\ k=2$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_{-1}^1(x+1)(x-2)(x-5)dx$$

$$=2\int_0^1(-6x^2+10)dx=2\left[-2x^3+10x\right]_0^1=16$$

32) [정답] ⑤

[해설]

$f(-x)=-f(x),\ g(x)=-f(x)$이므로

ㄱ. $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$ (참)

ㄴ. $\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$

$=-\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$

$=-2\int_0^1 f(x)dx$

$=-2\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^1=\frac{7}{2}$ (참)

ㄷ. $h(x)=\int_0^x g(t)dt-\int_0^x f(t)dt-3$이라 하자.

$h(x)=-2\int_0^x f(t)dt-3$은 연속함수이다.

$h(0)=-3<0$

$h(1)=-2\int_0^1 f(t)dt-3=\frac{1}{2}>0$

사이값 정리에 의하여 $h(c)=0$인 실수 c가 0과 1 사이에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

33) [정답] 25

[해설]

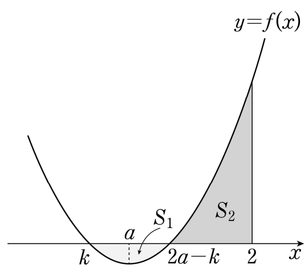
함수 $f(x)$는 이차함수이고 조건 (가)에서

$\int_0^t f(x)dx=\int_{2a-t}^{2a} f(x)dx$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

직선 $x=\frac{0+2a}{2}=a$에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에서 $0<\int_a^2 f(x)dx<\int_a^2|f(x)|dx$ 이므로

$a<2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(k,\ 0)$, $(2a-k,\ 0)$에서 만난다.



위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\int_k^a f(x)dx=\int_a^{2a-k} f(x)dx=-\frac{S_1}{2}$ 이므로

$$\int_a^2 f(x)dx=-\frac{S_1}{2}+S_2=2$$

$$\int_a^2|f(x)|dx=\frac{S_1}{2}+S_2=\frac{22}{9}$$

따라서 $S_1=\frac{4}{9},\ S_2=\frac{20}{9}$이다.

$$\int_k^2 f(x)dx=-S_1+S_2=\frac{16}{9}$$

$p=9,\ q=16$이므로 $p+q=25$

34) [정답] ①

[해설]

(가)로부터 $y=f(x)$는 $f(a)=0$이고,

점 $(a, f(a))$에 대하여 대칭인 곡선이다.

(나)에서 $f(a)=f(0)=f(2a)=0$이므로

$f(x)=x(x-a)(x-2a)=(x-a)^3-a^2(x-a)$

(다)에서 $\int_0^a f(x)dx=\left[\frac{1}{4}(x-a)^4-\frac{a^2}{2}(x-a)^2\right]_0^a=\frac{a^4}{4}=144$

$\therefore a=2\sqrt{6}$

35) [정답] ①

[해설]

곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-a}^a f(x)dx=13$에서

$2\int_0^a f(x)dx=13$

$\therefore \int_0^a f(x)dx=\frac{13}{2}$

한편,

$\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\times(3+1)\times1$

$=2$

이고, $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_0^3 f(x)dx=\int_3^6 f(x)dx=\int_6^9 f(x)dx=2$

$\therefore \int_0^9 f(x)dx=6$

따라서 $\int_0^9 f(x)dx+\int_9^a f(x)dx=\frac{13}{2}$에서

$\int_9^a f(x)dx=\frac{1}{2}$

한편

$\int_9^{10} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$

이므로

$a=10$

36) [정답] 102

[해설]

$\int_{-3}^3 x^2f(x)dx=\int_{-3}^{-1} x^2f(x)dx+\int_{-1}^1 x^2f(x)dx+\int_1^3 x^2f(x)dx$

$=2\int_1^3 x^2f(x)dx+2=2\int_{-1}^1 (x+2)^2f(x+2)dx+2$

$=2\int_{-1}^1 (x+2)^2f(x)dx+2=102$

37) [정답] ③

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프 그리기

조건 (나)에서 $f(x+2)=f(x)+2$이고

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(2)=f(0)+2,\ 4a=2$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

이 때 $f(x)=\frac{1}{2}x^2(0\le x<2)$이고 실수 전체의 집합에서

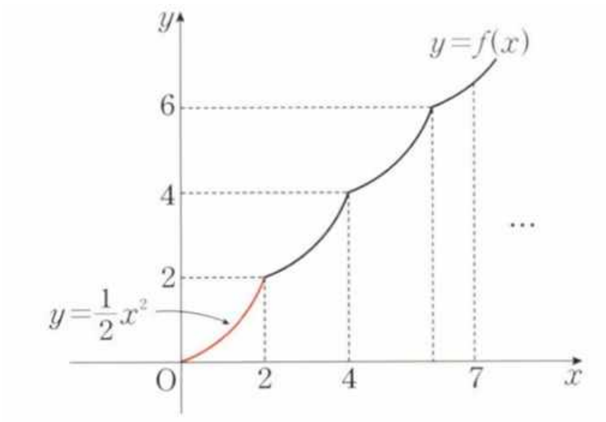
$f(x+2)=f(x)+2$

이 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

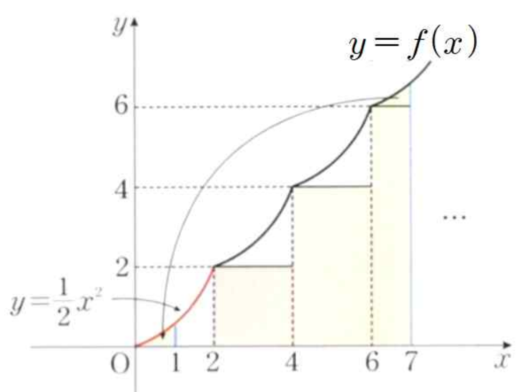
$x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$, 즉 $f(t)=f(t-2)+2$을 만족하므로

함수 $f(t)=\frac{1}{2}t^2(0\le t<2)$는 함수 $y=f(t)$을 x축으로 2만큼 ,

y축으로 2만큼 평행이동한 그래프와 일치하는 연속인 함수를 의미한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 $\int_1^7 f(x)dx$의 값 구하기



이 때 $\int_0^1 f(x)dx=\int_6^7\{f(x)-6\}dx$이므로

$\int_1^7 f(x)dx$의 값은

$=\int_0^6 f(x)dx+$(가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 6인 직사각형의 넓이)

$=3\int_0^2 \frac{1}{2}x^2dx+2\cdot 2+2\cdot 4+1\cdot 6$

$=3\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2+4+8+6$

$=4+18$

$=22$

38) [정답] ②

[해설]

함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$이므로

조건 (가)에서

$\int_{-1}^0 g(x)dx=\int_{-1}^0\{-f(x+1)+1\}dx=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$

$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$

$\int_{-1}^1 g(x)dx=\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$

조건 (나)에서

$g(x+2)=g(x)$이므로

$\int_{-3}^2 g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$

$=2\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_{-1}^0 g(x)dx$

$=2\times 1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$

39) [정답] 50

[해설]

1) 조건Ⅱ.에서 양변을 x에 관하여 미분하면

$f'(x)=\frac{1}{2}\{f(x+1)-f(x)\}-\frac{1}{2}\{f(x-1)-f(x)\}$

$=\frac{1}{2}\{f(x+1)-f(x-1)\}$

$\therefore\ f'(1)=\frac{1}{2}\{f(2)-f(0)\}$ ……… ①

2) 조건Ⅰ. 과 Ⅱ.에서 임의의 실수x, y에 대하여

$f(x+y)+f(x-y)=2\{f(x)+f(y)\}$ 가 성립하므로

ⅰ) $x=1,\ y=0$ 을 대입하면

$f(1)+f(1)=2\{f(1)+f(0)\}$ $\therefore\ f(0)=0$ …… ②

ⅱ) $x=1,\ y=1$ 을 대입하면

$f(2)+f(0)=2\{f(1)+f(1)\}$

$\therefore\ f(2)=4f(1)=100$ …… ③

①, ②, ③에서

$\therefore\ f'(1)=50$

40) [정답] ④

[해설]

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a+0=4a+2$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$0=3a+\int_{1}^{0}f(t)dt=3a-\int_{0}^{1}f(t)dt$$

$$\int_{0}^{1}f(t)dt=3a\cdots\cdots ㉢$$

$f(1)=\int_{0}^{1}f(t)dt$이므로 ㉡, ㉢에서

$4a+2=3a$

따라서 $a=-2$이고 $f(1)=-6$이다.

$xf(x)=2x^3-2x^2-6+\int_{1}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-4x+f(x)$

$xf'(x)=6x^2-4x$

$f'(x)=6x-4$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\int f'(x)dx \\ &=\int(6x-4)dx \\ &=3x^2-4x+C\text{(단, }C\text{는 적분상수)} \end{aligned}$$

$f(1)=3-4+C=-6$에서 $C=-5$

따라서 $f(x)=3x^2-4x-5$이므로

$a+f(3)=-2+10=8$

41) [정답] 57

[해설]

$f(x)=(x-1)^4(x+1)$에서

$f'(x)=4(x-1)^3(x+1)+(x-1)^4=(x-1)^3(5x+3)$

$f''(x)=3(x-1)^2(5x+3)+5(x-1)^3=(x-1)^2(20x+4)$

이차함수 $g(x)=ax^2+bx+c$라하고

$$\begin{aligned} f(x)&=g(x)+\int_{0}^{x}(x-t)^2h(t)dt \\ &=g(x)+x^2\int_{0}^{x}h(t)dt-2x\int_{0}^{x}th(t)dt+\int_{0}^{x}t^2h(t)dt \end{aligned}$$

$x=0$을 대입하면, $f(0)=g(0)$, $\therefore\ c=1$

이제 양변을 미분하면

$(x-1)^3(5x+3)$

$$=2ax+b+2x\int_{0}^{x}h(t)dt+x^2h(x)-2\int_{0}^{x}th(t)dt-2x^2h(x)+x^2h(x)$$

$$=2ax+b+2x\int_{0}^{x}h(t)dt-2\int_{0}^{x}th(t)dt$$

$x=0$을 대입하면, $-3=b$

또 양변을 미분하면

$(x-1)^2(20x+4)$

$$=2a+2\int_{0}^{x}h(t)dt+2xh(x)-2xh(x)$$

$$=2a+2\int_{0}^{x}h(t)dt$$

$x=0$을 대입하면, $4=2a$, $\therefore\ a=2$

또 양변을 미분하면

$12(x-1)(5x-1)=2h(x)$

그러므로

$g(x)=2x^2-3x+1$, $h(x)=6(x-1)(5x-1)$

$\therefore\ g(2)+h(2)=3+54=57$

42) [정답] ④

[해설]

$$\int_{0}^{x}(x-t)^2f'(t)dt$$

$$=x^2\int_{0}^{x}f'(t)dt-2x\int_{0}^{x}tf'(t)dt+\int_{0}^{x}t^2f'(t)dt$$

$$=\frac{3}{4}x^4-2x^3$$

양변을 x에 대하여 미분하기를 거듭하면

$$2\int_{0}^{x}f'(t)dt=9x^2-12x,\ 2(f(x)-f(0))=9x^2-12x$$

$$f(x)=\frac{9}{2}x^2-6x+1$$

$$\therefore\ \int_{0}^{1}f(x)dx=\left[\frac{3}{2}x^3-3x^2+x\right]_{0}^{1}=-\frac{1}{2}$$

43) [정답] ⑤

[해설]

$$f(x)=\int_{1}^{x}(x^2-t)\,dt=x^2\int_{1}^{x}dt-\int_{1}^{x}tdt$$

$$=x^2[t]_{1}^{x}-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{1}^{x}=x^2(x-1)-\frac{1}{2}(x^2-1)$$

$$=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

직선 $y=6x-k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 의 접점의 좌표를 $\mathrm{P}\left(t,\ t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)$라 놓으면 접선의 기울기가 6 이므로

$f'(t)=6$; $3t^2-3t=6$; $(t-2)(t+1)=0$

$\therefore\ t=2,\ -1\quad \therefore\ \mathrm{P}\left(2,\ \frac{5}{2}\right),\ \mathrm{P}(-1,\ -2)$

점 P 는 직선 위의 점이므로 $\mathrm{P}\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$ 일 때, $k=\frac{19}{2}$

$\mathrm{P}(-1,\ -2)$ 일 때, $k=-4$

$\therefore\ k>0$ 이므로 $k=\frac{19}{2}$

[별해]

$f(x)=\int_1^x (x^2-t)dt=\left[x^2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^x=x^2(x-1)-\frac{1}{2}(x^2-1)$

$=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\quad \therefore\ f'(x)=3x^2-3x$

$f'(x)=6$에서 $x^2-x-2=0\quad \therefore\ x=-1,\ 2$

$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-2$

$f(2)=8-6+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

이므로 함수 $f(x)$에 접하는 기울기가 6인 직선의 방정식은

$y=6(x+1)-2=6x+4$ 또는 $y=6(x-2)+\frac{5}{2}=6x-\frac{19}{2}$

이다. 따라서 양수 k의 값은 $\frac{19}{2}$이다.

