2025학년도 수능 대비

지인선 N제

Season 1

수1, 수2 220문항

총 20회분의 다채로운 문항 구성

발전해가는 수능 대비에 최적화된 하프 실전모의고사 N제

해설에 앞서 여러분께 드리는 인사

여러분 안녕하세요!
2025학년도 지인선n제 지면해설과 손해설을 작성한 이연이라고 합니다.

올해 지인선n제는, 지면해설과 손해설, 심지어는 지인선님의 영상해설까지 제공됩니다.
도대체 이 많은 해설들이 무슨 차이가 있는지 궁금하실 것 같아서,
한 번 해설 가이드를 작성해보려고 합니다.

먼저 지면해설에 대해 소개하겠습니다.
2025 지인선n제의 지면해설은, 여러분의 이해를 돕기 위해 가장 친절하고 상세하게 풀어놓은 해설입니다.
해설을 읽는 사람이, 해설의 흐름을 따라가며 이해 안 되는 부분이 최대한 없도록 작성하였습니다.
또한 지면해설에는, 뛰어난 검토진 분들의 여러 의견이 반영되어 있습니다.
즉, 해설을 통해 저뿐만 아니라 다른 여러 뛰어난 분들의 생각도 배워갈 수 있을 것입니다.
마지막으로, 지면해설에는 '여담' 과 '관련 기출'이 함께 담겨 있습니다.
'여담' 부분에는 추가적으로 알아두면 좋은 공식, 이론, 추가설명, 혹은 해설 요약 등이 담겨 있습니다.
또한 문항 제작자이신 지인선님께서 선별한 관련 기출도 담겨있으니, 여러분의 학습에 더욱 도움이 될 것이라 생각합니다.

다음으로 손해설에 대해 이야기해보겠습니다.
손해설은, 쉽게 말해 지면해설의 요약본이라고 이해하시면 됩니다.
'나는 굳이 이 문제 풀이를 다 읽어볼 필요 없고, 흐름 정도만 훑어보고 싶다' 싶으실 때 손해설을 보시는 것을 추천합니다.
만약 문제를 푸는 과정에서 어려움을 느꼈다면, 손해설보다는 지면해설을 참고하시는 것을 추천합니다.

마지막으로 지인선님의 영상해설에 대해 이야기하겠습니다.
앞서 소개했듯이 지면해설과 손해설은, 실전적으로 풀이를 줄이는 과정에 초점을 맞춘 해설이 아니라, 이해 안 되는 부분 없이 배워갈 수 있도록 작성한 해설입니다.
그러다 보니 해설을 작성하는 도중 '하 내가 시험장에 있었다면 그냥 바로 생략하고 넘어갔을 텐데' 라는 생각이 들었던 부분들도, 지면해설에는 모두 담을 수밖에 없었습니다.
이러한 점을 보완할 수 있는 부분이 바로 지인선님의 영상해설입니다!
지인선님의 영상해설은, 실전적인 풀이를 담아놓은 해설입니다.

실제로 저도 지인선님의 영상해설을 보면서, '아 이 부분은 이렇게 해서 쉽게 처리할 수 있겠구나' 등을 배워갈 수 있었습니다. (~~영상해설 은근 재밌더라고요.~~)
너무 스킬에 의존하거나, 혹은 너무 상세하게 따져가며 넘어가는 풀이가 아닌, 가장 시험장에서 적용하기 좋은 풀이를 지인선님의 영상해설이 담아냈다고 생각합니다.

요약하면,
지면해설은 가장 자세한 풀이이며,
손해설은 요약되어 훑어보기 좋은 풀이이고,
영상해설은 가장 실전적인 풀이입니다.

2025 지인선n제는 정말 많은 노력이 담긴 n제입니다.
문항 출제 과정에서, 지인선님은 정말 사소한 부분들까지도 계속 고민하며 수정에 수정을 거듭하셨습니다.
지인선님께서 정말 지인선n제에 애정이 있다는 것을 느낄 수 있었습니다.
저도, 손해설과 지면해설을 작성하는 과정에서 동일한 문제를 최소 4번씩 풀어보며 조금이라도 이해가 안 될 것 같은 부분들을 수정하고 보완했습니다.
검토진 분들도, 문항검토와 해설검토에 최선을 다해주셨고, 특히 해설 검토하는 과정에서 더 명확하고 이해하기 쉬운 해설 방향에 대해 수많은 의견을 주셔서, 그 의견들을 해설에 반영했습니다.

이제 남은 건,
여러분이 지인선n제를 통해 배워가고 수학 실력을 상승시키는 과정,
그리고 수능 수학에서 원하는 점수를 쟁취하기 위해 노력하는 과정,
수능 수학에서 원하는 점수를 쟁취하는 과정 뿐입니다.

여러분의 2025학년도 수능을 응원합니다!

