

제 2 교시

수학 영역

5 지선 다형

1. $\sqrt[3]{54} \times 2^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{2h}$ 의

값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

3. $\cos \theta > 0$ 이고 $\sin \theta + \cos \theta \tan \theta = -1$ 일 때, $\tan \theta$ 의 값은?

[3점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x < 3) \\ \sqrt{x+1} - a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 $x=3$ 에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = x(3x+2), \quad f(1) = 6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2} = 5, \quad a_3 = 48$$

일 때, $a_1 + a_4$ 의 값은? [3점]

- ① 39 ② 36 ③ 33 ④ 30 ⑤ 27

7. 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 1$ 이 닫힌구간 $[a, b]$ 에서

감소할 때, $b-a$ 의 최댓값은? (단, a, b 는 $a < b$ 인 실수이다.)

[3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$(x+1)f(x) + (1-x)g(x) = x^3 + 9x + 1, \quad f(0) = 4$$

일 때, $f'(0) + g'(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 좌표평면 위의 두 점 $(0, 0), (\log_2 9, k)$ 를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x + (\log_8 8)y - 2 = 0$ 에 수직일 때, 3^k 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [4점]

- ① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

10. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 - 6t - 2, \quad v_2(t) = -2t + 6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$$x_1(t) = t^3 - 3t^2 - 2t$$

$$x_2(t) = -t^2 + 6t$$

$$x_1(t) - x_2(t) = t^3 - 2t^2 - 8t = 0 \Rightarrow t(t-2)(t-4) = 0$$

$$\int_0^4 |v_2(t)| dt = \int_0^2 (-2t+6) dt + \int_2^4 (2t-6) dt$$

$$= \int_0^2 (-2t+6) dt + \int_2^4 (2t-6) dt$$

$$= \left[-t^2 + 6t\right]_0^2 + \left[t^2 - 6t\right]_2^4 = 9 + 1 = 10$$

11. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_6 = -2, \quad \sum_{k=1}^8 |a_k| = \sum_{k=1}^8 a_k + 42$$

일 때, $\sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값은? [4점]

- ① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

$$a_1 + a_7 + a_7 = -2$$

$$3a_7 + 3d = -2 \quad 3d = -15 \quad d = -5 \quad a = 23$$

$$\sum_{k=1}^8 a_k = 8a + \frac{1+7}{2} \cdot (-5) = 184 - 140 = 44$$

12. 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + a & (x < 0) \\ 3x + a & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$$

가 $x=2$ 에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$ 의 극댓값은? [4점]

- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$$g'(x) = f(x) \quad g'(2) = 0 \quad \therefore a = -6$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x - 6 & (x < 0) \\ 3x - 6 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+2)(x-1) & (x < 0) \\ 3(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g(2) = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} (3x^2 + 3x - 6) dx$$

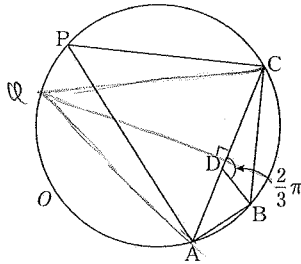
$$= \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x \right]_{-4}^{-2} = 26$$

13. 그림과 같이

$$2\overline{AB} = \overline{BC}, \quad \cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA} = 6\sqrt{10}$ 이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB = \frac{2}{3}\pi$ 일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는?

[4점]



- ① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

$$\cos \angle COA = -\cos \angle ABC = \frac{5}{8}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos \angle COA \\ &= 2 \cdot 360 - 2 \cdot 360 \cdot \frac{5}{8} = 210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{let } a = \overline{AB} \quad 210 &= a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) \\ &= \frac{15}{2}a^2 \quad a^2 = \frac{540}{15} = 36 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 6 \quad \overline{AC} = 2a = 12$$

$$2R = \frac{12}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad R = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

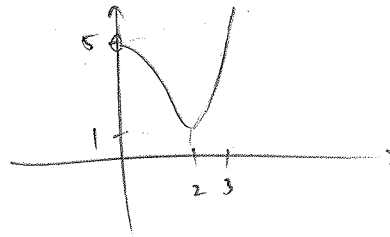
14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 f(x)는

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + \frac{a^2}{4} + b^2 & (x \leq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 5 & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수를 g(t)라 하자. 함수 g(t)가 $t=k$ 에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$$x > 0 \quad f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$