44) [정답] ③

[해설]

조건 (가)로부터

$$\begin{aligned}&f(x)+x^2+2ax-3\\&=2f(x)-3x-\{2f(1)-3\}\\&=2f(x)-3x-2f(1)+3\\&\therefore f(x)=x^2+(2a+3)x+2f(1)-6\end{aligned}$$

위 식에서 $x=1$을 대입하면

$$\begin{aligned}&f(1)=1+2a+3+2f(1)-6\\&\therefore f(1)=-2a-2\\&\therefore\ f(x)=x^2+(2a+3)x-4a-2\end{aligned}$$

조건 (나)로부터

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(3+h)-f(3)}{h}-\frac{f(3-h)-f(3)}{h}\right]\\&=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right]\\&=f'(3)+f'(3)=2f'(3)\end{aligned}$$

$2f'(3)=6$이므로 $f'(3)=3$

$\therefore f'(x)=2x+2a+3$

즉, $f'(3)=2a+9=3$이므로 $a=-3$

45) [정답] ②

[해설]

$F'(x)=f(x)=x^3-3x+a$

$f'(x)=3x^2-3=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이므로

함수 $f(x)$는 $x=\pm1$에서 극값을 갖고,

$f(-1)=a+2,\ f(1)=a-2, f(0)=a$

이때, $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가져야 하므로 $F(x)$의 도함수 $f(x)$의 부호가 한 번만 바뀌어야 한다.

즉, 삼차함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 한 번만 만나거나

접해야 한다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호가 같거나 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 한다.

즉, $f(-1)\cdot f(1)\ge0,\ (2+a)(-2+a)\ge0$

$a\le-2$ 또는 $a\ge2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

46) [정답] ②

[해설]

함수 $f'(x)=(x-a)(x-b)$이고 (가)에서 $f(x)$가

$x=\frac{1}{2}$에서 극값을 가지므로 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $b=\frac{1}{2}$

$f(a)-f(b)=\int_0^a(t-a)(t-b)dt-\int_0^b(t-a)(t-b)dt$

$=\int_0^a(t-a)(t-b)dt+\int_b^0(t-a)(t-b)dt$

$=\int_b^a(t-a)(t-b)dt=-\frac{(a-b)^3}{6}=\frac{1}{6}$이므로 $b-a=1$

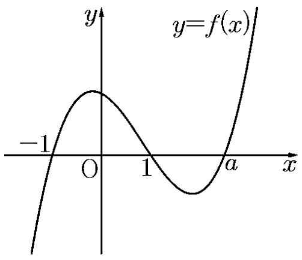
$b=\frac{1}{2}$이면 $a=-\frac{1}{2}$이므로 모순

따라서 $a=\frac{1}{2}$이고 $b=\frac{3}{2}$이므로 $a+b=2$

47) [정답] ④

[해설]

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$의 양변을 미분하면

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt-x^2f(x)+x^2f(x)$$

$=2x\int_0^x f(t)dt$

(ⅰ) $0<x<1$일 때,

$2x>0$, $\int_0^x f(t)dt>0$이므로 $g'(x)>0$

(ⅱ) $-1<x<0$일 때,

$2x<0$, $\int_0^x f(t)dt<0$이므로 $g'(x)>0$

따라서 $x=0$에서 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(ⅲ) $x<-1$인 경우

$\int_0^x f(t)dt$의 값이 $x<-1$인 어떤 점에서 $g'(x)$가 $-$에서 $+$으로 바뀌는 극솟값을 갖게 된다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $g(x)$가 극값을 1개 가지므로 $x>1$인 경우에 극값을 갖지 않아야 한다.

즉 $x>1$에서 항상 $\int_0^x f(t)dt\geq 0$이 성립해야 하므로 최대가 되는 a의 값은 $\int_0^1 f(x)dx=-\int_1^a f(x)dx$일 때이다.

즉, $\int_0^a f(x)dx=0$이 성립할 때 a가 최대가 된다.

$$\int_0^a f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a$$

$=\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^4-\frac{1}{2}a^2+a^2$

$=a^2(a^2-6)=0$

$\therefore a=0,\ -\sqrt{6},\ \sqrt{6}$

그런데 $a>1$이므로 $a=\sqrt{6}$

48) [정답] 8

[해설]

$$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$$
$$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$$

양변을 미분하면

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+f(x)\times\{f(x)\}^4-\{f(x)\}^5$$
$$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$$
$$=(3x^2-24x+45)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$$
$$=3(x-3)(x-5)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$$

$g'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $\int_a^x\{f(t)\}^4dt=0$

그런데 조건에서 극값이 오직 하나이므로 $g'(x)=0$의 근은 오직 하나이어야 한다.

즉, $\int_a^x\{f(t)\}^4dt=0$이 $x=3$ 또는 $x=5$를 반드시 근으로 가져야 한다. 즉, $\int_a^3\{f(t)\}^4dt=0$ 또는 $\int_a^5\{f(t)\}^4dt=0$가 성립해야 한다.

따라서 $a=3$ 또는 $a=5$

즉, 만족하는 모든 a값의 합은 8이다.

49) [정답] 43

[해설]

$0\leq a\leq 4$에서

$g(a)=\int_a^{a+4}f(x)dx$라 하자

(ⅰ) $a=0$일 때,

$g(0)=\int_0^4 f(x)dx$

$=\int_0^4\{-x(x-4)\}dx$

$=\int_0^4(-x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4$

$=-\frac{64}{3}+32=\frac{32}{3}$

(ii) $0<a<4$ 일 때,

$g(a)=\int_a^4 f(x)dx+\int_4^{a+4}f(x)dx$

$=\int_a^4\{-x(x-4)\}dx+\int_4^{a+4}(x-4)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4}$

$=\frac{32}{3}+\frac{1}{3}a^3-2a^2+\frac{1}{2}(a+4)^2-4(a+4)-(8-16)$

$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$

(iii) $a=4$ 일 때,

$g(a)=\int_4^8 f(x)dx$

$=\int_4^8(x-4)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^8$

$=32-32-(8-16)=8$

$0<a<4$ 에서

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$

이므로

$g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$

$g'(a)=0$에서

$0<a<4$ 이므로 $a=3$

함수 $g(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	$\frac{32}{3}$	↘	극소	↗	8

따라서 $g(a)$는 $a=3$에서 최솟값

$g(3)=\frac{1}{3}\times3^3-\frac{3}{2}\times3^2+\frac{32}{3}$

$=9-\frac{27}{2}+\frac{32}{3}$

$=\frac{54-81+64}{6}$

$=\frac{37}{6}$

을 가지므로 $p=6$, $q=37$

$p+q=43$

50) [정답] ②

[해설]

$g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\{2x-f(t)\}dt$

$=2x\int_{-1}^{x}f(t)dt-\int_{-1}^{x}\{f(t)\}^2dt$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2\int_{-1}^{x}f(t)dt+2xf(x)-\{f(x)\}^2$

(i) $x<-1$일 때,

$g'(x)=2\int_{-1}^{x}0dt+2x\cdot0-\{0\}^2=0$

(ii) $-1\le x<0$일 때,

$g'(x)=2\int_{-1}^{x}(1+t)dt+2x(1+x)-(1+x)^2$

$=\left[(1+t)^2\right]_{-1}^{x}+x^2-1$

$=(1+x)^2+x^2-1$

$=2x^2+2x$

$=2x(x+1)$

(iii) $0\le x<1$일 때,

$g'(x)=2\left\{\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_0^x(1-t)dt\right\}$

$+2x(1-x)-(1-x)^2$

$=1-\left[(1-t)^2\right]_0^x-3x^2+4x-1$

$=-(1-x)^2+1-3x^2+4x$

$=-4x^2+6x$

$=-2x(2x+3)$

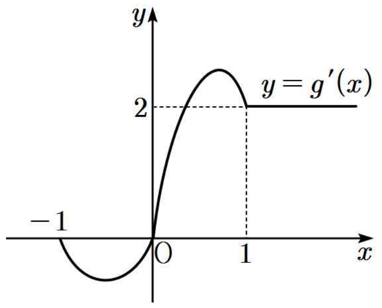
(iv) $x\ge1$일 때,

$g'(x)=2\left\{\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_0^1(1-t)dt+\int_1^x0dt\right\}$

$+2x\cdot0-(0)^2$

$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2$

따라서 $y=g'(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 $x=0$일 때, 극소이면서 최소가 되므로 최솟값은 $g(0)$이다.

$\therefore g(0)=2\cdot 0\cdot\int_{-1}^{0}(1+t)dt-\int_{-1}^{0}(1+t)^2dt$

$=0-\left[\frac{1}{3}(1+t)^3\right]_{-1}^{0}$

$=-\frac{1}{3}$

51) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$n-1\le x\le n$일 때,

$f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 또는

$f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$

열린구간 $(0, 4)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하고, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값 0를 가지므로

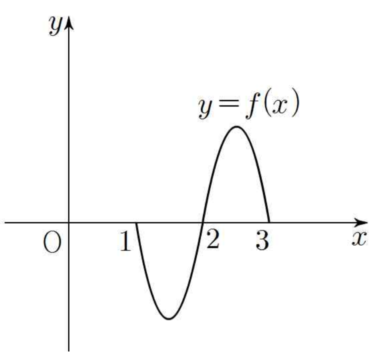
$g(2)=0,\ g'(2)=0$

$g(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^4 f(t)dt$에서

$g'(x)=2f(x)$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 $x=2$에서 극솟값을 가져야 한다.

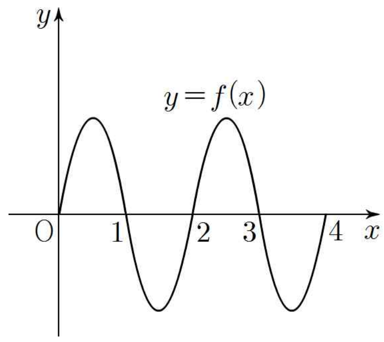
따라서 $1\le x<3$에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2)=\int_0^2 f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=0$에서

$\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$

따라서 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$+\int_3^4 f(x)dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$

$-\int_0^1 f(x)dx$

$=-\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\{-6x(x-1)\}dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x^2-6x)dx$

$=\left[2x^3-3x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}$

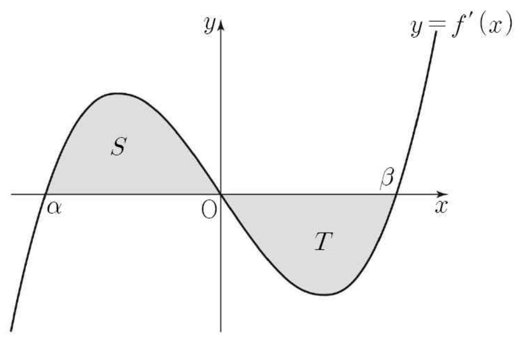
52) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.