지인선 N제 빠른 정답

1회 정답

8	②	*9*	②	*10*	①	*11*	③	*12*	③
13	②	*14*	④	*15*	④	*20*	45	*21*	33
22	39								

2회 정답

8	②	*9*	⑤	*10*	②	*11*	④	*12*	⑤
13	③	*14*	⑤	*15*	④	*20*	32	*21*	18
22	259								

3회 정답

8	①	*9*	④	*10*	②	*11*	①	*12*	②
13	③	*14*	①	*15*	⑤	*20*	12	*21*	98
22	13								

4회 정답

8	④	*9*	③	*10*	②	*11*	②	*12*	④
13	②	*14*	④	*15*	②	*20*	50	*21*	30
22	45								

5회 정답

8	②	*9*	①	*10*	④	*11*	③	*12*	③
13	④	*14*	⑤	*15*	④	*20*	18	*21*	98
22	100								

6회 정답

8	②	*9*	②	*10*	①	*11*	③	*12*	②
13	①	*14*	②	*15*	②	*20*	23	*21*	31
22	68								

7회 정답

8	⑤	*9*	④	*10*	①	*11*	④	*12*	⑤
13	③	*14*	⑤	*15*	③	*20*	36	*21*	35
22	457								

8회 정답

8	①	*9*	③	*10*	⑤	*11*	⑤	*12*	①
13	②	*14*	④	*15*	③	*20*	24	*21*	66
22	26								

9회 정답

8	④	*9*	①	*10*	⑤	*11*	④	*12*	③
13	②	*14*	④	*15*	③	*20*	28	*21*	64
22	14								

10회 정답

8	③	*9*	③	*10*	①	*11*	③	*12*	③
13	②	*14*	⑤	*15*	③	*20*	19	*21*	130
22	44								

수학 영역

11회 정답

8	②	9	③	10	②	11	②	12	③
13	④	14	④	15	④	20	315	21	25
22	169								

12회 정답

8	③	9	③	10	③	11	④	12	④
13	③	14	⑤	15	②	20	324	21	36
22	93								

13회 정답

8	⑤	9	⑤	10	①	11	②	12	④
13	④	14	③	15	⑤	20	114	21	89
22	62								

14회 정답

8	③	9	②	10	④	11	②	12	②
13	③	14	⑤	15	④	20	7	21	39
22	34								

15회 정답

8	④	9	⑤	10	③	11	②	12	④
13	③	14	③	15	④	20	20	21	27
22	257								

16회 정답

8	②	9	⑤	10	⑤	11	②	12	④
13	④	14	②	15	④	20	17	21	59
22	33								

17회 정답

8	②	9	③	10	⑤	11	③	12	③
13	①	14	②	15	③	20	30	21	33
22	14								

18회 정답

8	③	9	②	10	④	11	①	12	①
13	②	14	③	15	⑤	20	57	21	110
22	13								

19회 정답

8	④	9	④	10	③	11	③	12	②
13	②	14	③	15	⑤	20	706	21	25
22	96								

20회 정답

8	③	9	⑤	10	④	11	②	12	②
13	④	14	③	15	④	20	351	21	56
22	14								

제 2 교시

수학 영역

1회 정답

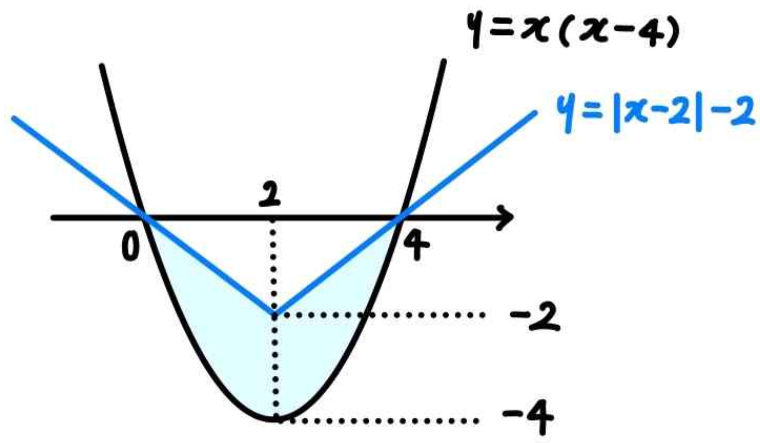
8	②	9	②	10	①	11	③	12	③
13	②	14	④	15	④	20	45	21	33
22	39								

8.

정답: ②

해설:

두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 x축과 $y=x(x-4)$로 둘러싸인 부분의 넓이에서, x축과 $y=|x-2|-2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 값이다.



x축과 $y=x(x-4)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{6}\times|1|\times 4^3=\frac{32}{3}$이고,

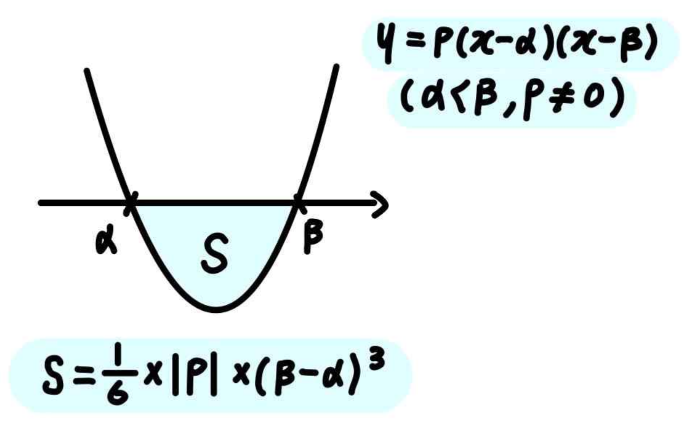
x축과 $y=|x-2|-2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$이므로,

두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{32}{3}-4=\frac{20}{3}$이다.

여담:

두 넓이의 차이로 해석해보고, 넓이공식 복습하고 넘어가자.



9.

정답: ②

해설 1: 수식적으로 해결하기

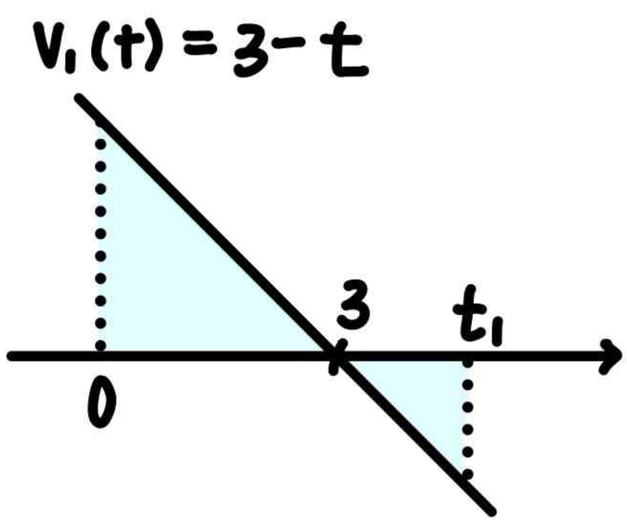
$\int_0^{t_1}|3-t|dt=5$인 시각 t_1을 찾아보면,

$\int_0^3(3-t)dt=\frac{9}{2}$이므로 $t_1>3$이고,
$\int_3^{t_1}(t-3)dt=\frac{1}{2}$이어야 하므로 $t_1=4$이다.

따라서 점 Q의 위치는 (처음위치)+(위치의 변화량)이므로

$0+\int_0^4 tdt=8$ 이다.

해설 2: 그래프로 해결하기



출발한 시각부터 $t=t_1$까지 점 P의 움직인 거리는
$\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times(t_1-3)^2=5$이므로 $t_1=4$이다.

따라서 점 Q의 위치는 (처음위치)+(위치의 변화량)이므로
$0+\int_0^4 tdt=8$ 이다.

여담:

1. p의 이동거리를 구할 때 그래프로 살펴보면 편하다.

2. (나중위치)=(처음위치)+(위치의 변화량)

10.

정답: ①

해설:

step1

근과 계수의 관계를 이용하면

$a_3+a_4=-2a_1$이고, ……ㄱ

$a_3\times a_4=-2a_2$이다. ……ㄴ

step2

$a_n=a+(n-1)d$ (단, $d\neq0$)라 하면,

ㄱ에 의해 $2a+5d=-a$이고,

ㄴ에 의해 $(a+2d)(a+3d)=-2(a+d)$이다.

위 식을 정리하면 $a=-\frac{5}{3}d$이므로 $\frac{1}{3}d\times\frac{4}{3}d=\frac{4}{3}d$이고,

따라서 $d=3$, $a=-5$이다.

step3

그러므로 $a_6=a+5d=10$이다.

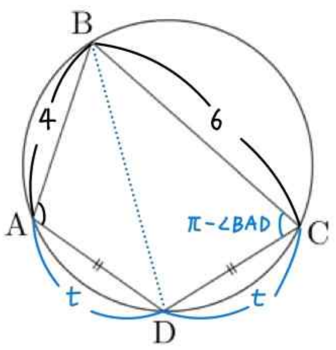
여담:

근과 계수의 관계에 주목하자.

11.

정답: ③

해설:



step1

보조선 $\overline{\mathrm{BD}}$를 그어보면, 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에 대해 코사인 법칙을 사용할 수 있다.

