제 2 교시

수학 영역 (미적분)

23. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^{7x}-1}{7x}}{\frac{e^{2x}-1}{2x}} \times \frac{7x}{2x} = \frac{7}{2}$$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = t + \cos 2t,\ y = \sin^2 t$$

에서 $t = \frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin t \cos t}{1 - 2\sin 2t}$$

$t = \frac{\pi}{4}$일 때

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 2 \times 1} = -1$$

25. 함수 $f(x) = x + \ln x$에 대하여

$\int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x)\, dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2}{2} + \frac{e}{2}$ ② $\frac{e^2}{2} + e$ ③ $\frac{e^2}{2} + 2e$
④ $e^2 + e$ ⑤ $e^2 + 2e$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$이므로 $f(x) = t$로 치환하면

$$\int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x)\, dx = \int_1^{e+1} t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^{e+1}$$

$$= \frac{e^2}{2} + e$$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

26. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 b_2 = 1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$　② $\frac{6}{5}$　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d,

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라고 하면

$a_1 = b_1 = 1$ 이므로

$a_2 b_2 = 1 \Leftrightarrow (1+d)r = 1$

$\therefore d = \frac{1}{r} - 1 = \frac{1-r}{r}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) + b_n\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right) + \frac{1}{1-r}$$

$$= \frac{1}{d} + \frac{1}{1-r} = \frac{r}{1-r} + \frac{1}{1-r} = \frac{1+r}{1-r} = 2$$

$\therefore\ r = \frac{1}{3}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

27. $x = -\ln 4$에서 $x = 1$까지의 곡선 $y = \frac{1}{2}(|e^x - 1| - e^{|x|} + 1)$의 길이는? [3점]

① $\frac{23}{8}$　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{29}{8}$　④ 4　⑤ $\frac{35}{8}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f(x) = \frac{1}{2}(|e^x - 1| - e^{|x|} + 1)$라고 하면

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-e^x - e^{-x} + 2) & (-\ln 4 \le x < 0) \\ 0 & (0 \le x \le 1) \end{cases}$$

$\therefore$ 곡선의 길이는

$$\int_{-\ln 4}^{1} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$= \int_{-\ln 4}^{0} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})}\,dx + \int_{0}^{1}\sqrt{1+0}\,dx$$

$$= \int_{-\ln 4}^{0} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})}\,dx + 1$$

$$= \int_{-\ln 4}^{0} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx + 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_{-\ln 4}^{0} + 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) + 1$$

$$= \frac{15}{8} + 1 = \frac{23}{8}$$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

28. 실수 a $(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2|\sin 4x| & (x<0)\\ -\sin ax & (x\ge 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수

$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

Analysis

$g(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$ 꼴이 등장하면 꼭 해야 하는 것!