$f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

(참)



ㄴ. $\alpha=-\beta$에 의하여

$$f'(x)=k(x-\beta)x(x+\beta)=kx^3-k\beta^2x\ (k>0)$$

$$f(x)=\frac{k}{4}x^4-\frac{k\beta^2}{2}x^2+C(\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

따라서 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로

$$f(-\beta)=f(\beta)$$

$$S=\int_{\alpha}^{0}|f'(x)|\,dx=\int_{-\beta}^{0}f'(x)\,dx=f(0)-f(-\beta)$$

$$T=\int_{0}^{\beta}|f'(x)|\,dx=\int_{0}^{\beta}\{-f'(x)\}\,dx$$

$=-f(\beta)+f(0)$

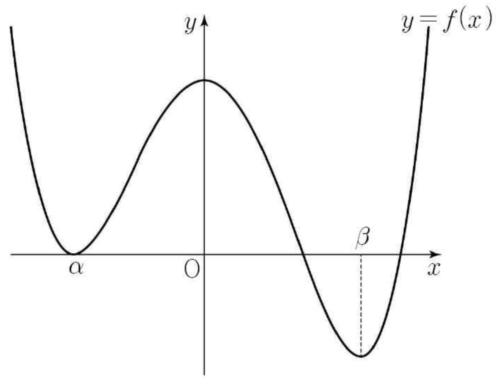
따라서 $S=T$ (참)

ㄷ. $S<T, f(\alpha)=0$이므로

$f(0)-f(\alpha)<-f(\beta)+f(0)$에서 $f(\beta)<0$

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극솟값, $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 양의 실근의 개수는 2 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

53) [정답] 27

[해설]

(가)에서 $f(x)g(x)=(x-1)(x+1)(x+3)$

(다)에서 $g'(x)=2f(x)$, $g(1)=0$이므로

$f(x)=x+1$, $g(x)=(x-1)(x+3)$ ($\because f'(x)=1$)

$$\therefore \int_0^3 3g(x)dx=\int_0^3 3(x^2+2x-3)dx=27$$

54) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. 조건 (가)에서 $f'(x)=ax(x-k)(a>0)$이라 하면

닫힌구간 $[0, k]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 $\int_0^k f'(x)dx<0$(참)

ㄴ. 조건 (나)에서 $\int_0^t |f'(x)|dx=f(t)+f(0)$의 양변을 t에 대하여 미분하면 $|f'(t)|=f'(t)t>1$인 모든 실수 t에 대하여 $|f'(t)|=f'(t)$가 성립하므로 $f'(t)\ge 0(t>1)$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가지므로. $0<k\le 1$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $0<k\le 1$이고 조건 (나)에서 $t>1$일 때,

$$\int_0^t|f'(x)|dx=-\int_0^k f'(x)dx+\int_k^t f'(x)dx$$

$$=-\Big[f(x)\Big]_0^k+\Big[f(x)\Big]_k^t$$

$$=-\{f(k)-f(0)\}+\{f(t)-f(k)\}$$

$$=-2f(k)+f(0)+f(t)=f(t)+f(0)$$

따라서 $f(k)=0$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

55) [정답] ⑤

[해설]

함수 $g(x)=\int_2^x (t-2)f'(t)dt$ 이므로

$g'(x)=(x-2)f'(x)$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서만 극값을 가지므로 상수 a에 대하여

$g'(x)=(x-2)\times ax(x-2)$

$f'(x)=ax(x-2)$ 이고

함수 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $a=3$

$f'(x)=3x(x-2)$

$$\text{따라서 } g(0)=\int_2^0 3t(t-2)^2dt=\left[\frac{3}{4}t^4-4t^3+6t^2\right]_2^0=-4$$

56) [정답] ①

[해설]

$P_2(x)=x^2+ax+b$라 하면

$$\int_{-1}^1 P_0(x)P_2(x)dx=\int_{-1}^1(x^2+ax+b)dx=\frac{2}{3}+2b=0$$

$$\int_{-1}^1 P_1(x)P_2(x)dx=\int_{-1}^1(x^3+ax^2+bx)dx=\frac{2}{3}a=0$$

$$\therefore\ a=0,\ b=-\frac{1}{3},\ P_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$$

$P_3(x)=x^3+cx^2+dx+e$라 하면

$\int_{-1}^{1}(x^3+cx^2+dx+e)dx=\frac{2}{3}c+2e=0,\quad \frac{1}{3}c+e=0$

$\int_{-1}^{1}(x^4+cx^3+dx^2+ex)dx=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}d=0,\quad d=-\frac{3}{5}$

$\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)(x^3+cx^2+dx+e)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^5+cx^4+dx^3+ex^2)dx-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^3+cx^2+dx+e)dx$

$=\frac{2}{5}c+\frac{2}{3}e=0$

$\int_0^1 P_3(x)dx=\int_0^1(x^3+cx^2+dx+e)dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}c+\frac{1}{2}d+e$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}d=\frac{1}{4}-\frac{3}{10}=-\frac{1}{20}$

57) [정답] ②

[해설]

$g'(x)=f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=-xf'(x)$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$는 이차항의 계수가 12인 이차함수이다.

그러므로 $g'(x)=-xf'(x)$에서 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 -12인 삼차함수이다.

또, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지고 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 가진다.

즉, $g'(3)=0$

그러므로 $f'(3)=0$에서 $g'(x)=-12x(x-3)(x-a)$

사차함수 $g(x)$가 오직 1개의 극값을 가지므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가질 수 없다.

즉, $a=0$

$g'(x)=-12x^2(x-3)=-12x^3+36x^2$

따라서 $\int_0^1 g'(x)dx=\left[-3x^4+12x^3\right]_0^1=9$

58) [정답] ②

[해설]

$g(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)$에서

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$g(0)=\int_0^0 f(t)dt+f(0)=0+f(0)$

$g'(0)=f(0)+f'(0)$

조건 (가)에 의해

$g(0)=f(0)=0$

$g'(0)=f(0)+f'(0)=0+f'(0)=0$이므로 $f'(0)=0$

그러므로 x^2은 $f(x)$의 인수이다.

$f(x)=x^2(x-k)$(단, k는 상수)라 하면

$g'(x)=x^3-kx^2+3x^2-2kx$

$=x^3+(3-k)x^2-2kx$

조건 (나)에 의해 모든 실수 x에 대하여

$g'(-x)=-g'(x)$가 성립한다.

즉, $-x^3+(3-k)x^2+2kx=-x^3-(3-k)x^2+2kx$,

$2(3-k)x^2=0$에서 $k=3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$

따라서 $f(2)=-4$

[다른 풀이]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의해 $f(0)=0$이므로 $c=0$,

$f'(0)=0$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=x^3+ax^2$

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$=x^3+ax^2+3x^2+2ax$

$=x^3+(a+3)x^2+2ax$

조건 (나)에 의해 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 x^2의 계수는 0이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$에서 $f(2)=8-12=-4$

59) [정답] 110

[해설]

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이므로

$b=1$

또, $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로 $0\le x\le 1$에서

$f(x+1)=xf(x)+ax+1=x^2+ax+1$

$x+1=t$로 치환하면

$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$

$=t^2+(a-2)t+2-a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=2t+(a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1)=1$이므로

$a=1$

따라서 ㉠에서 $1\le x\le 2$일 때 $f(x)=x^2-x+1$이다.

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2 - x + 1)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

즉, $60 \times \int_1^2 f(x)\,dx = 60 \times \frac{11}{6} = 110$

60) [정답] ⑤

[해설]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x) = x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)

라 하자.

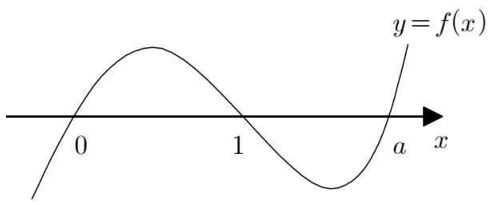
ㄱ. $g(0) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx = 0$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 |f(x)|dx$$

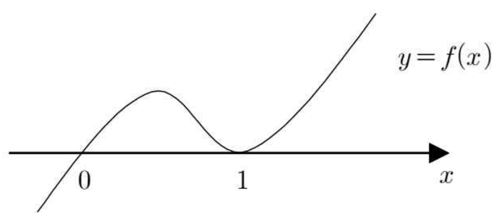
따라서 $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \ge 0$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(i) $a > 1$일 때



(ii) $a = 1$일 때



(i), (ii)에 의하여

$$\int_{-1}^0 f(x)dx < 0$$

이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx < 0$$

이다. (참)

ㄴ. $g(-1) > 0$이면 $0 \le x \le 1$일 때, $f(x) \le 0$이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$$
$$= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^1 f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^1 x(x-1)(x-a)dx$$
$$= \int_{-1}^1 \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\}dx$$
$$= 2\int_0^1 \{-(a+1)x^2\}dx$$
$$= 2\left[-\frac{a+1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= -\frac{2(a+1)}{3} > 0$$

즉, $a < -1$이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 $k < -1$인 실수 k가 존재한다. (참)

ㄷ. $g(-1) = -\frac{2(a+1)}{3} > 1$에서 $a < -\frac{5}{2}$

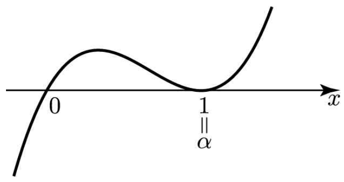
$0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$이므로

$$g(0) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$$
$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$
$$= 2\int_0^1 f(x)dx$$
$$= 2\int_0^1 \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\}dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}a - \frac{1}{6} < -1$$

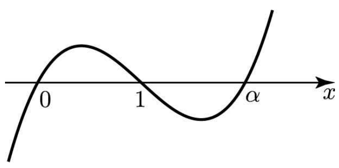
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=0$이므로 $f(x)\geq 0$이고 만족하는 경우는 [그림1]과 [그림2]와 같다.



[그림1]



[그림2]

따라서 $1\leq\alpha$이므로 $\int_{-1}^0 f(x)dx<0$이고,

$\int_0^1 f(x)dx>0$이다.

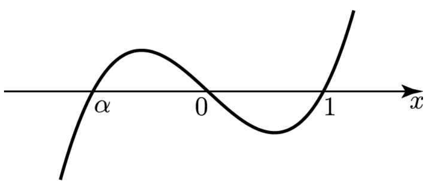
$$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$$

$$=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx<0$$

이다. (참)

ㄴ. $g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx>0$이면

$\int_{-1}^0 f(x)dx>0$이어야 하므로 만족하는 경우는 [그림3]과 같다.



[그림3]

$\int_{-1}^0 f(x)dx>\int_0^1|f(x)|dx$이므로 $\alpha<-1$이다.