이때 사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이므로 $\angle\mathrm{BCD}=\pi-\angle\mathrm{BAD}$이고, $\cos\angle\mathrm{BCD}=-\cos\angle\mathrm{BAD}=\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

step2

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}=t$라 하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면
$(\overline{\mathrm{BD}})^2=(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{AD}})^2-2\times(\overline{\mathrm{AB}})\times(\overline{\mathrm{AD}})\times\cos\angle\mathrm{BAD}$이므로,

$(\overline{\mathrm{BD}})^2=4^2+t^2-2\times4\times t\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$이고,

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 적용하면

$(\overline{\mathrm{BD}})^2=(\overline{\mathrm{BC}})^2+(\overline{\mathrm{CD}})^2-2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos\angle\mathrm{BCD}$이므로,

$(\overline{\mathrm{BD}})^2=6^2+t^2-2\times6\times t\times\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

따라서

$(\overline{\mathrm{BD}})^2=t^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}t+16=t^2-2\sqrt{3}t+36$이므로 $t=2\sqrt{3}$이다.

step3

사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABD와 삼각형 BCD의 넓이의 합과 같고,

$\cos\angle\mathrm{BAD}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$이므로 $\sin\angle\mathrm{BAD}=\sin\angle\mathrm{BCD}=\frac{\sqrt{33}}{6}$이다.

따라서

삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{6}=2\sqrt{11}$이고,

삼각형 BCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{6}=3\sqrt{11}$이므로,

사각형 ABCD의 넓이는
$[\triangle\mathrm{ABD}]+[\triangle\mathrm{BCD}]=2\sqrt{11}+3\sqrt{11}=5\sqrt{11}$이다.

여담:

1. 주어진 정보들을 보고 보조선 $\overline{\mathrm{BD}}$를 그으면 주어진 정보를 전부 활용할 수 있다는 점을 파악해 보조선 긋기.

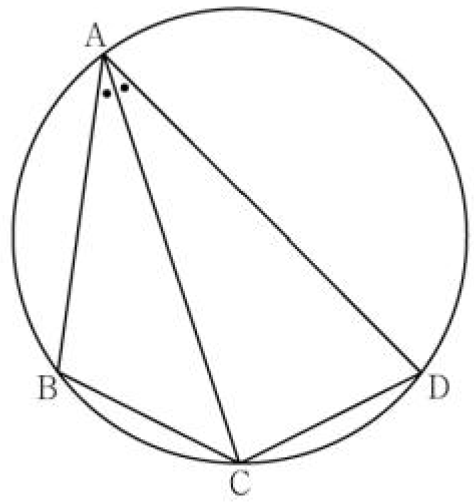
2. 원에 내접하는 사각형에서 마주보는 두 각의 크기의 합은 π 활용하기.

기출 다시보기: 2023학년도 수능 11번

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AD}}=7$, $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

정답: 1번

12.

정답: ③

해설:

step1 삼차함수의 세 근의 합 이용하기

점 A의 x좌표를 a라 하자.

삼차함수의 근과 계수의 관계를 생각할 때,

$f(x)=0$과 $f(x)-(px+q)=0$의 삼차항과 이차항의 계수가 동일하기 때문에, 두 방정식의 세 근의 합은 동일하다.

따라서 $f(x)=0$의 세 근의 합은 $-1+(-1)+a=a-2$이다.

step2

방정식 $f(x)=10x-16$의 세 근의 합도 $a-2$이기 때문에, $y=f(x)$와 $y=10x-16$은 $(a, f(a))$에서 접하고 $(-a-2, f(-a-2))$에서 만난다.

그러므로 $f(x)-(10x-16)=(x-a)^2(x+a+2)$이고, $f(-1)=1$이므로 위 식에 $x=-1$을 대입하면 $a=2$이다.

따라서 $f(x)=(x-2)^2(x+4)+10x-16$이고, $f(3)=21$이다.

여담:

$f(x)=0$과 $f(x)-(px+q)=0$의 세 근의 합은 동일하다는 점, 자주 쓰이는 논리니까 알아두기.

13.

정답: ②

해설:

step1

만약 $f(0)\neq 0$이라면, $k=\dfrac{2-2}{0\text{이 아닌 상수}}=0$이다.

주어진 조건에서 k는 0이 아닌 실수이기 때문에, $f(0)=0$이다.

step2

$f(x)=ax^2+2x$ 라 하자. (단, $a\neq 0$)

주어진 극한을 정리하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\sqrt{x+4}}{f(x)+f(-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+2-\sqrt{x+4}}{2ax^2}=k\text{이고,}$$

유리화하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{4a^2x^2+(8a-1)x}{2ax^2(2ax+2+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to 0}\frac{4a^2x+(8a-1)}{8ax}=k\text{이다.}$$

이때 k의 값이 존재하므로 $8a-1=0$이므로 $a=\dfrac{1}{8}$이고,

$$k=\lim_{x\to 0}\frac{4a^2x+(8a-1)}{8ax}=\frac{a}{2}=\frac{1}{16}\text{이다.}$$

여담:

차근차근 실수만 안 하게 조심하자.

14.

정답: ④

해설:

step1 **조건을 만족시키는 t의 불연속성에 초점 맞춰 해석하기**

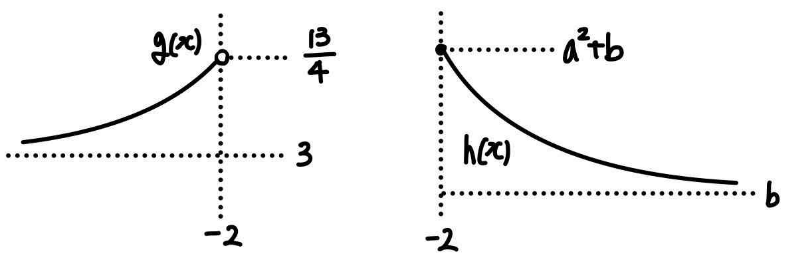
방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 불연속적으로 나온다.

(방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 연속된 구간을 가지지 않는다.)

$g(x)=2^{x}+3\ (x<-2)$

$h(x)=a^{-x}+b\ (x\geq -2)$ 라 하자.

이때 $g(x)$의 치역은 $\left(3, \frac{13}{4}\right)$이고, $h(x)$의 치역은 $(b, a^2+b]$이다.



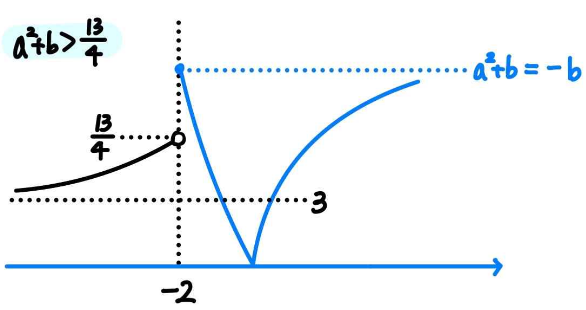
만약 $g(x)$의 치역이 $h(x)$의 치역에 일부라도 포함되지 않는다면, 포함되지 않는 구간에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t는 연속된 구간을 가진다..

그러므로 $\left(3, \frac{13}{4}\right)\subset(b, a^2+b]$이고, $b\leq 3$, $a^2+b\geq\frac{13}{4}$이다.

만약 $0\leq b\leq 3$이라면 구간 $(b, 3)$에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t는 연속된 구간을 가질 것이므로, $b<0$이다.

step2

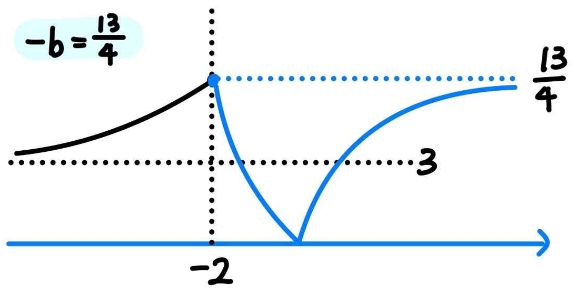
만약 $a^2+b>\frac{13}{4}$라면, 구간 $\left(\frac{13}{4}, a^2+b\right)$에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 연속된 구간으로 나오면 안 되므로 $-b\geq a^2+b$이고, $(a^2+b, -b)$에서도 실수 t가 연속된 구간으로 나오면 안 되므로 $-b=a^2+b$이다.