$t=1$ 에서 불연속

i) $\frac{a^2}{4} + b^2 = 5$ 인 경우

극소값 $f(2) = b^2 - \frac{3a^2}{4} = 1$

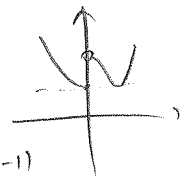


$$a^2 = 4 \quad b^2 = 4 \quad (a, b) = (2, 2), (-2, -2) \quad (a, 0)$$

ii) $\frac{a^2}{4} + b^2 > 5$ 인 경우 (x)

iii) $\frac{a^2}{4} + b^2 < 5$ 인 경우

$$\frac{a^2}{4} + b^2 = 1 \quad a=0$$



$$(a, b) = (2, 0), (0, 1), (0, -1)$$

by i), ii), iii) \rightarrow 5개

15. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & (a_n > n) \\ 3n - 2 - a_n & (a_n \leq n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5 = 5$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 곱은?

[4점]

- ① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

Handwritten work for problem 15:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \\
 & & & 5 & - & 5 - 4 \\
 & & & & & -1 \quad \times \\
 & & 5 & - & 5 & \\
 & & & & & 2 \\
 & & & & & - & -1, 2 \\
 & & & & & & \textcircled{40}
 \end{array}$$

단답형

16. 방정식 $4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오.

3 [3점]

17. $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 3) dx - \int_2^0 (2x + 1) dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

16

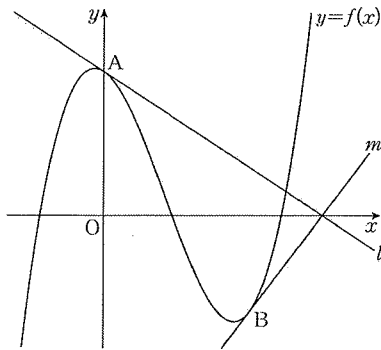
18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^9 a_k = 137, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^9 2a_k = 101$$

일 때, a_{10} 의 값을 구하시오. [3점] 113

19. 실수 a 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + 2$ 이다.

곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $A(0, 2)$, $B(2, f(2))$ 에서의 접선을 각각 l , m 이라 하자. 두 직선 l , m 이 만나는 점이 x 축 위에 있을 때, $60 \times |f(2)|$ 의 값을 구하시오. [3점] 80



$$l: y = ax + 2 \quad f'(x) = 3x^2 - 5x + a$$

$$m: y = (a+2)(x-2) + 2a = (a+2)x - 4$$

$$ax + 2 = (a+2)x - 4 \quad x = 3 \quad 3a + 2 = 0$$

$$a = -\frac{2}{3} \quad m: y = \frac{4}{3}x - 4 \quad f(2) = -\frac{4}{3}$$

$$60 |f(2)| = 80$$

20. 두 함수 $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = \cos \frac{\pi}{3}x$ 에 대하여

$0 \leq x < 12$ 에서 방정식

$$f(g(x)) = g(x)$$

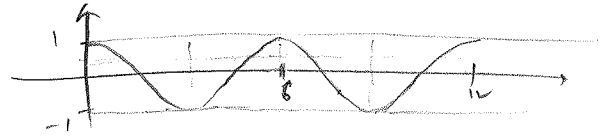
를 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합을 구하시오. [4점]

36

$$let \quad t = g(x)$$

$$f(t) = t \quad 2t^2 + 2t - 1 = t \quad 2t^2 + t - 1 = 0$$

$$(2t-1)(t+1) = 0 \quad t = \frac{1}{2} \text{ or } -1$$



$$12 + 12 + 12 = 36$$

21. $a > 2$ 인 실수 a 에 대하여 기울기가 -1 인 직선이 두 곡선

$$y = a^x + 2, \quad y = \log_a x + 2$$

와 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 선분 AB 를 지름으로 하는 원의 중심의 y 좌표가 $\frac{19}{2}$ 이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$ 일 때, a^2 의 값을 구하시오. [4점]