따라서 $f(k)=0$인 $k=\alpha<-1$을 만족한다. (참)

ㄷ. $g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx>1$이므로

$f(x)=x(x-1)(x-k)=x^3-(k+1)x^2+kx$라 두면

$$\int_{-1}^0 f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_{-1}^0$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{k+1}{3}-\frac{k}{2}$$

$$\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1\{-f(x)\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{k+1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{k+1}{3}-\frac{k}{2}$$

이므로

$$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=-\frac{2k+2}{3}>1$$

즉, $2k+2<-3$이므로 $2k<-5$, $k<-\frac{5}{2}$

$$g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$$

$$=2\int_0^1 f(x)dx$$

$$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{k+1}{3}+\frac{k}{2}\right)=-\frac{1}{6}+\frac{k}{3}$$

$$<-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=-1$$

이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

61) [정답] 8

[해설]

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$$

$$=2x\int_0^x f(t)dt$$

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $h(0)=0$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x)=0$의 실근은 0과 3이므로

(i) $h(x)=ax^2(x-3)$(a는 상수)라 하면

$g'(x)=2ax^3(x-3)$이고 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=3$에서 극값을 가지므로 모순

(ii) $h(x)=ax(x-3)^2$(a는 상수)라 하면

$g'(x)=2ax^2(x-3)^2$이므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$$h'(x)=f(x)$$

$$=a(3x^2-12x+9)=3a(x-1)(x-3)$$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$

$f(x)=3(x-1)(x-3)$

따라서

$$\int_0^3|f(x)|dx$$

$$=3\int_0^3|(x-1)(x-3)|dx$$

$$=3\int_0^1(x-1)(x-3)dx-3\int_1^3(x-1)(x-3)dx$$

$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3$$

$$=3\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-3\left(9-18+9-\frac{1}{3}+2-3\right)=8$$

62) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(x)=x^2-4tx+3t^2=(x-t)(x-3t)$ (참)

ㄴ. $f(x)=\int_{3t}^{x}(s^2-4ts+3t^2)\,ds$

$$=\left[\frac{1}{3}s^3-2ts^2+3t^2s\right]_{3t}^{x}=\frac{1}{3}x^3-2tx^2+3t^2x$$

$$=\frac{1}{3}x(x-3t)^2$$

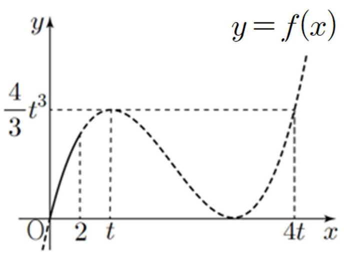
$f'(t)=0$, $f(t)=\frac{4}{3}t^3$이므로

$$f(x)-\frac{4}{3}t^3=\frac{1}{3}x(x^2-6tx+9t^2)-\frac{4}{3}t^3$$

$$=\frac{1}{3}(x-t)^2(x-4t)$$

$$f(t)=f(4t)=\frac{4}{3}t^3$$

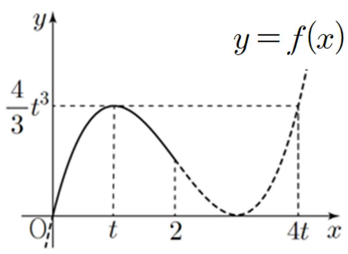
ⅰ) $t>2$일 때



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$$g(t)=f(2)=\frac{2}{3}(3t-2)^2$$

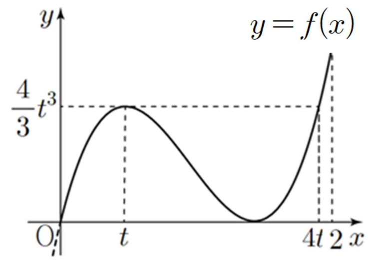
ⅱ) $t\le 2<4t$ 즉, $\frac{1}{2}<t\le 2$일 때



함수 $f(x)$는 $x=t$에서 최댓값을 가지므로

$$g(t)=f(t)=\frac{4}{3}t^3$$

ⅲ) $4t\le 2$ 즉, $0<t\le\frac{1}{2}$일 때



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$$g(t)=f(2)=\frac{2}{3}(3t-2)^2$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여

$t>2$일 때, $g(t)=\frac{2}{3}(3t-2)^2$ (참)

ㄷ. 함수

$$g(t)=\begin{cases}\frac{2}{3}(3t-2)^2 & \left(0<t\le\frac{1}{2}\right)\\ \frac{4}{3}t^3 & \left(\frac{1}{2}<t\le 2\right)\\ \frac{2}{3}(3t-2)^2 & (t>2)\end{cases}$$

의 미분가능성을 조사하면

ⅰ) $t=\frac{1}{2}$일 때,

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{\frac{2}{3}(3t-2)^2-\frac{1}{6}}{t-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{(2t-1)(6t-5)}{2t-1}=-2$$

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{6}}{t-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}\frac{(2t-1)(4t^2+2t+1)}{3(2t-1)}=1$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$에서 미분가능하지 않다.

ⅱ) $t=2$일 때,

$$\lim_{t\to 2-}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2-}\frac{\frac{4}{3}t^3-\frac{32}{3}}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to 2-}\frac{\frac{4}{3}(t^3-8)}{t-2}=\lim_{t\to 2-}\frac{4(t^2+2t+4)}{3}=16$$

$$\lim_{t\to2+}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{\frac{2}{3}(3t-2)^2-\frac{32}{3}}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to2+}\frac{2(t-2)(3t+2)}{t-2}=16$$

따라서 $t=2$에서 미분가능하다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $t>0$에서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서만 미분가능하지 않다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

63) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=6x^2-2(t+3)x+2t$이므로

$$f'(a)=6a^2-2(t+3)a+2t=0$$

$(6a-2t)(a-1)=0$에서 $a=\frac{t}{3}$, $a=1$

$$g(t)=\frac{a}{2}f(a)$$
$$=a^4-\frac{3}{2}(a+1)a^3+3a^3$$
$$=-\frac{1}{2}a^4+\frac{3}{2}a^3$$

그런데, $t=3a$이므로 $t\to0$일 때 $a\to0$이므로

$$\int_0^a f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}(t+3)x^3+tx^2\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}a^4-(a+1)a^3+3a^3$$
$$=-\frac{1}{2}a^4+2a^3$$

$$\therefore \lim_{t\to0}\frac{1}{g(t)}\int_0^a f(x)dx=\lim_{a\to0}\frac{-a^4+4a^3}{-a^4+3a^3}=\frac{4}{3}$$

64) [정답] ②

[해설]

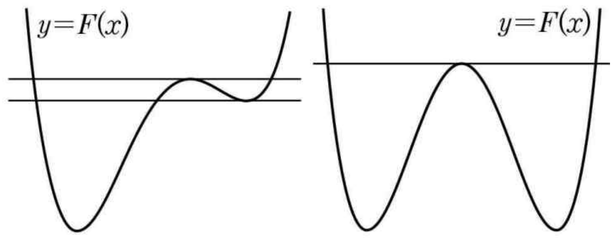
함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 주어진 방정식은

$\int_t^x f(s)ds=F(x)-F(t)=0$이므로 $F(x)=F(t)$이다.

따라서 $g(t)$는 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(t)$의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

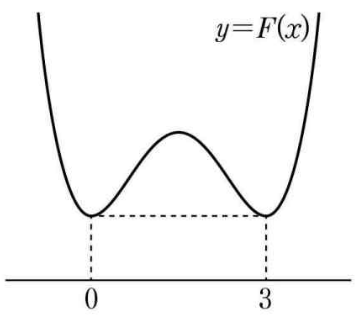
ㄱ. $F'(x)=f(x)=x^2(x-1)$이다.
함수 $F(x)$는 $x<1$에서 감소, $x>1$에서 증가하므로 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.
따라서 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(1)$은 오직 한 점에서 만나므로 $g(1)=1$이다. (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수 $F(x)$의 두 극솟값이 같은 경우와 두 극솟값이 다른 경우가 있다. 각 경우 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(a)$가 서로 다른 세 점에서 만나는 실수 a가 존재한다.



따라서 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $F(x)$가 극댓값을 갖지 않거나, 극댓값을 갖지만 두 극솟값의 크기가 다른 경우에는 $\lim_{t\to b}g(t)+g(b)=6$인 실수 b가 존재하지 않는다. 따라서 곡선 $y=F(x)$의 개형은 다음과 같고, $F(0)=F(3)$이다.



$f(0)=F'(0)=0$이고 $f(3)=F'(3)=0$이므로

$$F(x)-F(0)=\frac{x^2(x-3)^2}{4}=\frac{x^4-6x^3+9x^2}{4}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x$$

이므로 $f(4)=64-72+18=10$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

65) [정답] 10

[해설]

구간 $0\leq x\leq2$ 에서 $0\leq\sin x\leq1$ 이므로

$$\int_0^2\sqrt{27}\,dx<\int_0^2\sqrt{27+2\sin x}\,dx<\int_0^2\sqrt{29}\,dx$$

$$\sqrt{27}\,x]_0^2<\int_0^2\sqrt{27+2\sin x}\,dx<\sqrt{29}\,x]_0^2$$

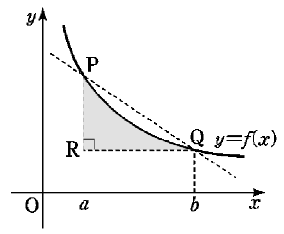
$$\sqrt{108}<\int_0^2\sqrt{27+2\sin x}\,dx<\sqrt{116}$$

$$10<\sqrt{108}<\int_0^2\sqrt{27+2\sin x}\,dx<\sqrt{116}<11$$

$\therefore\ n=10$

66) [정답] ③

[해설]



ㄱ. $F'(x)=f(x)>0$이므로 구간 $[a,\ b]$에서 $y=F(x)$는 증가한다. $\therefore$ 참

ㄴ. 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{F'(b)-F'(a)}{b-a}$

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-f(b)\}dx=$(그림의 어두운 부분의 넓이)

$\dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}=(\triangle\mathrm{PRQ}$의 넓이) $\therefore$ 참

67) [정답] ③

[해설]

(ⅰ) $x<1$일 때,

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt=\int_{-1}^{x}(t-1)(-1)dt$$

$$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{x}=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}$$

(ⅱ) $x\geq 1$일 때,

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^{1}(t-1)(-1)dt+\int_{1}^{x}(t-1)(-t+2)dt$$

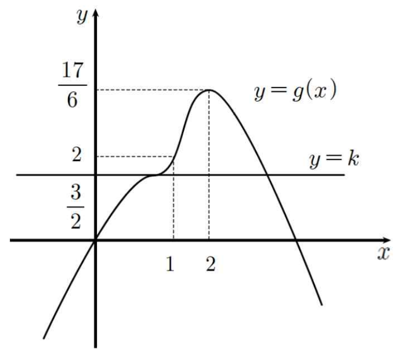
$$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_{1}^{x}$$

$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{17}{6}$$

ㄱ. 구간 $(1,2)$에서
$g'(x)=-x^2+3x-2=-(x-1)(x-2)$에서
$g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 증가한다. <참>

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0,\ \lim_{x\to1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0$
이므로 $x=1$에서 미분가능하다. <참>

ㄷ. $x<1$일 때, $g'(x)=-x+1$
$x>1$일 때, $g'(x)=-(x-1)(x-2)$
이므로 $y=g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 방정식 $g(x)=k$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 k가 존재하지 않는다. <거짓>

68) [정답] ④

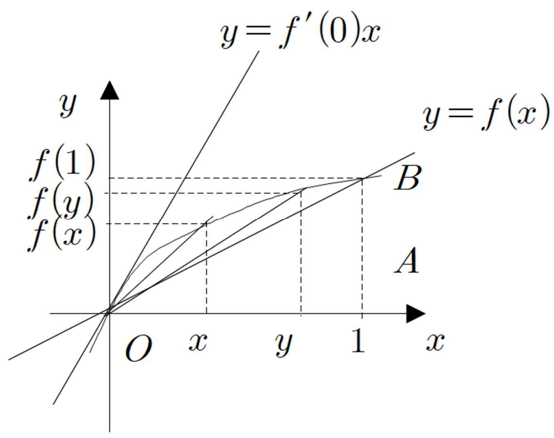
[해설]

조건(나)에서 $0<x<y<1$인 모든 x,y에 대하여

$0<xf(y)<yf(x)$

이므로 $0<\dfrac{f(y)}{y}<\dfrac{f(x)}{x}$이고

$f(0)=0$을 동시에 만족하는 다항함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



주어진 그림에서 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}f(1)$이므로

$y=k\dfrac{1}{2}f(1)<\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

$\therefore\ f(1)<2\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ 즉, $B<C$

한편, 원점 O을 지나는 접선의 방정식은 $y=f'(0)x$

직선 $y=f'(0)x$와 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}f'(0)$이고 주어진 그림에서 $\frac{1}{2}f'(0)>\int_0^1 f(x)dx$

$\therefore\ f'(0)>2\int_0^1 f(x)dx$ 즉, $A>C$ $\therefore$ $B<C<A$

69) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $g(-1)=\int_{-1}^{1} f(t)dt=0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(1,2)$에서 증가한다. (거짓)

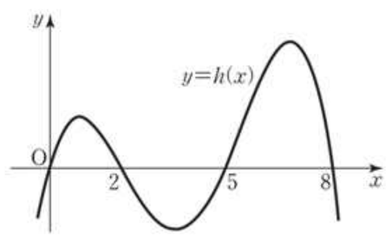
ㄷ. 방정식 $g(x)=2$의 실근은 -4, -2, 4, 6이므로 $-4-2+4+6=4$이다. (참)

70) [정답] ⑤

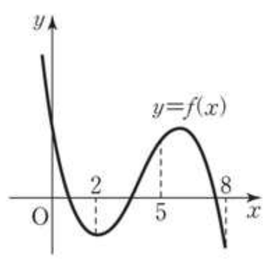
[해설]

함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면

$h(x)$는 사차함수이고 $h'(x)=f(x)$에서 $f(0)>0$이므로 $h'(0)>0$이다. 그러므로 함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 피적분함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ.(참) 함수 $f(x)$는 x축과 서로 다른 3점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ.(참) 함수 $f(x)$의 그래프가 $x=0$에서 감소하므로 $f'(0)<0$이다.