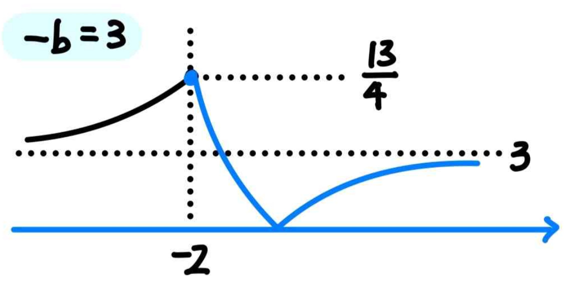
이때 조건을 만족시키는 t는 $t=0$, $t=a^2+b$의 2개이므로 구하는 상황이 아니다.

그러므로 $a^2+b=\frac{13}{4}$이고, 마찬가지로 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 연속된 구간을 가지지 않는다는 논리를 이용하면 $-b=\frac{13}{4}$ 또는 $-b=3$이다.

만약 $-b=\frac{13}{4}$이라면, 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t 는 $t=0$, $t=\frac{13}{4}$의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



그러므로 $-b=3$이고, 이 경우 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t는 $t=0$, $t=3$, $t=\frac{13}{4}$의 3개이다.



따라서 $b=-3$, $a^2+b=\frac{13}{4}$이므로 $a=\frac{5}{2}$이다.

그러므로 $a^2+b^2=\frac{61}{4}$이다.

여담:

1. 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 '**불연속적**'으로 나온다는 점에 주목하기. (방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 연속된 구간을 가지지 않는다.)

2. 만약 불연속성 조건을 이용해 $b<0$을 구하지 않고 시작했다면 따져야 할 경우가 많았을 것이다.

3. 최대한 조건 해석 후 적게 케이스분류하려고 노력했으니, 흐름을 잘 따라가면서 조건 해석하는 논리 잘 보고 넘어가주세요!

기출 다시보기: 2024학년도 9월 모의평가 14번

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x \le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

정답: 2번

15.

정답: ④

해설:

step1

주어진 식에 $x=0$을 대입하면 $\int_0^3 f(t)dt=0$이거나 $\int_0^2 f(t)dt=0$이다.

만약 $\int_0^2 f(t)dt=0$이라면, $xf(x)=a\left(x-\int_0^3 f(t)dt\right)^2\times x$이므로

$f(x)=a\left(x-\int_0^3 f(t)dt\right)^2$이고, 실수 전체의 구간에서 $f(x)\ge 0$ 또는 실수 전체의 구간에서 $f(x)\le 0$ 중 하나만 만족하므로 이 경우 $\int_0^2 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다.

그림참고

따라서 $\int_0^3 f(t)dt=0$이다.

step2

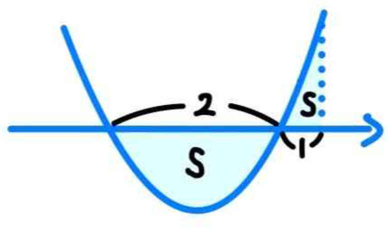
$xf(x)=ax^2\left(x-\int_0^2 f(t)dt\right)$이므로 $f(x)=ax\left(x-\int_0^2 f(t)dt\right)$이다.

$\int_0^2 f(t)dt=p$라고 한다면 $\int_0^3 ax(x-p)dx=a\left(9-\frac{9}{2}p\right)=0$이므로 $p=2$이다.

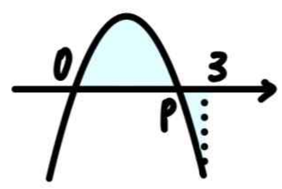
$\int_0^2 ax(x-2)dx=-\frac{a}{6}\times 2^3=p=2$이므로 $a=-\frac{3}{2}$이다.

여담:

이차함수 넓이 비율관계를 이용하면 p의 값을 계산 없이 구할 수 있다. (p는 0과 3의 $2:1$ 내분점)



2 : 1 비율관계 적용가능



⇒ p=2

20.

정답: 45

해설:

step1 a_1 구하기

$a_1=a$라 하자. (단, $a<0$)

a_1이 음수이기 때문에 $a_2=a_1\times a_1=a^2$이고, $a_2>0$이다.

a_2가 양수이기 때문에 $a_3=a_2-2=a^2-2$이다.

만약 $a^2<2$라면 $a_3<0$이기 때문에 $a_4=a^3-2a$일 것이고, 이때 $a_4+3a_1=a^3+a=0$을 만족시키는 $a=0$이므로 음수가 아니기 때문에 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a^2\ge 2$이고, $a_3\ge 0$이기 때문에 $a_4=a^2-4$이다.

$a_4+3a_1=a^2+3a-4=0$이고, $a^2\ge 2$와 $a<0$을 동시에 만족시키는 $a=-4$이다.

step2 나열하며 규칙성 찾기

$a_1=-4$이므로 $a_2=16,\ a_3=14,\ \cdots,\ a_9=2,\ a_{10}=0$이고

$a_{11}=-2$이므로 $a_{12}=8,\ a_{13}=6,\ a_{14}=4,\ a_{15}=2,\ a_{16}=0$이다.

즉, $n=11$일 때부터 a_n의 값은 $-2,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0$이 반복된다.

a_{11}부터 a_{100}까지 총 90개의 항이 있으므로, 90을 주기 6로 나눠보면 $-2,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0$이 몇 번 반복되는지 알 수 있다.

$90=6\times 15$이므로, a_{11}부터 a_{100}까지 $-2,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0$이 15번 반복된다.

그러므로 $|a_m|\le 3$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 $2+3\times 15=47$이다.

따라서 $p=47,\ a_{11}=-2$이므로 $p+a_{11}=45$이다.

여담:

a_n의 범위에 집중하며 a_1의 값 구하고, 나열을 통해 주기를 찾아 p 구하기

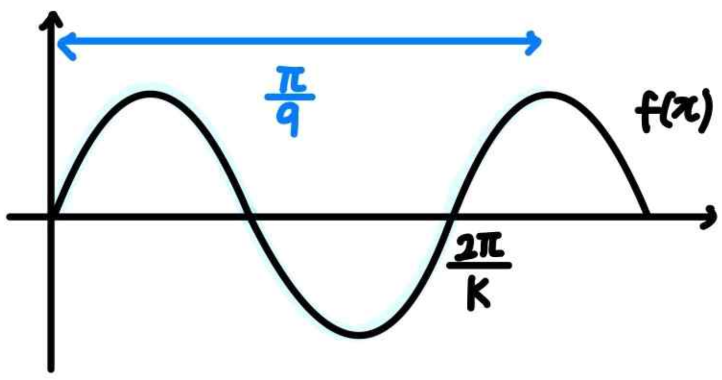
21.

정답: 33

해설:

$f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$이다.