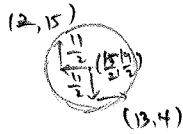
$$y = a^x + 2, \quad y = \log_a x + 2$$

($y = x + 2$ 대칭)

$$r = \frac{11}{\sqrt{2}}, \quad \text{중심 } (\frac{15}{2}, \frac{19}{2}) \quad \frac{15}{2} - \frac{11}{2} = 2, \quad \frac{19}{2} - \frac{11}{2} = 4$$

$$A(2, 15) \quad B(13, 4)$$

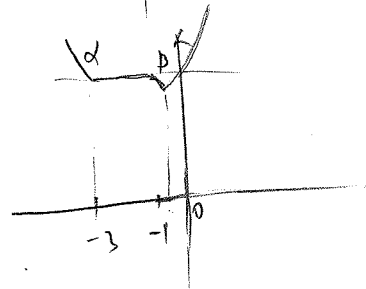
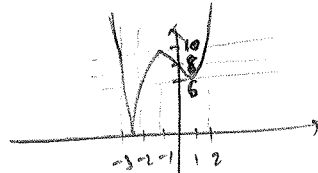
$$a^2 + 2 = 15 \quad a^2 = 13$$



22. 함수 $f(x) = |x^3 - 3x + 8|$ 과 실수 t 에 대하여

단원구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $g(t)$ 는 $t = \alpha$ 와 $t = \beta$ 에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta = m+n\sqrt{6}$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 정수이다.) [4점]

$$\text{let } g(x) = x^3 - 3x + 8 \quad g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$



$$f(\alpha) = f(\beta+2) \quad (\alpha = -3)$$

$$\beta^3 - 3\beta + 8 = (\beta+2)^3 - 3(\beta+2) + 8$$

$$6\beta^2 + 12\beta - 6 + 8 = 0$$

$$3\beta^2 + 6\beta + 1 = 0 \quad \beta = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

$$\beta = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (-1 < \beta < 0)$$

$$\therefore \alpha\beta = 3 - \sqrt{6} \quad m+n = 2$$

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5 지선 다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{2^n - 3^n}$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{1}{3}$
 ② $-\frac{1}{6}$
 ③ 0
 ④ $\frac{1}{6}$
 ⑤ $\frac{1}{3}$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + b_n}{1 + 2b_n}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$
 ② $\frac{1}{2}$
 ③ $\frac{2}{3}$
 ④ $\frac{5}{6}$
 ⑤ 1

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$2n+3 < a_n < 2n+4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\text{let } a_n = 2n \quad \frac{10}{2} = 5$$

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = a_1 + 2$$

를 만족시킨다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + n}{a_n - n + 1} = 3$ 일 때, a_{10} 의 값은?

(단, $a_1 > 0$) [3점]

- ① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

$$a_n - a_1 + (n-1)(a_1+2) = n(a_1+2) - 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(a_1+2) - 4 + n}{n(a_1+2) - 2 - n + 1} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2a_1+5) - 4}{n(a_1+1) - 1} = 3$$

$$\therefore \frac{2a_1+5}{a_1+1} = 3 \quad a_1 = 2$$

$$a_n = 4n - 2 \quad \therefore a_{10} = 38$$

27. $a_1 = 3, a_2 = 6$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k (b_k)^2 = n^3 - n + 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

$a_1 (b_1)^2 = 3$

$n \geq 2$ $a_n (b_n)^2 = (n+1)^3 - n^3 - 1$
 $= 3n^2 - 3n = 3n(n-1)$

$\therefore b_n^2 = n-1$ $a_n = 3n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n-1} \sqrt{2n-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

28. 자연수 n 에 대하여 직선 $y = 2nx$ 가 곡선 $y = x^2 + n^2 - 1$ 과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n 이라 하자. 원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P 에 대하여 삼각형 $A_n B_n P$ 의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P 를 P_n 이라 할 때, 삼각형 $A_n B_n P_n$ 의 넓이를 S_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$x^2 - 2nx + n^2 - 1 = 0$ $(n-n-1)(n-n+1) = 0$

$A_n (n-1, 2n^2-2n)$ $B_n (n+1, 2n^2+2n)$

$|A_n B_n| = \sqrt{4 + 16n^2} = 2\sqrt{4n^2+1}$

$(2, 0)$ 이 직선 $y = 2nx$ 에서 $d = 2nx - y = 0$

$d = \frac{|4n|}{\sqrt{4n^2+1}}$ $\therefore S_n = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{4n^2+1} \cdot \left(\frac{|4n|}{\sqrt{4n^2+1}} + 1\right)$
 $= (4n + \sqrt{4n^2+1})$