ㄷ.(참) 함수 $f(x)$의 그래프에서 $m=3$ 또는 $m=4$ 또는 $m=5$인 경우 $\int_m^{m+2} f(x)dx>0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

71) [정답] ②

[해설]

$g'(x)=|f(x)-2x|$이며 이 때 실수 전체에서 미분가능하기 위해서는

모든 x에서 $f(x)-2x\geq 0$ 이어야 한다.

$x=1$ 대입하면 $f(1)-2\geq 0$

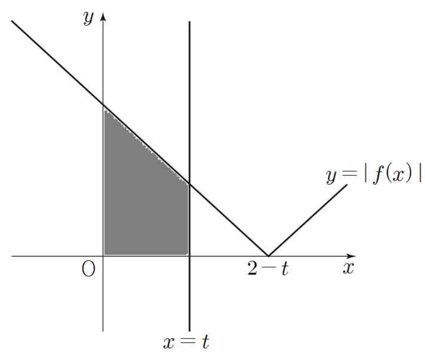
$f(1)\geq 2$

72) [정답] ⑤

[해설]

함수 $|f(x)|$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 $2-t$

(ⅰ) $0<t<1$일 때,
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $x=t$는 그림과 같다.

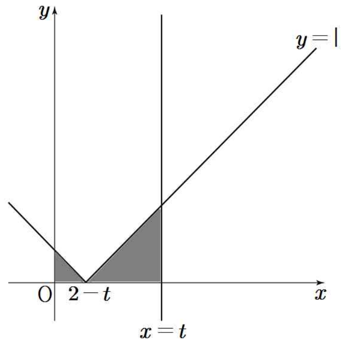


$$g(t)=\int_0^t(-x+2-t)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x-tx\right]_0^t$$

$$=-\frac{3}{2}t^2+2t$$

(ⅱ) $1\leq t<2$일 때,
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $x=t$는 그림과 같다.

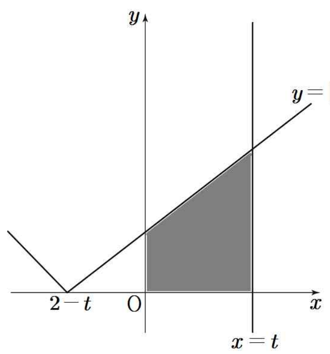


$$g(t)=\int_0^{2-t}(-x+2-t)dx+\int_{2-t}^{t}(x-2+t)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x-tx\right]_0^{2-t}+\left[\frac{1}{2}x^2-2x+tx\right]_{2-t}^{t}$$

$$=\frac{5}{2}t^2-6t+4$$

(iii) $t\ge 2$일 때,
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $x=t$는 그림과 같다.



$$g(t)=\int_0^{t}(x-2+t)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2x+tx\right]_0^{t}$$

$$=\frac{3}{2}t^2-2t$$

(i), (ii), (iii)에 의해

$$\text{함수 } g(t)=\begin{cases}-\frac{3}{2}t^2+2t & (0<t<1)\\ \frac{5}{2}t^2-6t+4 & (1\le t<2)\\ \frac{3}{2}t^2-2t & (t\ge 2)\end{cases}$$

ㄱ. $g(1)=\int_0^1|-x+1|dx=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. (i) $t=2$에서 연속

$$\lim_{t\to 2-}\left(\frac{5}{2}t^2-6t+4\right)=\lim_{t\to 2+}\left(\frac{3}{2}t^2-2t\right)=2$$

$g(2)=2$

(ii) $t=2$에서 미분가능

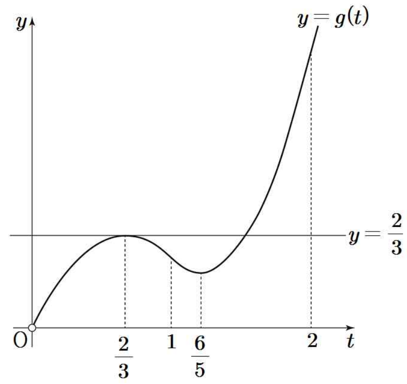
$$\lim_{t\to 2-}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2-}\left(\frac{5}{2}t-1\right)=4$$

$$\lim_{t\to 2+}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2+}\left(\frac{3}{2}t+1\right)=4$$

$\therefore$ 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능 (참)

ㄷ. 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t$		+	0	−	−	−	0	+	+	+
$g(t$		↗	$\frac{2}{3}$	↘		↘	극소	↗		↗



함수 $g(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극댓값 $\frac{2}{3}$를 가지므로 방정식 $g(t)=\frac{2}{3}$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

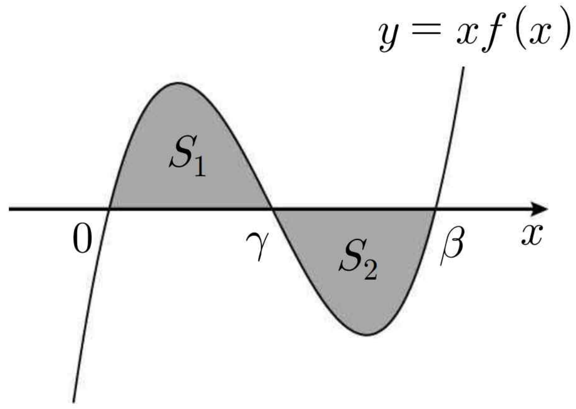
73) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $g'(x)=xf(x)$이므로 $g'(0)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0, \alpha]$에서 연속, 열린 구간 $(0, \alpha)$에서 미분가능, $g(0)=g(\alpha)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c)=cf(c)=0$인 c가 열린 구간 $(0, \alpha)$에 적어도 하나 존재한다.
$c\ne 0$이므로 $f(c)=0$
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0, \alpha)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $\beta>0$이고 $g(\beta)=0$이므로 ㄴ에 의하여 $f(\gamma)=0$인 $\gamma\,(0<\gamma<\beta)$가 존재한다.
$f(x)=a(x-\gamma)(x-\beta)\ (a>0)$이고
$S_1=\int_0^{\gamma}|xf(x)|\,dx$, $S_2=\int_{\gamma}^{\beta}|xf(x)|\,dx$라 하면
$y=xf(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$g(\beta) = \int_0^\beta tf(t)dt = S_1 - S_2 = 0$ 이므로

$S_1 = S_2$ 이다.

$\int_\beta^x tf(t)dt = g(x) - g(\beta) = g(x) = \int_0^x tf(t)dt \ge 0$

이므로, 모든 실수 x에 대하여 $\int_\beta^x tf(t)dt \ge 0$ (참)

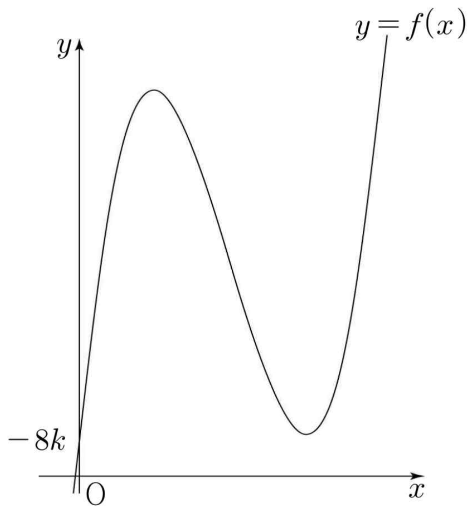
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

74) [정답] ②

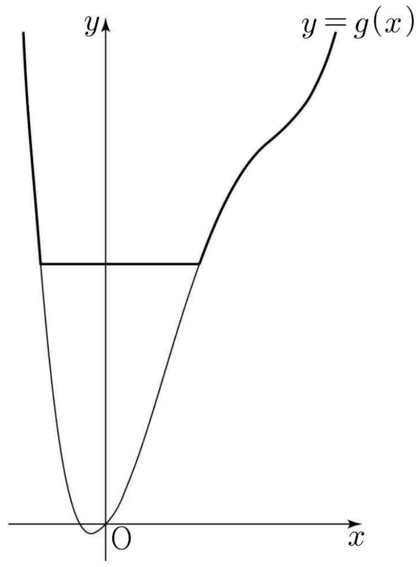
[해설]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖고, k의 값에 따른 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

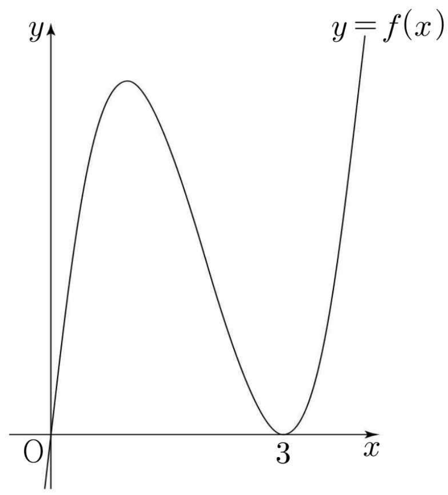
(i) $k<0$일 때



그림과 같이 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 a, b가 존재하지 않는다.



(ii) $k=0$일 때



그림과 같이 $b=3$일 때 $g'(3)=0$이므로

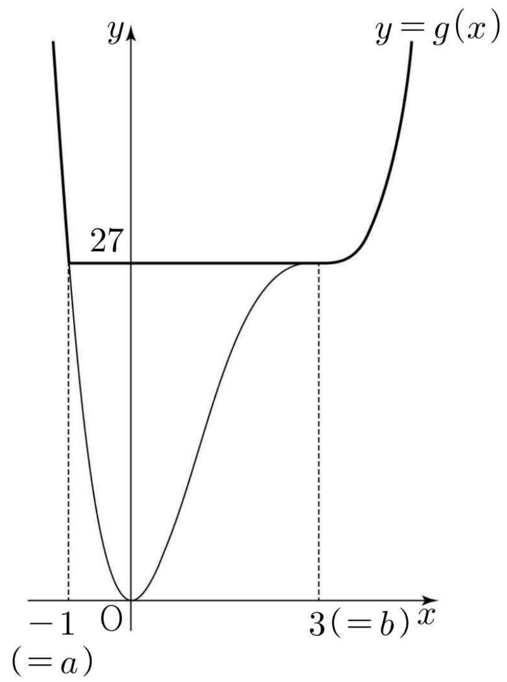
$$g(3)=\int_0^3 f(x)dx=\left[x^4-8x^3+18x^2\right]_0^3=27=c$$

$g(a)=27$에서

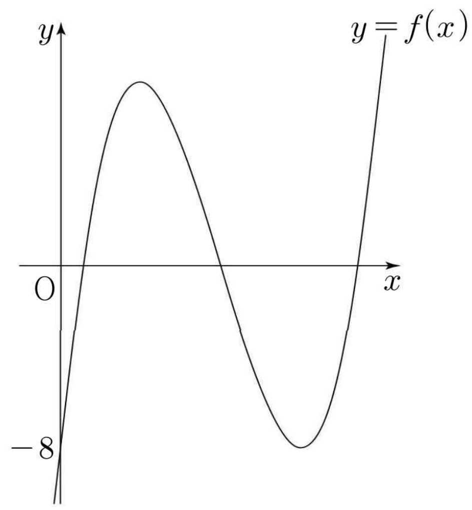
$$a^4-8a^3+18a^2=27, (a+1)(a-3)^3=0$$

$$a=-1$$

따라서 $a=-1, b=3, c=27$



(iii) $k=1$일 때



함수

$f(x)=4x^3-24x^2+36x-8$에서

$f(2-\sqrt{3})=f(2)=f(2+\sqrt{3})=0$이므로 그림과 같이 함수 $g(x)$는

$x=2-\sqrt{3}, x=2+\sqrt{3}$에서 극솟값 -1,

$x=2$에서 극댓값을 갖는다.