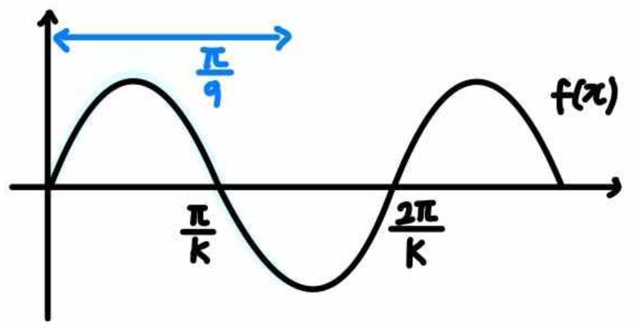
1) $\frac{2\pi}{k}\le\frac{\pi}{9}$인 경우 $(k\ge 18)$

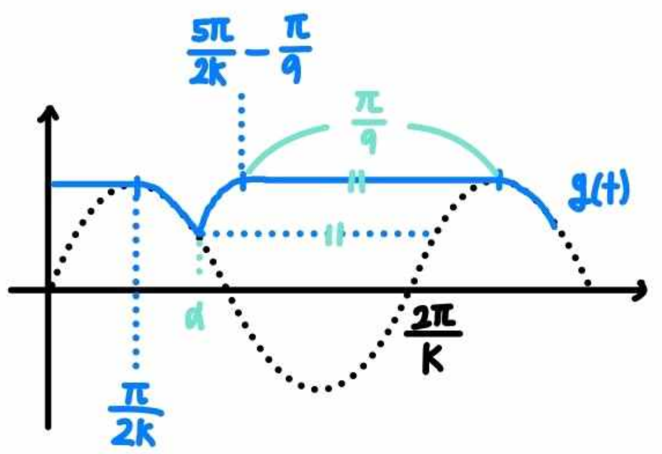


(주기) $\le\frac{\pi}{9}$이므로 t를 어떻게 잡더라도 $\left[t,\,t+\frac{\pi}{9}\right]$에 극대가 포함된다.

따라서 이 경우 $g(t)$는 $g(t)=1$의 상수함수이다.

2) $\frac{\pi}{k}<\frac{\pi}{9}<\frac{2\pi}{k}$인 경우 $(9<k<18)$





최솟값을 가지는 위치의 x좌표 α는 $\frac{\pi}{2k}$와 $\frac{5\pi}{2k}-\frac{\pi}{9}$의 $1:1$

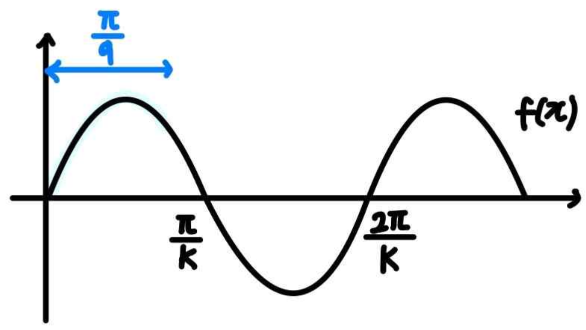
내분점이므로 $\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2k}+\frac{5\pi}{2k}-\frac{\pi}{9}\right)=\frac{3\pi}{2k}-\frac{\pi}{18}$이고,

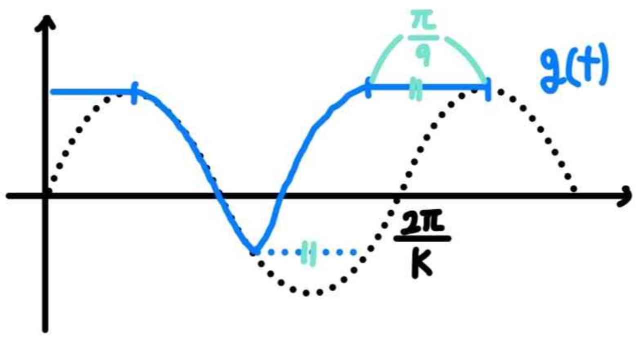
$\sin k\alpha=\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{18}k\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\frac{3}{2}\pi-\frac{k}{18}\pi<\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 이 경우 $15<k<18$이고, 가능한 k는 16, 17이다.

3) $\frac{\pi}{k}\ge\frac{\pi}{9}$인 경우 ($k\le 9$)





이 경우 $g(t)$의 최솟값이 0보다 작거나 같기 때문에 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 가능한 모든 k의 값의 합은 $16+17=33$이다.

여담:

$g(t)$의 그래프 그리는 방법도 아셔야 하나, 최소가 언제 발생하는지가 관건입니다!

$g(t)$의 그래프를 그리는 방법은 자주 등장하니 꼭 알아두세요!

22.

정답: 39

해설:

step1

$f(x)$가 증가함수거나 감소함수라면, 주어진 부등식을 만족시키는 x는 존재하지 않거나, 1개거나, 구간 형태로 나오기 때문에

($x\to\infty$, $x\to-\infty$인 상황을 생각해보면 파악하기 쉽다.)

$f(x)$는 극대 극소를 모두 가지는 개형이다.

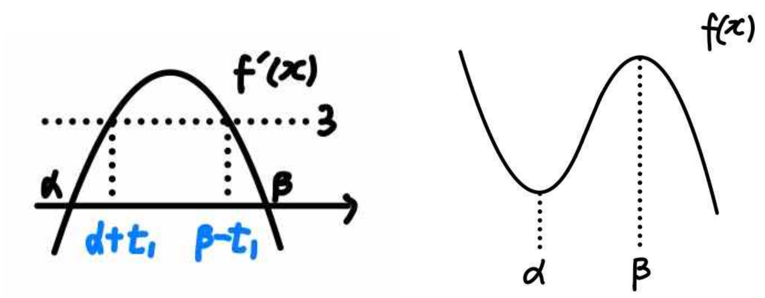
step2

$f'(x)=0$의 두 근을 각각 α, β라 하자. (단, $\alpha<\beta$)

1) $f(x)$의 최고차항 계수가 음수인 경우

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 음수라면,

부등식 $f'(x)\le 3$을 만족시키는 x의 범위는 $x\le\alpha+t_1$ 또는 $x\ge\beta+t_1$으로 표현할 수 있을 것이다. (단, $t_1>0$)

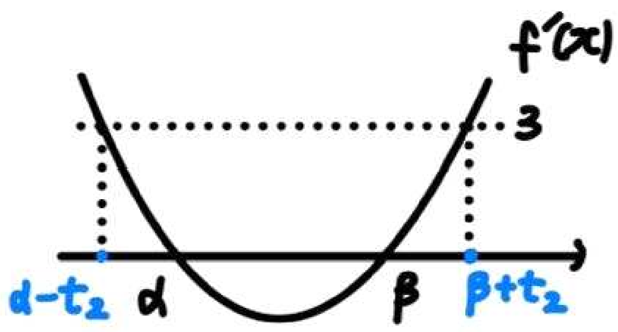


이 경우 $f'(x)\le 3\le f(x)$인 x가 연속적으로 존재하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다. ($x\to-\infty$인 상황을 떠올려보면 이해하기 쉽다.)