❶ $x=a$ 대입 : $g(a)=\int_{a}^{a} f(x)dx=0$

❷ 미분 : $g'(x)=f(x)$

Analysis

절댓값 함수의 미분 가능성

함수 $y=|f(x)|$에서

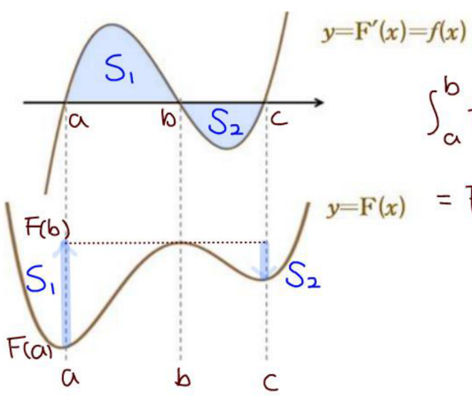
① $f(a)=0$

② $x=a$에서 미분가능

$\Rightarrow f'(a)=0$

Analysis

도함수의 넓이는 원시함수의 높이차



$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$

$=F(a)-F(b)$

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

$F(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$라고 하면

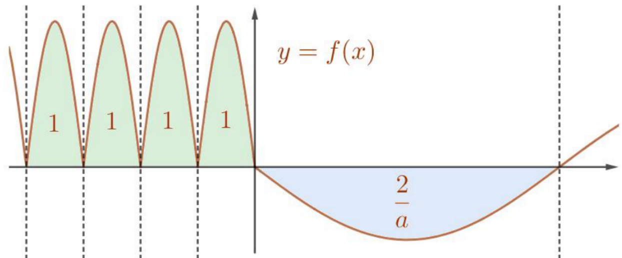
❶ $F(-a\pi)=0$

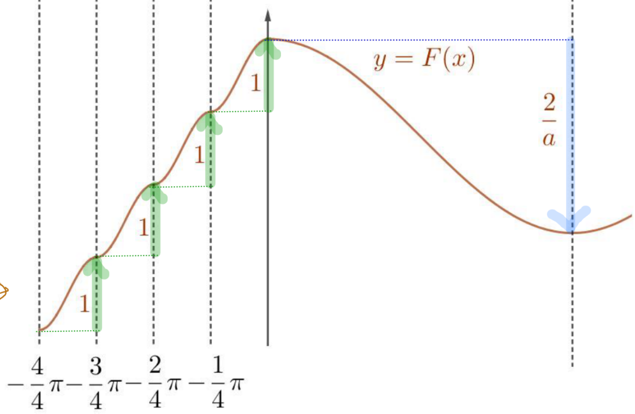
❷ $F'(x)=f(x)$

$g(x)=|F(x)|$이 실수 전체에서 미분가능하므로

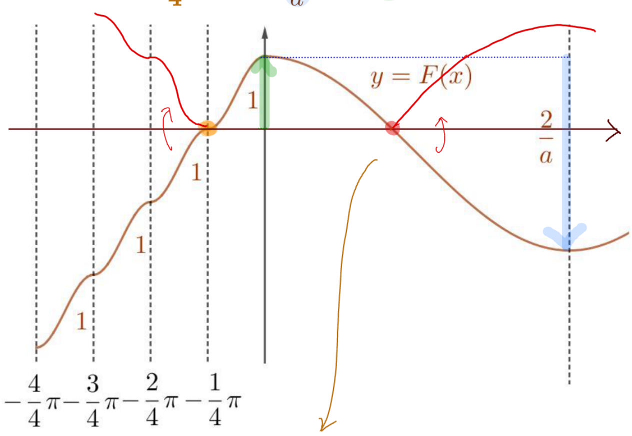
$\Rightarrow F'(-a\pi)=f(-a\pi)=0$

$\therefore -a\pi=-\frac{\pi}{4},\ -\frac{2}{4}\pi,\ -\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{4}{4}\pi,\ \cdots$





i) $-a\pi=-\frac{\pi}{4}$인 경우 $\frac{2}{a}=8>1$

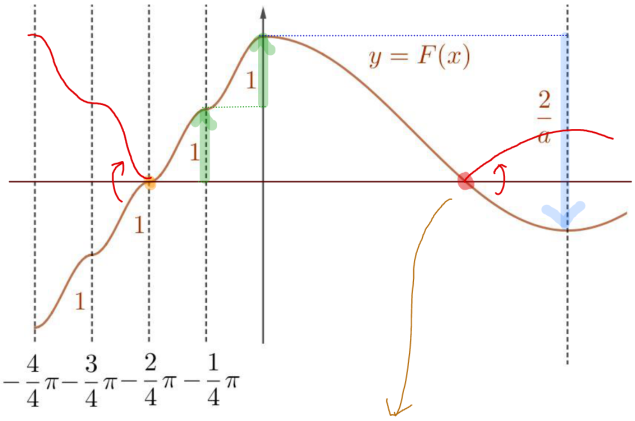


$\therefore g(x)=|F(x)|$ 미분불가능한 점 존재

제 2 교시

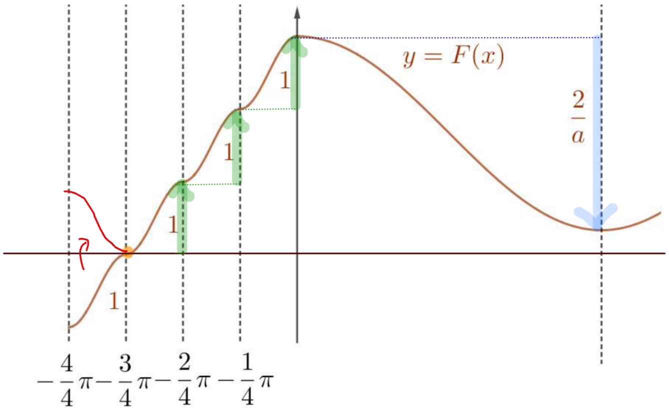
수학 영역 (미적분)

ii) $-a\pi=-\dfrac{2\pi}{4}$인 경우 $\dfrac{2}{a}=4>2$



$\therefore$ $g(x)=|F(x)|$ 미분불가능한 점 존재

iii) $-a\pi=-\dfrac{3\pi}{4}$인 경우 $\dfrac{2}{a}=\dfrac{8}{3}<3$



$\therefore$ $g(x)=|F(x)|$ 실수전체에서 미분 가능

$\therefore$ a의 최솟값은 $\dfrac{3}{4}$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