$g(2)=\int_0^2 f(x)dx=\left[x^4-8x^3+18x^2-8x\right]_0^2=8=c$

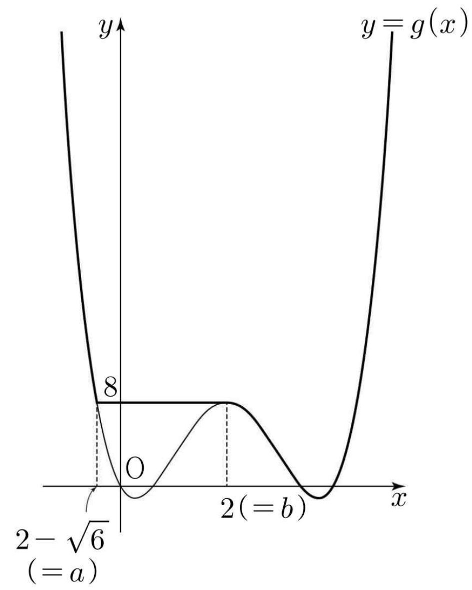
$g(x)=8$에서

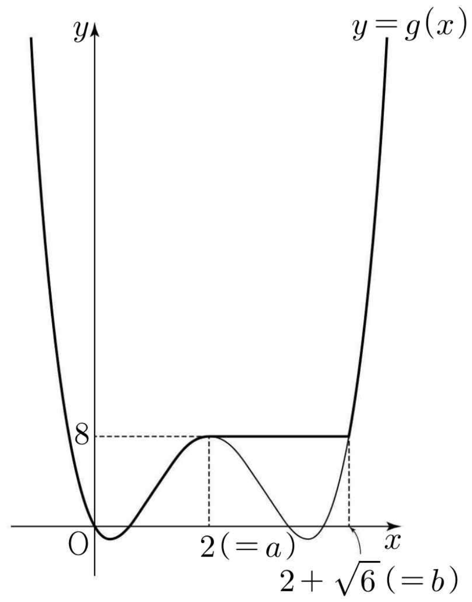
$$x^4-8x^3+18x^2-8x=8$$

$$(x-2)^2(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})=0$$

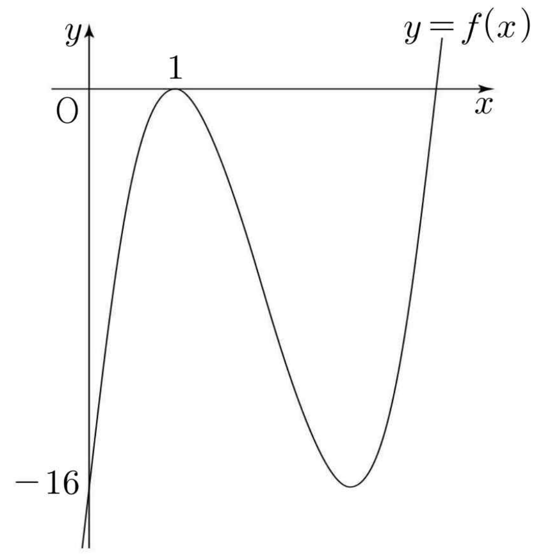
따라서 $a=2-\sqrt{6}, b=2, c=8$

또는 $a=2, b=2+\sqrt{6}, c=8$





(iv) $k=2$일 때



그림과 같이 $a=1$일 때, $g'(1)=0$이므로

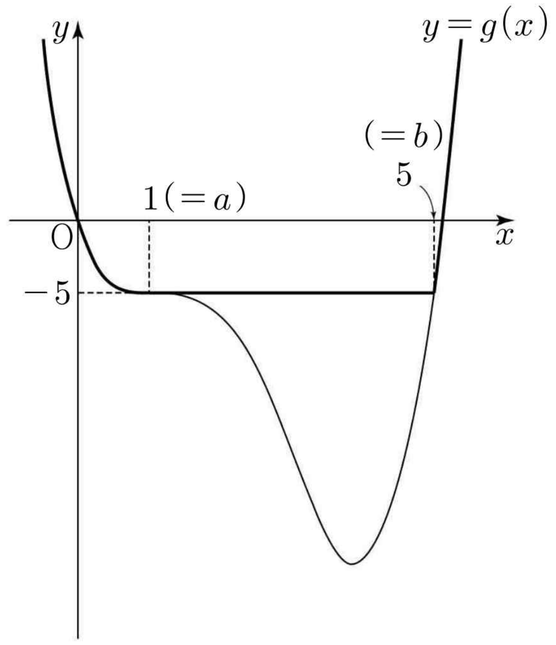
$g(1)=\int_0^1 f(x)dx=\left[x^4-8x^3+18x^2-16x\right]_0^1=-5=c$

$g(b)=-5$에서

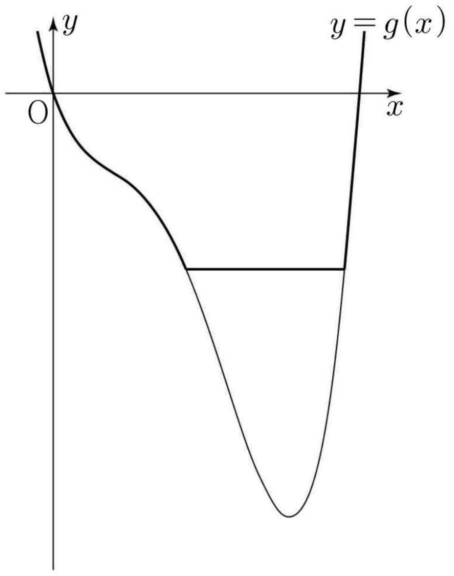
$$b^4-8b^3+18b^2-16b=-5,\ (b-1)^3(b-5)=0$$

$b=5$

따라서 $a=1, b=5, c=-5$



(ⅴ) $k \geq 3$일 때



(ⅰ)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족하는 a, b, c는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 조건을 만족하는 k, a, b, c의 합 $k+a+b+c$의 값은 각각 $29, 13-\sqrt{6}, 13+\sqrt{6}, 3$

따라서 $k+a+b+c$의 최솟값은 3

75) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $h(x)=(x-1)f(x)$이므로 $h'(x)$는 곱의 미분에 의해 $f(x)+(x-1)f'(x)$이다. (참)

ㄴ. $x=-1$에서 극값 0을 가지므로

$f(-1)=0, f'(-1)=0$이다. 따라서 $f(x)$에 대입하여 연립하면

$a=-1, b=-1$이므로

$f(x)=x^3+x^2-x-1$

$\int_0^1 g(x)dx=[h(x)]_0^1=[(x-1)(x^3+x^2-x-1)]_0^1=-1$이다. (참)

ㄷ. $\int_0^1 g(x)dx=[(x-1)f(x)]_0^1=-f(0)$이다. 그런데

$f(0)=0$이므로 $g(x)$를 0부터 1까지 적분한 값이 0이 된다.

따라서 어떤 경우에서도 $g(x)=0$이 되는 지점이 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

76) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(0)=g'(0)=0$

$x<0$에서 $f'(x)>0$, $g'(x)>0$

$0<x<4$에서 $f'(x)<0$, $g'(x)<0$

이므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다. (참)

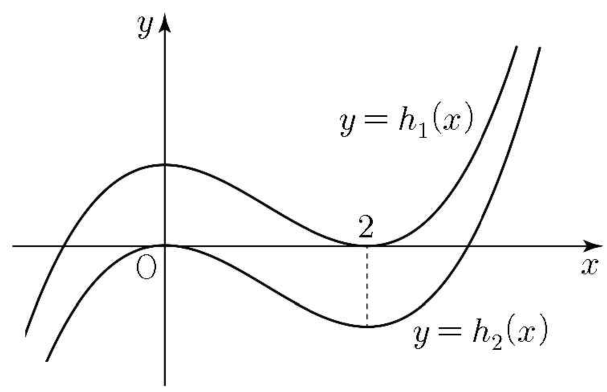
ㄴ. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C_1$, $g(x)=-x^2+C_2$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x(x-2)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우는 삼차함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우이므로 삼차함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$의 두 가지이다.



$h(x)=h_1(x)$일 때, $h_1(2)=0$이므로

$h_1(0)\times h_1(2)=0$

$h(x)=h_2(x)$일 때, $h_2(0)=0$이므로

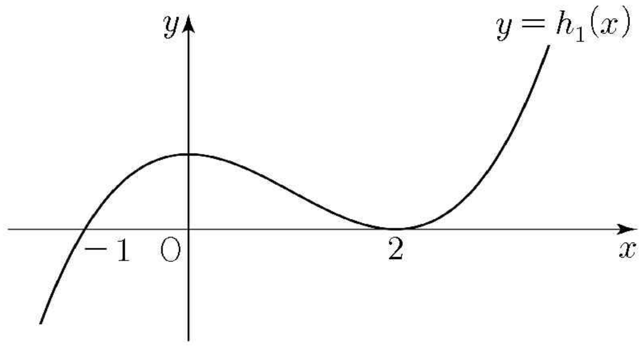
$h_2(0)\times h_2(2)=0$

$\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$ (참)

ㄷ. $\int_{-1}^{0} h_2(t)dt < 0$이므로 함수 $h_2(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt \ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$가 아니다.

$h_1(2) = -\frac{4}{3} + C_1 - C_2 = 0,\ C_1 - C_2 = \frac{4}{3}$

$h_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$



$x < -1$일 때, $h_1(x) < 0$이므로 $\int_{-1}^{x} h_1(t)dt > 0$

$x \ge -1$일 때, $h_1(x) \ge 0$이므로 $\int_{-1}^{x} h_1(t)dt \ge 0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt \ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$는

함수 $h_1(x)$이다.

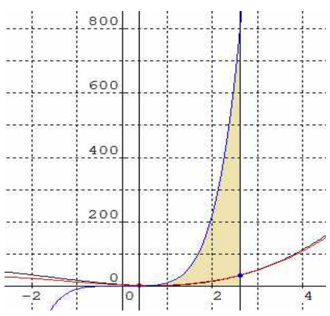
$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}\right)dx$

$= 2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

77) [정답] ④

[해설]



교점을 확인하면

$x^3 + 4x^2 - 6x + 5 = x^3 + 5x^2 - 9x + 6$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$(\beta - \alpha)^2 = (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = 9 - 4 = 5$

$\therefore \beta - \alpha = \sqrt{5}$

$x^2 = 3x - 1,$

$x^4 = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

$= 9(3x-1) - 6x + 1 = 21x - 8$

$x^6 = x^2x^4 = (3x-1)(21x-8) = 63x^2 - 45x + 8$

$= 63(3x-1) - 45x + 8 = 144x - 55$

이므로 $\alpha^2 = 3\alpha - 1,\ \alpha^4 = 21\alpha - 8,\ \alpha^6 = 144\alpha - 55$이다.