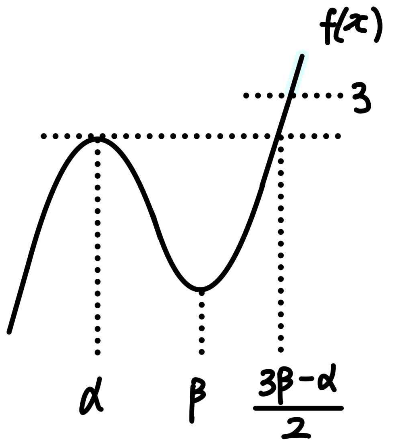
그러므로 $f(x)$의 최고차항 계수는 양수이다.

2) $f(x)$의 최고차항 계수가 양수인 경우

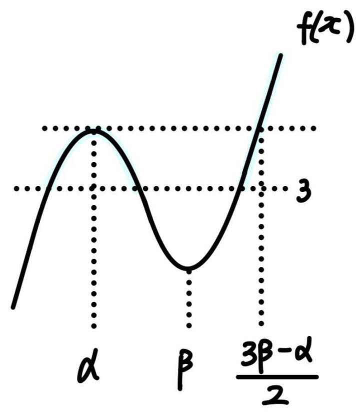
부등식 $f'(x)\le 3$을 만족시키는 x의 범위를 $\alpha-t_2\le x\le\beta+t_2$로 표현할 수 있다. (단, $t_2>0$)

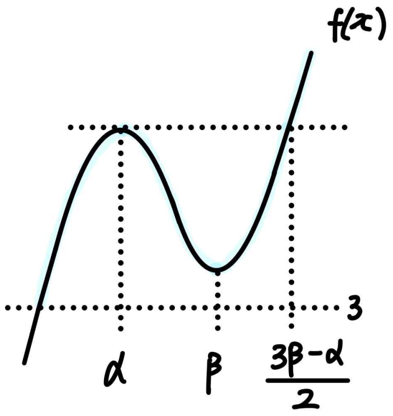


만약 $f(x)$의 극댓값이 3보다 작다면, 부등식을 만족시키는 x는 1개이거나 구간 형태로 나올 것이다.



또한 $f(x)$의 극댓값이 3보다 크다면, 부등식을 만족시키는 x는 구간 형태로 나올 것이다. ($[\alpha, \beta]$ 사이 일부 구간을 생각해보면 이해하기 쉽다.)



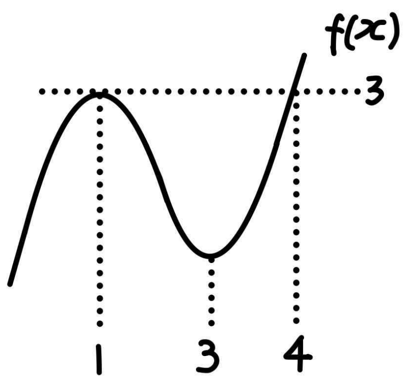


그러므로 $f(x)$의 극댓값은 3이고, $f(x) \geq 3$인 x는 $x=\alpha$, $x \geq \dfrac{3\beta-\alpha}{2}$이다.

따라서 $f'(x) \leq 3 \leq f(x)$인 실수 x가 오직 1과 4뿐이려면

$\alpha=1$, $\beta+t_2=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}=4$여야 하고,

이를 통해 $\beta=3$, $t_2=4$를 알 수 있다.



$f(x)=k(x-1)^2(x-4)+3$이라 한다면, (단, $k>0$)

$f'(x)=3k(x-1)(x-3)$이고,

$f'(\beta+t_2)=f'(4)=9k=3$이므로 $k=\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)^2(x-4)+3$이고, $f(7)=39$이다.

여담:

되게 심플해보이는데 생각보단 추론할 요소가 있는... 재밌는 문제입니다.

1회 14번과 비슷하게 조건을 만족시키는 x의 불연속성 논리와, 구간에 신경쓰면서 다시 한 번 풀어보시길 바랍니다!

2회 정답

8	②	*9*	⑤	*10*	②	*11*	④	*12*	⑤
13	③	*14*	⑤	*15*	④	*20*	32	*21*	18
22	259								

8.

정답: ②

해설:

step1 k 구하기

$a(t)=6t-6$이므로 $a(1)=0$이다.

따라서 $t=1$일 때 $x(1)=4$이다.

주어진 조건에서 $x(0)=0$이므로, $x(t)=t^3-3t^2+kt$이고,

$x(1)=k-2=4$이므로 $k=6$이다.

step2 $x(2)$ 구하기

$x(t)=t^3-3t^2+6t$이므로 $x(2)=8$이다.

여담:

지인선이 작성한 해설이었으나 그걸 지우고 제가 다시 썼습니다.

연아 미안해ㅠ

9.

정답: ⑤

해설:

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)=-\cos\left(\frac{3}{4}\pi-x-\pi\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

이므로,

$\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$이다.

이를 이용하면 방정식 $2\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$의 근은

$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1=0$의 근과 같고,

이는 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$ 또는 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$을 만족시키는 x와 같다.

x의 범위가 $0<x<2\pi$이므로,

$\frac{\pi}{4}+x$의 범위는 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+x<\frac{9\pi}{4}$이다.

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$ 또는 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$을 만족시키는 주어진 범위의 $\frac{\pi}{4}+x$의 값은 $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{6}$이므로,

방정식 $2\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$의 근은

$x=\frac{7\pi}{12}$, $x=\frac{5\pi}{4}$, $x=\frac{23\pi}{12}$이다.

그러므로 모든 실근의 합은 $\frac{15\pi}{4}$이다.

여담:

1. 범위조심

2. 각변환이 기억 안 나는 친구는... 미적분 선택자라면 $\frac{\pi}{2}$에 대한 덧셈정리로 해결하는 것도 하나의 방법이랍니다.

3. 혹시 몰라 작성하는 $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$ 형태의 각변환 방법

->n이 홀수라면 함수가 바뀌고, n이 짝수라면 함수 그대로!

->$0<\theta<\frac{\pi}{2}$라 할 때, $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$가 위치한 사분면에서의 '원래' 삼각함수의 부호가 각변환된 삼각함수의 부호

기출 다시보기: 2019학년도 9월 모의평가 가형 14번

14. 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

정답: 3번

10.

정답: ②

해설1:

step1

$f(x)$의 $(2,1)$에서의 접선을 x축에 대해 대칭시킨 직선을 $g(x)$라 하면,

$g(x)$는 $(2,1)$을 x축에 대해 대칭시킨 점인 $(2,-1)$과 $(3,1)$을 지나므로, $g(x)=2x-5$이다.

step2

$y=\int_1^x f(t)dt$와 $y=g(x)$가 $(3,1)$에서 접하므로

함숫값이 동일함을 이용하면 $\int_1^3 f(t)dt=g(3)=1$이고,

미분계수가 동일함을 이용하면 $f(3)=g'(3)=2$이다.

step3

$f(x)$의 $(2,1)$에서의 접선은 $g(x)$를 x축에 대해 대칭시킨 직선이므로 $y=-2x+5$이다.

$f(x)=p(x-2)^2(x-a)-2x+5$라 한다면, (단, $p\neq 0$)

$f(3)=p(3-a)-1=2$이므로 $p(3-a)=3$이고,

$\int_1^3 f(t)dt=\int_1^3 p(x-2)^2(x-a)+(-2x+5)dx=1$이다.