29. 두 실수 a, b $(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

18

(Step1) a의 값 파악하기

ⅰ) $1<a<3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$ → 모순 ($\because\ a>1$)

ⅱ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=1$$

$\therefore\ a=1$ → 모순 ($\because\ a>1$)

ⅲ) $a>3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a$$

∴ 성립

(Step2) b의 값 파악하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$ 에서

ⅰ) $a>b$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{1}{a}$$

$\therefore\ \frac{1}{a}=\frac{9}{a}$ → 모순

ⅱ) $a=b$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=1$$

$\therefore\ 1=\frac{9}{a}$ ⇔ $a=9,\ b=9$

ⅲ) $a<b$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{a\left(\frac{b}{a}\right)^n+1}=b$$

$\therefore\ b=\frac{9}{a}<3$ ($\because\ a>3$)

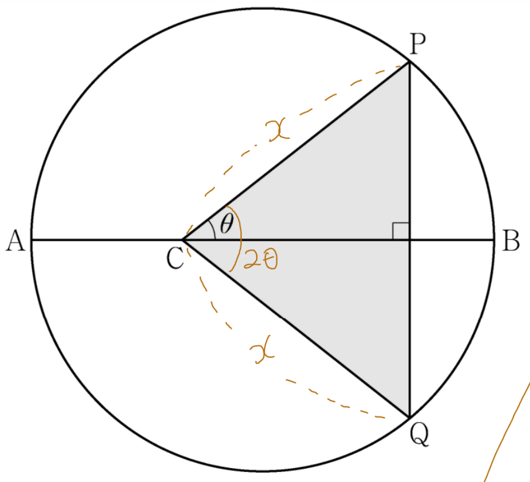
→ 모순 ($\because\ a<b$)

$\therefore\ a+b=9+9=18$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

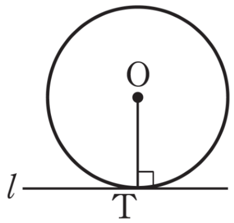
30. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle\mathrm{PCB}=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



도형의 필연성 01

원 나오면 → 중심과 특별점 잇기

✓ 접점 → 접선과 수직



도형의 필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

[단서] → [답]

✓ 2변 1각 → 1변

✓ 3변 → 각

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

32

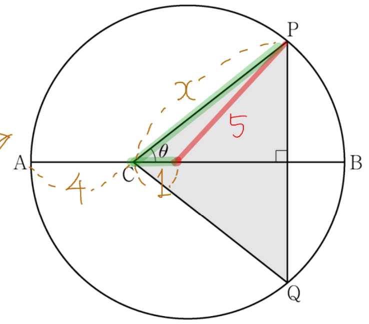
(step1) $S(\theta)$ 파악하기

$\overline{\mathrm{CP}}=x$라고 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}x^2\sin2\theta$$

$$S'(\theta)=\frac{1}{2}\left(2x\frac{dx}{d\theta}\sin2\theta+x^2\cos2\theta\cdot2\right)$$

(step2) $\overline{\mathrm{CP}}=x$ 파악하기



$$5^2=x^2+1^2-2x\cos\theta$$

θ에 대하여 미분하면

$$0=2x\frac{dx}{d\theta}-2\left\{\frac{dx}{d\theta}\cos\theta+x(-\sin\theta)\right\}$$

(step3) $\theta=\frac{\pi}{4}$ 대입하기

$$5^2=x^2+1^2-2x\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-\sqrt{2}x-24=0$$

$$\therefore\ x=4\sqrt{2}\ \text{or}\ \cancel{-3\sqrt{2}}$$

$$0=2x\frac{dx}{d\theta}-2\left\{\frac{dx}{d\theta}\cos\theta+x(-\sin\theta)\right\}$$

$$\Leftrightarrow\ 0=2\cdot4\sqrt{2}\frac{dx}{d\theta}-2\left\{\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+4\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$\therefore\ \frac{dx}{d\theta}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\therefore\ S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\sqrt{2}\left(-4\frac{\sqrt{2}}{7}\right)+0=-\frac{32}{7}$$

$$\therefore\ -7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=32$$