β의 경우도 마찬가지이다.

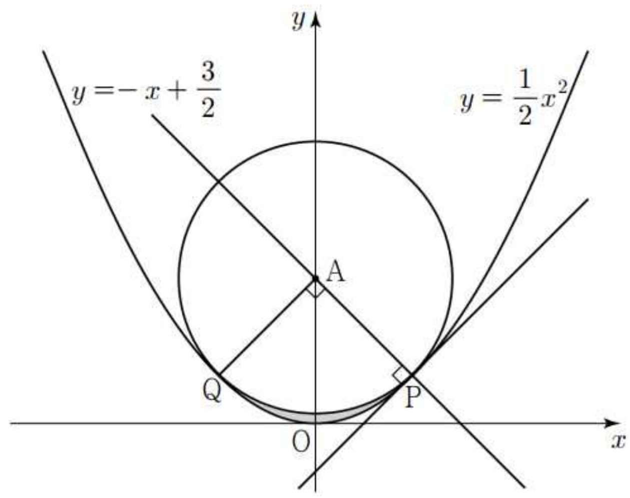
$S = \int_{\alpha}^{\beta}(6x^5 + 4x^3 + 1)dx = \left[x^6 + x^4 + x\right]_{\alpha}^{\beta}$

$= (\beta^6 - \alpha^6) + (\beta^4 - \alpha^4) + (\beta - \alpha) = 166(\beta - \alpha) = 166\sqrt{5}$

$\therefore a = 166$

78) [정답] 140

[해설]



두 곡선의 교점의 좌표를 각각

$\mathrm{P}\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\alpha^2\right),\ \mathrm{Q}\left(-\alpha,\ \frac{1}{2}\alpha^2\right)$이라 하자. $(\alpha > 0)$

함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프의 접점 P에서 접선의 기울기는 α이고 이 접선은 직선 AP와 수직이다.

즉,

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}}{\alpha - 0} = -\frac{1}{\alpha}$$

$\alpha^2 = 1$ 이므로

$\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$

직선 AP는 $y=-x+\frac{3}{2}$

$\angle PAQ=90^\circ$, 원의 반지름은 $\sqrt{2}$

구하는 넓이를 S라 하면

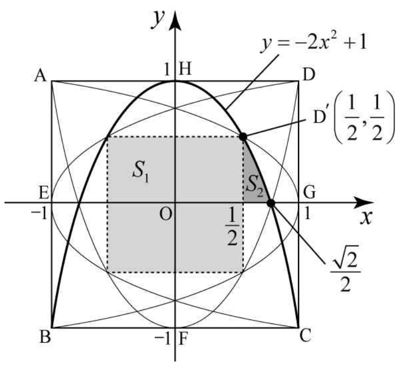
$$S=2\left\{\int_0^1\left(-x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\frac{\pi}{4}\right\}$$
$$=2\left\{\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1-\frac{\pi}{4}\right\}$$
$$=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

$a=\frac{5}{3},\ b=-\frac{1}{2}$ 이므로

$120(a+b)=140$

79) [정답] 15

[해설]



점 E, G를 지나는 직선을 x축, 점 H, F를 지나는 직선을 y축으로 할 때, 세 점 B, H, C를 지나는 이차함수는 $y=-2x^2+1$

교점 D′의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$이므로

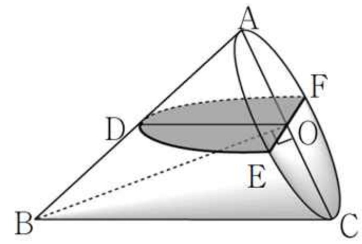
어두운 부분의 넓이는

$$S_1+8S_2=1+8\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-2x^2+1)dx=\frac{8\sqrt{2}-7}{3}$$

$p=8,\ q=-7,$ 따라서 $p-q=15$

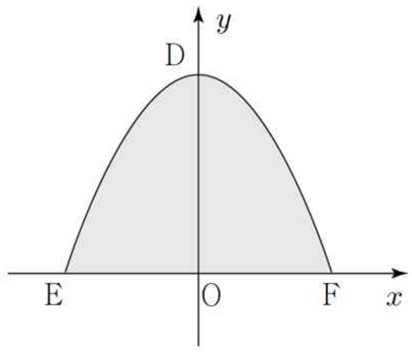
80) [정답] ④

[해설]



삼각형 ABC에 대하여 $\overline{BC}=3$이고 $\overline{BC}/\!/\overline{DO}$, $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{DO}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{3}{2}$

좌표평면에 포물선을 나타내면



이 포물선은 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하고 $(1,0)$을 지나므로, 포물선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$ 따라서 구하고자 하는 단면의 넓이는 $S=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)dx=2$

81) [정답] ⑤

[해설]

$g(x)=ax^2+bx+c$라 하자.

이 때, (가) (나)에 의하여

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-1)^2$

따라서 $S_1=\frac{1}{30}$이다. 또한

$f(x)-g(x)=x^4-6x^3+(12-a)x^2+(-8-b)x+1-c$

$=(x-\alpha)^2(x-\alpha-1)^2$

이므로 $\alpha=1$이다.

따라서 $a=-1, b=4, c=-3$이면, $S_2=\frac{4}{3}$이다.

따라서 $\frac{S_2}{S_1}=40$이다.

82) [정답] 35

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}(x \le 0) & -x^2-2x \\ (x \ge 0) & x^2-2x\end{cases}$$

$$f(x+1)=\begin{cases}(x \le -1) & -x^2-4x-3 \\ (x \ge -1) & x^2-1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}(x \le -\frac{3}{2}) & f(x) \\ (-\frac{3}{2} \le x \le 0) & f(x+1) \\ (0 \le x \le 1) & f(1) \\ (1 \le x) & f(x)\end{cases}$$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\{f(x)-f(x+1)\}dx+\int_{0}^{1}\{f(x)-f(1)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{-1}\{(-x^2-2x)-(-x^2-4x-3)\}dx$$

$$+\int_{-1}^{0}\{(-x^2-2x)-(x^2-1)\}dx$$

$$+\int_{0}^{1}\{(x^2-2x)-(-1)\}dx$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{23}{12}$$

$\therefore p+q=35$

83) [정답] ④

[해설]
조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다.
조건 (나)에서

$$\int_{0}^{6}f(x)dx=\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{6}f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{6}\{f(x-3)+4\}dx$$

$$=\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{0}^{3}\{f(x)+4\}dx$$

$$=2\int_{0}^{3}f(x)dx+12$$

$$\int_{0}^{3}f(x)dx=-6$$

또한 $\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{6}f(x)dx=0$에서

$$\int_{3}^{6}f(x)dx=6$$

이고 함수 $f(x)$는 증가함수이므로 $x \ge 6$일 때 $f(x)>0$이다.
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{6}^{9}|f(x)|dx=\int_{6}^{9}f(x)dx$$

$$=\int_{6}^{9}\{f(x-3)+4\}dx$$

$$=\int_{3}^{6}f(x)dx+12$$

$$=6+12$$

$$=18$$

84) [정답] 2

[해설]
$f(1-x)=-f(1+x)$에 $x=0,\ x=1$을 각각 대입하면
$f(1)=-f(1)$에서 $f(1)=0$, $f(0)=-f(2)$에서 $f(2)=0$
삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=0$이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x(x-1)(x-2)$
방정식 $f(x)=-6x^2$에서 $x^3+3x^2+2x=0$이므로
$x(x+1)(x+2)=0,\ x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$
$-2 \le x \le -1$ 에서 $x^3+3x^2+2x \ge 0$이고
$-1 \le x \le 0$ 에서 $x^3+3x^2+2x \le 0$이므로

$$S=\int_{-2}^{0}\left|x^3+3x^2+2x\right|dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx+\int_{-1}^{0}\{-(x^3+3x^2+2x)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}$$

따라서 $4S=2$

85) [정답] ①

[해설]

포물선 C_1의 방정식을 $y=ax^2+b$로 놓으면 곡선 $y=ax^2+b$가 점 $(1,\ \sqrt{3})$을 지나고 이 점에서 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{3}=a+b$이고 $\sqrt{3}=2a$이다.

따라서 $a=b=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ S=12\int_{0}^{1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x\right)dx=2\sqrt{3}$$

86) [정답] ④

[해설]

접점을 $(t,\ t^2)$이라 하면 $y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 접선의 방정식은 $y=2t(x-t)+t^2$ ……㉠

㉠이 점 $\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$를 지나므로

$-2=2t\left(\frac{1}{2}-t\right)+t^2$

$t^2-t-2=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 4)$이다.

$\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 4)$라 할 때, 직선 AB의 방정식은 $y=x+2$

점 $\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$에서 직선 AB에 이르는 거리는

$\dfrac{\left|\frac{1}{2}+2+2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$이다.

$\therefore$ ($\triangle$PAB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{4}=\frac{27}{4}$

직선 AB와 곡선 $y=x^2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{6}(2-(-1))^3=\frac{9}{2}$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{27}{4}-\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$

87) [정답] **32**

[해설]

직선 l의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.
(단, $g(x)$는 일차 이하의 다항함수)

직선 l과 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 두 점에서 접하므로

이 두 점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$이 성립한다.

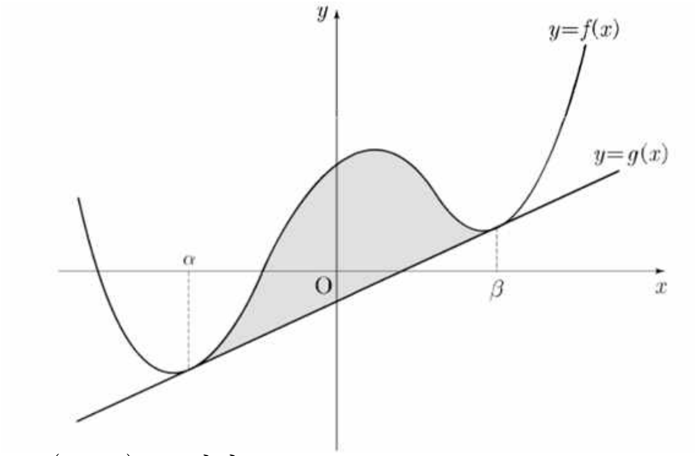
그런데 $g(x)$는 1차 이하의 다항함수이므로

다항식 $f(x)-g(x)$의 x^3과 x^2항의 계수는 $f(x)$와 같다.

$f(x)-g(x)$의 x^3의 계수는 0이므로

근과 계수와의 관계에서

방정식 $f(x)-g(x)=0$의 중근을 포함한 모든 근의 합



$2(\alpha+\beta)=0$이다.

$\therefore\ \beta=-\alpha$

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2$

$=(x^2-\alpha^2)^2=x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4$

$f(x)-g(x)$의 x^2의 계수는 -2이므로

$-2\alpha^2=-2$

$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=1\ (\because\ \alpha<\beta)$

$\therefore\ f(x)-g(x)=x^4-2x^2+1$

$\therefore\ A=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)dx$

$=2\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$

$=\frac{16}{15}$

$\therefore\ 30A=32$

88) [정답] ①

[해설]

$S_1+S_2+S_3=1,\ 2S_2=S_1+S_3\cdots$ ㉠

$S_1=\int_0^1\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{6}\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $S_2=\frac{1}{3},\ S_3=\frac{1}{2}$

$ax^2=1$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}\ (\because x>0)$이므로

$S_3=\frac{1}{\sqrt{a}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}ax^2dx=\frac{1}{2}$에서 $a=\frac{16}{9}$

89) [정답] **290**

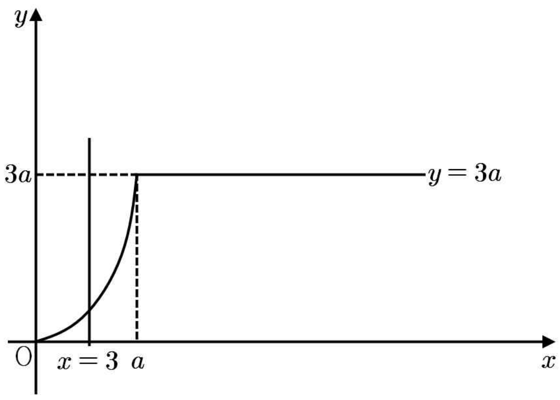
[해설]

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{a}x^2 & (-a\le x\le a)\\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a)\end{cases}$$

의 그래프는 y축 대칭함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 8이면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 4이다.

