정답 및 해설

1) 정답 ①

$2\times 27^{\frac{1}{3}} = 2\times 3 = 6$

2) 정답 ⑤

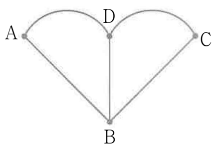
$2+a=7 \quad \therefore\ a=5$

3) 정답 ②

$\lim_{n\to\infty}\frac{6\times 2^n+1}{2^n} = 6$

4) 정답 ③

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬로 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

위 행렬의 모든 성분의 합은 10

5) 정답 ③

$\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x+3)}{x-7} = \lim_{x\to 7}(x+3) = 10$

6) 정답 ⑤

$\mathrm{E}(X) = -4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{2} = 4$

$\therefore\ \mathrm{E}(3X) = 3\mathrm{E}(X) = 12$

7) 정답 ④

수열 $\{a_n\}$의 계차수열이 $\{b_n\}$이므로 $a_7 = a_1 + \sum_{n=1}^{6} b_n$

$a_7 = 51,\ a_1 = 3$이므로 $\sum_{n=1}^{6} b_n = a_7 - a_1 = 48$

8) 정답 ⑤

$\lim_{x\to -0} f(x) + \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2+3 = 5$

9) 정답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4 - a_2 = 2d = 4 \Leftrightarrow d = 2$

$\therefore\ a_n = 2n+2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

10) 정답 ④

$f(x) = \int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx + \int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

$= \int(x+1)\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2+x+C$

그런데 $f(0) = 1$이므로 $f(x) = \frac{1}{2}x^2+x+1$

$\therefore\ f(4) = 13$

11) 정답 ②

임의로 추출한 16가구의 월 식료품 구입비의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(45, 2^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(44 \le \overline{X} \le 47) = \mathrm{P}(44 \le \overline{X} \le 45)+\mathrm{P}(45 \le \overline{X} \le 47)$

$= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$= 0.1915+0.3413$

$= 0.5328$

12) 정답 ③

$\mathrm{A}(1, 0),\ \mathrm{B}(3, 0),\ \mathrm{P}(k, \log_2 k),\ \mathrm{Q}(k, \log_2(k-2))$로부터

점 Q가 선분 PR의 중점이므로

$2\times\log_2(k-2) = \log_2 k \Leftrightarrow (k-2)^2 = k$

$\therefore\ k = 4 \quad (\because\ k > 3)$

$\square\mathrm{ABQP} = \triangle\mathrm{ARP} - \triangle\mathrm{BRQ}$

$= \frac{1}{2}\times 3\times 2 - \frac{1}{2}\times 1\times 1$

$= \frac{5}{2}$

13) 정답 ⑤

$g(x) = f(x) - kx$가 $x = -3$에서 극값을 갖기 위해서는 $g(-3) = 0$이어야 한다. $g'(x) = f'(x) - k$로부터

$g'(-3) = f'(-3) - k = 0 \Leftrightarrow 8-k = 0 \quad \therefore\ k = 8$

14) 정답 ④

$f'(x) = x^2-1$로부터 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + C$

그런데 $f(0) = 0$이므로 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

$\frac{1}{3}x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$

$f(x)$가 기함수이므로 구하고자 하는 넓이는

$2\times\int_0^{\sqrt{3}}\left\{-\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\right\}dx = 2\times\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$

$= 2\times\left\{\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)-(0-0)\right\}$

$= \frac{3}{2}$

15) 정답 ④

$\mathrm{P}(A\cap B) = k$ (k는 상수)라 놓으면

$\mathrm{P}(A\cap B^C) = \mathrm{P}(A^C\cap B) = \frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B^C) + \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} + k$

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A^C \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} + k$

그런데 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{3}$ 이므로

$\left(\frac{1}{6}+k\right)+\left(\frac{1}{6}+k\right)-k = \frac{2}{3} \quad \therefore\ k = \frac{1}{3}$

16) 정답 ②

B의 속력을 v_B라 하면, A의 속력은 $v_A = 0.9v_B$라 놓을 수 있다.