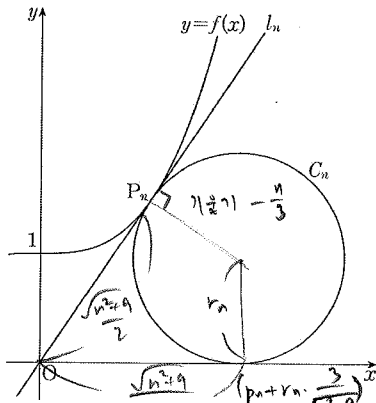
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + \sqrt{4n^2+1}}{n} = 6$

단답형

29. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \frac{4}{n^3}x^3 + 1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선을 l_n , 접선 l_n 의 접점을 P_n 이라 하자. x 축과 직선 l_n 에 동시에 접하고 점 P_n 을 지나는 원 중 중심의 x 좌표가 양수인 것을 C_n 이라 하자. 원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라 할 때, $40 \times \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(4r_n - 3)$ 의 값을 구하시오. [4점] 210



$$P_n(x, f(x)) \quad f(x) = \frac{4x^3}{n^3} + 1 \quad \left. \begin{matrix} 12x^2 = \frac{4x}{n^2} \\ x = \frac{n}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P_n\left(\frac{n}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$t^3 = \frac{n^3}{8} \quad t = \frac{n}{2} \quad P_n\left(\frac{n}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{n}{2} + r_n \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{n^2+9}}{2}$$

$$r_n = \frac{\sqrt{n^2+9}}{3} \left(\frac{\sqrt{n^2+9}}{2} - \frac{n}{2} \right) = \frac{n^2+9 - n\sqrt{n^2+9}}{6}$$

$$= \frac{(\sqrt{n^2+9})(\sqrt{n^2+9} - n)}{6} = \frac{9\sqrt{n^2+9}}{6(\sqrt{n^2+9} + n)}$$

$$= \frac{3\sqrt{n^2+9}}{2(\sqrt{n^2+9} + n)}$$

$$4r_n - 3 = \frac{6\sqrt{n^2+9} - 3\sqrt{n^2+9} - 3n}{\sqrt{n^2+9} + n} = \frac{3\sqrt{n^2+9} - 3n}{\sqrt{n^2+9} + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(4r_n - 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{3(\sqrt{n^2+9}) - 3n}{(\sqrt{n^2+9} + n)}$$

$$= \frac{2n}{4}$$

$$40 \cdot \frac{2n}{4} = \underline{210}$$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 자연수 m 에 대하여 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) \left(\frac{x}{m}\right)^n + x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n + 1}$$

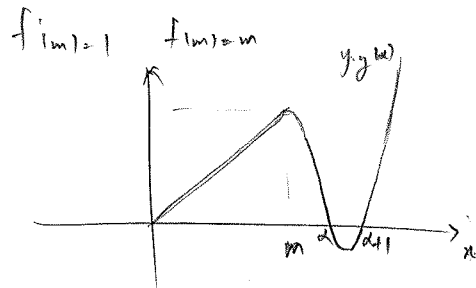
라 하자. 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 미분가능하고, $g'(m+1) \leq 0$ 이다.
- (나) $g(k)g(k+1) = 0$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수는 3이다.
- (다) $g(l) \geq g(l+1)$ 을 만족시키는 자연수 l 의 개수는 3이다.

$g(12)$ 의 값을 구하시오. [4점] 84

$$x > 0 \text{ 일 때}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < m) \\ \frac{f(x) + x}{2} & (x = m) \\ f(x) & (x > m) \end{cases}$$



$$m-d-1, d, d+1$$

$$\text{let } f(x) = (x-d)(x-d-1)(x-p) \quad \text{let } m = d-2$$

$$f(x) = (x-m-2)(x-m-3)(x-p)$$

$$f'(x) = (x-m-2)(x-m-3) + (x-m-2)(x-p) + (x-m-3)(x-p)$$

$$f'(m) = 1 \quad (6-2)(m-p) + 3(m-p) = 1 \quad \Rightarrow -5m + 5p = -5$$

$$m-p = 1 \quad f(m) = m \quad 6(m-p) = m \quad \Rightarrow m = 6$$

$$f(x) = (x-8)(x-9)(x-5) \quad g(12) = 6 \cdot 3 \cdot 1 = 84$$

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.