$x\ge 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

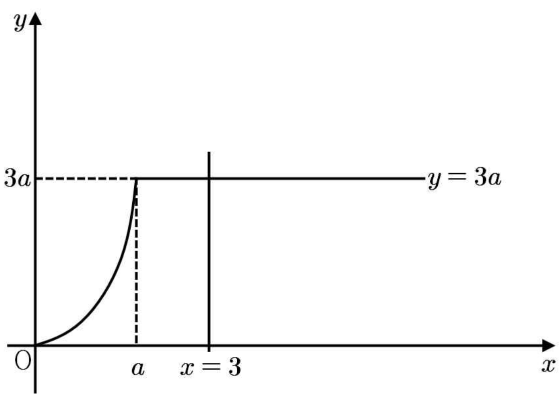
(ⅰ) $a\ge 3$일 때



$$\int_0^3 \frac{3}{a}x^2dx=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^3=\frac{27}{a}=4$$

$$\therefore a=\frac{27}{4}$$

(ⅱ) $0<a<3$일 때



$$\int_0^a \frac{3}{a}x^2dx+(3-a)\times 3a$$

$$=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^a+9a-3a^2$$

$$=-2a^2+9a$$

$$=4$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because\ 0<a<3)$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 만족하는 a는 $\dfrac{27}{4}$, $\dfrac{1}{2}$이므로 모든 a값의 합 S는 $S=\dfrac{29}{4}$

$$\therefore 40S=40\times\frac{29}{4}=290$$

90) [정답] 13

[해설]

삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 선분 OB는 원 C의 지름이다. 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$$

이때 두 점 O(0, 0), B(t, t^2)을 지나는 직선의 방정식은 $y=tx$이고, 원 C의 내부와 부등식 $y\le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이는 반원의 넓이에서 원 C의 직선 $y=tx$와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 값과 같다.

$$S(t)=\frac{1}{2}\pi r^2-\int_0^t(tx-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{8}\pi(t^2+t^4)-t\int_0^t x\,dx+\int_0^t x^2dx$$

$$S'(t)=\frac{1}{8}\pi(2t+4t^3)-\int_0^t x\,dx-t^2+t^2$$

$$=\frac{1}{4}\pi(t+2t^3)-\frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore\ S'(1)=\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-2}{4}$$

따라서 $p=3$, $q=-2$이므로

$p^2+q^2=13$

91) [정답] 54

[해설]

직선을 $y=mx+n$ 이라 두면

$\displaystyle\int_0^6(x^3-6x^2-mx-n)dx=0$ 이므로 $n=-3m-18$

직선 $y=mx-3m-18$

$m(x-3)-(y+18)=0$이고 m에 관한 항등식

이므로 점 D의 좌표는 $(x,\ y)=(3,-18)$ 따라서 넓이는 54

92) [정답] ②

[해설]

t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_P, x_Q라 하면

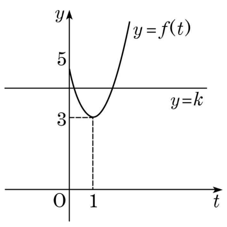
$$x_P = 5+\int_0^t (3t^2-2)\,dt = t^3-2t+5,$$

$$x_Q = k+\int_0^t 1\,dt = t+k$$

이때, 두 점 P, Q가 만나려면 $t^3-2t+5=t+k$ 즉, $t^3-3t+5=k$이어야 한다.

$f(t)=t^3-3t+5$라 하면

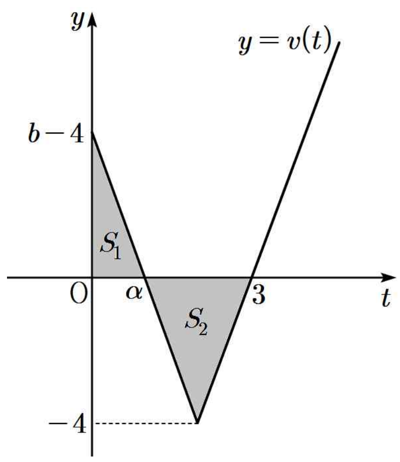
$f'(t)=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$이므로 $t>0$에서 함수 $f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=k$와 곡선 $y=f(t)$가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은 $3<k<5$이므로 정수 k는 4이다.

93) [정답] 14

[해설]



조건 (가), (나)에서 $v(3)=0$이고, 그림과 같이 색칠한 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$s(3)=S_1+S_2$, $x(3)=S_1-S_2$

조건 (나)에서 $s(3)-x(3)=8$이므로

$(S_1+S_2)-(S_1-S_2)=8$

$\therefore S_2=4$

위의 그림에서

$S_2=\frac{1}{2}\times(3-\alpha)\times4=4$

$\therefore \alpha=1$

$v(2)=-4$이므로 $v(t)=|at-b|-4$에서

$v(2)=|2a-b|-4=-4$, $b=2a$

$v(1)=v(3)=0$이므로

$v(1)=|a-b|-4=0$, $|-a|=4$

$\therefore a=4\,(\because\ a>0)$, $b=8$

$v(t)=|4t-8|-4$이므로 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^6 v(t)\,dt=-S_2+\int_3^6(4t-12)\,dt$$
$$=-4+\Big[2t^2-12t\Big]_3^6$$
$$=-4+18=14$$

94) [정답] ④

[해설]

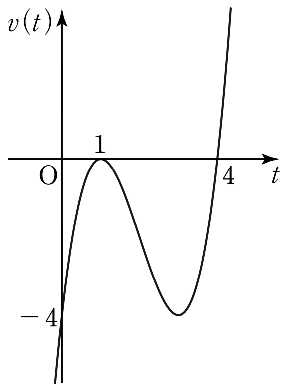
$a(t)=3t^2-12t+9$, $v(t)=t^3-6t^2+9t+k$

ㄱ. $t>3$이면

$a(t)=3(t-1)(t-3)>0$이므로 $v(t)$는 증가한다. ∴ 참

ㄴ. $k=-4$이면 $v(1)=0$(극댓값)이므로 $v(t)=0$은 그림과 같다.

따라서 점 P의 운동 방향은 한 번 바뀐다. ∴ 거짓



ㄷ. $0\le t\le5$에서 $v(t)\ge0$이면 된다.

이 구간에서 최솟값은

$v(3)=k$이므로 $k\ge0$

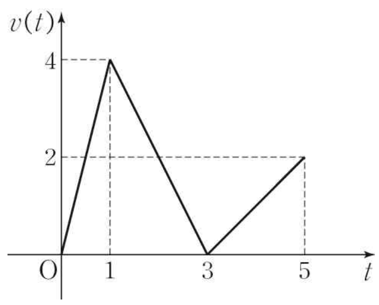
따라서 k의 최솟값은 0이다.

∴ 참

95) [정답] ①

[해설]

$v(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. (참) 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리는

$1\times4\times\frac{1}{2}=2$

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 움직인 거리는 $2\times4\times\frac{1}{2}=4$

시각 $t=3$에서 $t=5$까지 움직인 거리는 $2\times2\times\frac{1}{2}=2$

이므로 $f(1)=2$이다.

ㄴ. (거짓) $x=2$일 때, 시각 $t=4$에서 $t=5$까지 움직인 거리가 최소이므로 $f(2)=(1+2)\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ f(2)-f(1)=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}\neq\int_1^2 v(t)\,dt$

ㄷ. (거짓) (i) $x<1$인 경우
시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리가 최소이므로

$f(x)=x\times4x\times\frac{1}{2}=2x^2$

$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}(2x+2)=4$

(ii) $x>1$인 경우
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리가 최소이므로

$f(x)=\{(x-1)+2\}\times(3-x)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(-x^2+2x+3)$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0$$

(i), (ii)에서

$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

96) [정답] ⑤

[해설]

t초 후 두 점의 위치는 각각 $\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2$, $\frac{5}{2}t^2$

위치가 같으므로 $\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2=\frac{5}{2}t^2$

이것을 풀면 $t=6$이다.

$t>0$일 때 각각의 점의 속도는 양수이므로, 점의 위치가 곧 움직인 거리이다.

$\therefore\ \frac{5}{2}\times6^3=90$

97) [정답] ②

[해설]

$\begin{cases}x_1(t)=t^3-3t^2\\x_2(t)=t^2\end{cases}$ 이므로 $a^3-3a^2=a^2$

$\therefore\ a=4(\because\ a>0)$

또한, $\{x_1(t)\}'=3t^2-6t$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4|3t^2-6t|\,dt$$

$$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^4(3t^2-6t)dt$$

$$=\frac{3\times(2-0)^3}{6}+x_1(4)-x_1(2)$$

$$=4+20$$

$$=24$$

따라서 움직인 거리는 24이다.

98) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$t<2$일 때, $v(t)<0$

$t=2$일 때, $v(2)=0$

$t>2$일 때, $v(t)>0$

$t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(2)=0+\int_0^2(3t^2-6t)dt=\Big[t^3-3t^2\Big]_0^2=-4$$

(참)

ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=6t-6$

$6t-6=12,\ t=3$

$t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^3|3t^2-6t|\,dt$$

$$=-\int_0^2(3t^2-6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$

$=4+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^3=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

99) [정답] ③

[해설]

$x(0)=0$, $x(1)=0$이므로 점 P의 위치는 $t=0$일 때 수직선의 원점이고, $t=1$일 때도 수직선의 원점이다.

또, $\int_0^1|v(t)|dt=2$이므로 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t=0$에서 $t=1$까지 위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^1 v(t)\,dt=0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)|>1$이면 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰

시각 t_1이 존재하므로 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2보다 크다. (거짓)

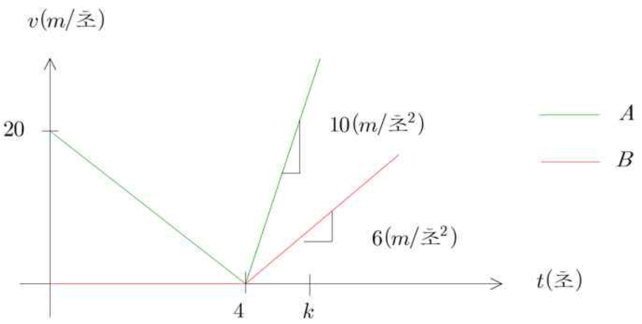
ㄷ. $0 \le t \le 1$인 모든 시각 t에서 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 작고, 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이므로 점 P는 $0<t<1$에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

100) [정답] 190

[해설]

아래 그림은 시간에 따른 A와 B의 속도변화를 보여준다.



k초 후에 A가 B를 추월하려면 P지점을 기준점으로 다음과

같은 관계식이 성립한다.

k초 후의 A 의 위치$=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 20+\displaystyle\int_4^k 10x-40\,dx$

$=40+\left[5x^2-40x\right]_4^k$

$=40+(5k^2-40k)-(80-160)$

$=5k^2-40k+120$

k초 후의 B의 위치$=100+\displaystyle\int_4^k 6x-24\,dx$

$=100+\left[3x^2-24x\right]_4^k$

$=100+(3k^2-24k)-(48-96)$

$=3k^2-24k+148$

따라서,

$5k^2-40k+120=3k^2-24k+148$

$2k^2-16k-28=0$

$\therefore\ k^2-8k=14$

따라서, k초 후의 A 의 위치는

$5(k^2-6k)+120=5\times 14+120=190\ (m)$