$L_A = 80 + 28\log\frac{0.9v_B}{100} - 14\log\frac{d}{25}$,

$L_B = 80 + 28\log\frac{v_B}{100} - 14\log\frac{d}{25}$ 로부터

$L_B - L_A = 28\left(\log\frac{0.9v_B}{100} - \log\frac{v_B}{100}\right) = 28\log 0.9$

$= 28\left(\log\frac{9}{10}\right) = 28(2\log 3 - 1) = 56\log 3 - 28$

17) 정답 ①

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$라 하면 $b_{n+1} = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$ 으로부터

$b_{n+1} = \frac{S_n}{n} \Leftrightarrow n b_{n+1} = S_n \cdots$ ㉠

마찬가지 논리로

$b_{n+2} = \frac{S_{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)b_{n+2} = S_{n+1} \cdots$ ㉡

이므로 ㉡－㉠ 으로부터

$(n+1)b_{n+2} - n b_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$\Leftrightarrow (n+1)b_{n+2} - n b_{n+1} = b_{n+1}$

$\Leftrightarrow (n+1)b_{n+2} = (n+1)b_{n+1}$

$\therefore b_{n+2} = b_{n+1}$ ($\because n \geq 1$)

또한 ㉡÷㉠ 으로부터 $\frac{(n+1)b_{n+2}}{n b_{n+1}} = \frac{S_{n+1}}{S_n}$ 이므로

$S_{n+1} = \boxed{\frac{n+1}{n}} \times S_n$

$S_n = S_1 \times \frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$

$= 10 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n}{n-1}$

$= \boxed{10n}$

$f(n) = \frac{n+1}{n}$, $g(n) = 10n$ 이므로

$f(5) \times g(6) = \frac{6}{5} \times 60 = 72$

18) 정답 ③

$AB - B^2 = E \cdots$ ㉠, $B^3 + B = E \cdots$ ㉡

ㄱ. ㉠의 양변에 B를 곱하면 $AB^2 - B^3 = B$

㉡으로부터 $B^3 = E - B$이므로

$AB^2 - (E - B) = B \Leftrightarrow AB^2 = E$ (참)

ㄴ. ㉠으로부터 $(A-B)B = E \Leftrightarrow B(A-B) = E$

$\therefore AB = BA$ (참)

ㄷ. ㉠으로부터 $AB = B^2 + E$의 양변에 B^{-1}을 곱하면

$A = B + B^{-1} \Leftrightarrow A - B = B^{-1} \cdots$ ㉢

㉡으로부터 $B^3 = E - B$의 양변에 B^{-1}을 곱하면

$B^2 = B^{-1} - E \Leftrightarrow B^2 + E = B^{-1} \cdots$ ㉣

㉢, ㉣로부터 $A - B = B^2 + E$

$\therefore A - B^2 = B + E$ (거짓)

19) 정답 ①

1) $d = 0$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c = 10$

(나)조건의 $a+b+c \leq 5$에 모순

2) $d = 1$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c = 7$

(나)조건의 $a+b+c \leq 5$에 모순

3) $d = 2$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c = 4 \quad \therefore {}_3\mathrm{H}_4 = 15$

4) $d = 3$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c = 1 \quad \therefore {}_3\mathrm{H}_1 = 3$

1), 2), 3), 4)로부터 구하고자 하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $15 + 3 = 18$

20) 정답 ②

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 $y = 3x(x-1)$의 교점 A_n, P_n의 좌표는

$(1, 0)$, $\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}$

$= 2 - \frac{4}{9}$

$= \frac{14}{9}$

21) 정답 ④

$(x^4 - 4x^3 + 10x - 30) - (2x+2) > 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 8x - 32 > 0$

$\Leftrightarrow (x^3 + 8)(x - 4) > 0$

로부터

$$f(t)=\begin{cases} t^4-4t^3+8t-32 & (t<-2,\ t>4) \\ -t^4+4t^3-8t+32 & (-2\le t\le 4)\end{cases}$$

$x=t$인 지점에서의 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 서로 달라야 하므로 $y=f(t)$의 개형이 바뀌는 $t=-2,\ 4$와 $f'(t)=0$을 만족하는 $t=-2,\ 1-\sqrt{3}\ \ 1,\ 1+\sqrt{3},\ 4$이 주어진 조건을 만족한다.