또한

$\int_1^3(-2x+5)dx=2$이므로 $\int_1^3 p(x-2)^2(x-a)dx=-1$이고,

$\int_1^3 p(x-2)^2(x-a)dx=p\int_1^3\{x^3-(a+4)x^2+(4a+4)x-4a\}dx$

$=p\times\frac{4-2a}{3}=-1$

이다.

step4

$p(3-a)=3$, $p\times\frac{4-2a}{3}=-1$이므로 $\frac{3}{3-a}=\frac{-3}{4-2a}=p$이다.

따라서 $a=\frac{7}{3}$, $p=\frac{9}{2}$이고,

$f(x)=\frac{9}{2}(x-2)^2\left(x-\frac{7}{3}\right)-2x+5$이므로 $f(4)=27$이다.

해설2:

step1

곡선 $y=\int_1^x f(t)dt$가 점 $(3,1)$을 지나므로 $\int_1^3 f(t)dt=1$이다.

또한 $x=2$에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 $y=f'(2)(x-2)+f(2)=f'(2)(x-2)+1$이므로, 이 직선을 x축에 대해 대칭시킨 직선은 $y=-f'(2)(x-2)-1$이다.

step2

직선 $y=-f'(2)(x-2)-1$이 점 $(3,1)$을 지나므로 $-f'(2)-1=1$이고, 정리하면 $f'(2)=-2$이다.

또한 $y=-f'(2)(x-2)-1$과 곡선 $y=\int_1^x f(t)dt$가 점 $(3,1)$에서 접하므로 $-f'(2)=f(3)=2$이다.

따라서 주어진 정보를 정리하면 $f(2)=1$, $f'(2)=-2$, $f(3)=2$, $\int_1^3 f(t)dt=1$이므로,

$f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2-2(x-2)+1$이라 하면, (단, $a\neq 0$)

$f(x+2)=ax^3+bx^2-2x+1$이고,

$f(3)=a+b-1=2$,

$\int_1^3 f(t)dt=\int_{-1}^1 f(t+2)dt=\int_{-1}^1(at^3+bt^2-2t+1)dt=1$이므로

$a=\frac{9}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이다.

따라서 $f(x+2)=\frac{9}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+1$이고, $f(4)=27$이다.

여담:

1. $f(x)$의 $(2,1)$에서의 접선과 이 직선을 x축에 대해 대칭시킨 직선 사이의 관계를 잘 이용하기.

2. 삼차함수 $f(x)$ 위의 점 (a,b)에서의 $f(x)$의 접선을 $g(x)$라 하면,

$f(x)=p(x-a)^2(x-q)+g(x)$라 할 수 있다. (단, $p\neq 0$)

기출 다시보기: 2022학년도 수능 10번

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

정답: 5번

11.

정답: ④

해설:

$a_2+a_7=a_4+a_5=8$이고, 공차가 자연수이기 때문에 a_5는 양수이다.

따라서 $a_3\times a_4$가 음수이므로 a_3은 음수, a_4는 양수이다.

$a_n=a+(n-1)d$라 하면, (단, d는 자연수)

$a_4+a_5=8$에서 $a_4=8-a_5$,

$a_5=a_4+d$에서 $a_4=a_5-d$이므로

$a_5=4+\frac{d}{2}$이고,

$a_4=a_5-d=4-\frac{d}{2}$,

$a_3=a_5-2d=4-\frac{3d}{2}$이다.

이때

$a_4=4-\frac{d}{2}>0$이므로 $d<8$이고,

$a_3=4-\frac{3d}{2}<0$이므로 $d>\frac{8}{3}$이다.

따라서 가능한 자연수 d는 3, 4, 5, 6, 7이고,

$a_9=a_5+4d=\left(4+\frac{d}{2}\right)=4+\frac{9d}{2}$이므로

a_9의 값의 최댓값은 $\frac{71}{2}$, 최솟값은 $\frac{35}{2}$이다.

그러므로 a_9의 최댓값과 최솟값의 합은 53이다.

여담:

1. 공차가 자연수임에 주목해 a_3, a_4의 부호 파악하기

2. a_4와 a_5에 대한 두 관계식을 통해 a_n을 d에 대한 식으로 표현할 수 있다.

12.

정답: ⑤

해설:

step1

t의 범위에 따라 $f(t)$를 구해보면,

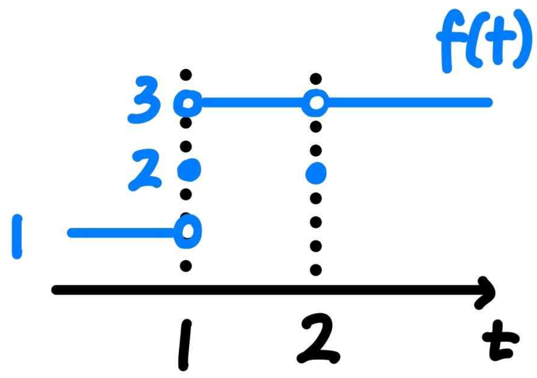
$t<1$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=1$의 1개이므로 $f(t)=1$이고,

$t=1$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=0$, $x=1$의 2개이므로 $f(t)=2$이다.

$1<t<2$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=1$과, $x^2-t+1=0$의 1이 아닌 서로 다른 근 2개로 총 3개이므로 $f(t)=3$이고,

$t=2$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=-1$과 $x=1$의 2개이므로 $f(t)=2$이다.

$t>2$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=1$과, $x^2-t+1=0$의 서로 다른 1이 아닌 근 2개로 총 3개이므로 $f(t)=3$이다.



step2

$|f(t)-b|$의 불연속점이 최대 1개여야 $(t-a)\times|f(t)-b|$가 연속일 수 있다.

$f(t)$가 $t=t_1$에서 불연속인데 $|f(t)-b|$는 $t=t_1$에서 연속이려면, $t=t_1$에서 $f(t)$의 좌극한, 우극한, 함숫값 중 2개 값이 같아야한다.

즉, $t_1=2$이므로 $|f(t)-b|$는 $t=2$에서 연속이고,

$|2-b|=|3-b|$여야 하므로 $b=\frac{5}{2}$이다.

또한 $t=1$에서 $(t-a)\times|f(t)-b|$가 연속이어야 하므로,

$t=1$에서 $t-a=0$이고 $a=1$이다.

그러므로 $a+b=\frac{7}{2}$이다.

여담:

1. $x=1$ 조심하며 $f(t)$의 그래프 파악하기.

2. 곱함수의 연속성 이용하기.

실수 전체의 집합에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 존재하며, $x=a$에서 연속이 아닌 함수 $f(x)$와, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 있을 때, 함수 $y=f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이라면 $g(a)=0$이다.

3. $f(x)$가 $x=x_1$에서 불연속인데 $|f(x)-b|$는 $x=t_1$에서 연속이려면, $x=t_1$에서 $f(x)$의 좌극한, 우극한, 함숫값 중 2개 값이 같아야한다.

0이상의 상수 p에 대하여
|좌극한$-b$|$=$|우극한$-b$|$=$|함숫값$-b$|$=p$여야 하는데,

이때 좌극한$=b+p$ 또는 $b-p$, 우극한$=b+p$ 또는 $b-p$, 함숫값$=b+p$ 또는 $b-p$ 이므로 좌극한, 우극한, 함숫값 중 최소 2개의 값이 같다.

또한 $f(x)$는 $x=x_1$에서 불연속이므로 3개 값이 다 같을 수는 없다.