따라서 구하고자 하는 답은 $-2+(1-\sqrt{3})+1+(1+\sqrt{3})+4=5$

22) 정답 12

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $3a_5=a_7$으로부터

$3\times(4r^4)=4r^6 \quad \therefore\ r^2=3$

$a_3=a_1\times r^2$이므로 $a_3=12$

23) 정답 8

$f'(x)=2x-2$이므로 $f'(5)=8$

24) 정답 16

$\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$의 양변에 $\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$을 곱하면

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3&-1\\-4&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$의 해 또한 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$이므로 이를 대입하면

$-12+a=4 \quad \therefore\ a=16$

25) 정답 4

$f(x)=\int_0^x(2at+1)\,dt$의 양변을 미분하면 $f'(x)=2ax+1$

$f'(2)=17$이므로 $4a+1=17 \quad \therefore\ a=4$

26) 정답 72

도서관 이용자 300명 중에서 30대가 차지하는 비율이 12%이므로 $(60-a)+b=300\times0.12 \Leftrightarrow a-b=24\ \cdots$ ㉠

도서관 이용자 300명 중에서 임의로 택한 1명이 남성일 때 이 이용자가 20대일 확률과 임의로 택한 1명이 여성일 때 이 이용자가 30대일 확률이 서로 같으므로 $\frac{a}{200}=\frac{b}{100}\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터 $a=48,\ b=24 \quad \therefore\ a+b=72$

27) 정답 110

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\times\frac{\sqrt{an^2+4n}+bn}{\sqrt{an^2+4n}+bn}\right)=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}\right)=\frac{1}{5}$

위 식의 극한값이 존재하므로 $a-b^2=0,\ \frac{4}{\sqrt{a}+b}=\frac{1}{5}$

따라서 $a=100,\ b=10 \quad \therefore\ a+b=110$

28) 정답 13

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=2$로부터

$f(x)-x^3=6x+a \Leftrightarrow f(x)=x^3+6x+a$ (a는 상수)라 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to0}f(x)=-7 \Leftrightarrow \lim_{x\to0}(x^3+6x+a)=-7 \Leftrightarrow a=-7$

$\therefore\ f(x)=x^3+6x-7 \quad \therefore\ f(2)=13$

29) 정답 35

$\mathrm{P}(X\le1)+\mathrm{P}(X\le7)=1,\ \mathrm{P}(X\le2)+\mathrm{P}(X\le6)=1,$

$\mathrm{P}(X\le3)+\mathrm{P}(X\le5)=1,\ \mathrm{P}(X\le4)=\frac{1}{2}$

이므로 $\sum_{n=1}^{7}\mathrm{P}(X\le n)=1+1+1+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

$\therefore\ 10a=35$

30) 정답 53

$\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x),\ g(x)$라 할 때,

$f(m)\le f(x),\ g(m+5f(m))\le g(x)$을 만족시키는 자연수 m의 개수를 $p(x)$라 하면 $\sum_{k=1}^{10}p(2k)=p(2)+p(4)+\cdots+p(20)$

으로부터 $f(m)$은 $\log 20$의 지표보다 작거나 같아야 하므로 0 또는 1이 됨을 알 수 있다.

1) $f(m)=0$일 때,

$0\le f(x),\ g(m)\le g(x)$을 만족하는 한 자리 자연수 m은

$x=2$일 때, $m=1,\ 2$

$x=4$일 때, $m=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$x=6$일 때, $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$x=8$일 때, $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

$x=10$일 때, $m=1$

$x=12$일 때, $m=1$

$x=14$일 때, $m=1$

$x=16$일 때, $m=1$

$x=18$일 때, $m=1$

$x=20$일 때, $m=1,\ 2$

2) $f(m)=1$일 때,

$1\le f(x),\ g(m+5)\le g(x)$을 만족하는 두 자리 자연수 m은

$x=10$일 때, $m=95$

$x=12$일 때, $m=95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$

$x=14$일 때, $m=95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$

$x=16$일 때, $m=10,\ 11,\ 95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$

$x=18$일 때, $m=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$

$x=20$일 때, $m=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 95,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99$

1), 2)로부터 $\sum_{k=1}^{10}p(2k)=2+4+6+8+1+1+1+1+2+1$

$+5+5+7+9+11=65$