($p=0$일 경우, 좌극한$=$우극한$=$함숫값$=b$이므로 $f(x)$는 $x=x_1$에서 연속이다.)

13.

정답: ③

해설:

선분 BC를 긋고, 주어진 원의 반지름을 r이라 하면,

$r=\sqrt{19}$이다.

삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면

$2r\times\sin\angle\mathrm{ACB}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\mathrm{r}}=\dfrac{8}{2\sqrt{19}}=\dfrac{4\sqrt{19}}{19}$이다.

또한 $\cos\angle\mathrm{BDC}=-\dfrac{1}{7}$이므로 $\cos\angle\mathrm{BDA}=\dfrac{1}{7}$,

$\sin\angle\mathrm{BDC}=\sqrt{1-(\cos\angle\mathrm{BDC})^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$이다.

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{BC}}=\sin\angle\mathrm{BCD}:\sin\angle\mathrm{BDC}=7:\sqrt{57}$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=7t$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{57}t$라 할 수 있다. (단, $t>0$)

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 적용하면,

$(\overline{\mathrm{BC}})^2=(\overline{\mathrm{BD}})^2+(\overline{\mathrm{CD}})^2-2\times(\overline{\mathrm{BD}})\times(\overline{\mathrm{CD}})\times\cos\angle\mathrm{BDC}$이므로

$57t^2=49t^2+2^2-2\times7t\times2\times\left(-\dfrac{1}{7}\right)$이고, 정리하면

$2t^2-t-1=0$이고 $t=1$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=7$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{57}$이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면,

$(\overline{\mathrm{AB}})^2=(\overline{\mathrm{AD}})^2+(\overline{\mathrm{BD}})^2-2\times(\overline{\mathrm{AD}})\times(\overline{\mathrm{BD}})\times\cos\angle\mathrm{BDA}$이므로,

$(\overline{\mathrm{AD}})^2+7^2-2\times(\overline{\mathrm{AD}})\times7\times\dfrac{1}{7}=8^2$이고 $\overline{\mathrm{AD}}=5$이다.

또한 $\cos\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{1}{7}$ 이므로

$\sin\angle\mathrm{ADB}=\sqrt{1-(\cos\angle\mathrm{ADB})^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$이고,

따라서

$[\triangle\mathrm{ABD}]=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\sin\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{1}{2}\times5\times7\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=10\sqrt{3}$

이다.

여담:

사인법칙에 의해,

삼각형 ABC에서 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$이다.

(단, 각 A의 마주보는 변은 a, 각 B의 마주보는 변은 b, 각 C의 마주보는 변은 c이다.)

14.

정답: ⑤

해설:

ㄱ.

다항함수 $f'(x)$는 이차함수이므로 $f'(x)=2$의 서로 다른 실근은 최대 2개 존재한다.

평균값정리에 의해

$(1,2)$에서 $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=2=f'(x_1)$인 x_1이 존재하고,

$(2,3)$에서 $\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=f'(c)<-2$인 c가 존재한다.

또한 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이므로 다항함수 $f'(x)$에 대해 사잇값 정리를 적용하면,

(c,∞)에 $f'(x_2)=2$인 x_2가 존재한다는 점을 알 수 있다.

따라서 열린구간 $(1,\infty)$에서 방정식 $f'(x)=2$의 서로 다른 실근은 2개 존재하고, ㄱ은 참이다.

ㄴ.

ㄱ을 통해 $f'(x)$의 최솟값은 -2보다 작다는 점을 알 수 있다.

ㄱ에서 확인했듯이 $f'(x)=2$를 만족시키는 $x=x_1$, $x=x_2$는 $(1,\infty)$에 존재한다.

또한 $f'(x)$의 최솟값은 -2보다 작으므로, $f'(x)=-2$를 만족시키는 서로 다른 실근은 $x=x_3$, $x=x_4$의 2개이다.

(단, $x_3<x_4$)

$f'(x_1)=f'(x_2)=2$이고, $f'\left(\dfrac{x_3+x_4}{2}\right)<-2$이므로, $f'(x)$에 대해 사잇값 정리를 적용하면

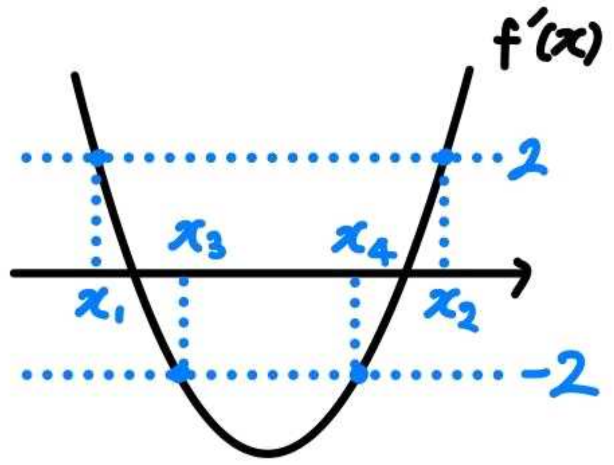
$\left(x_1,\dfrac{x_3+x_4}{2}\right)$에서 $f'(x_3)=-2$인 x_3이 존재하고,

$\left(\dfrac{x_3+x_4}{2},x_2\right)$에서 $f'(x_4)=-2$인 x_4가 존재한다.

(그래프로 보면 좀 더 직관적으로 확인 가능하다.)

그러므로 $(1,\infty)$에서 $|f'(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 x_1, x_2, x_3, x_4의 4개이다.

따라서 ㄴ은 참이다.



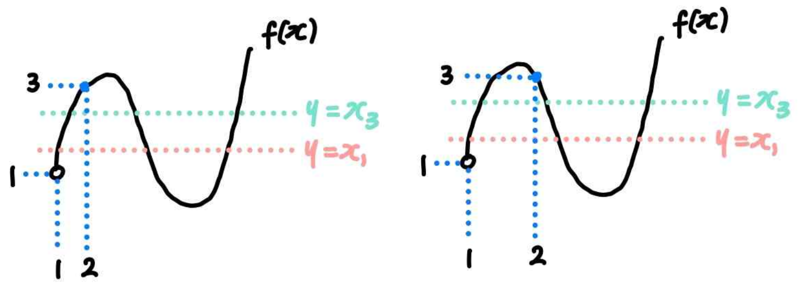
ㄷ.

$|f'(x)|=2$의 모든 실근은 $x=x_1$, x_2, x_3, x_4이므로,

구간 $(1,\infty)$에서 $f(x)=x_1$, x_2, x_3, x_4의 실근의 개수를 세어보자.

이때 ㄱ에서 확인했듯이 $1<x_1<2$이고, 또한 $2<c<3$이므로 $1<x_1<x_3<3$이다.

그러므로 $f(x)=x_1$과 $f(x)=x_3$의 서로 다른 근은 각각 3개씩 나온다.



(그림: $x=1$과 $x=2$의 위치에 따른 가능한 상황. 어느 경우든 $f(x)=x_1$과 $f(x)=x_3$의 서로 다른 근은 각각 3개씩 나온다.)

또한 $x_3<x_4<x_2$이므로, $f(x)=x_4$와 $f(x)=x_2$의 근은 최소 1개씩 존재한다.

따라서 $|f'(f(x))|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 최소 $3+3+1+1=8$개이므로 ㄷ은 참이다.

($f(x)=x_4$와 $f(x)=x_2$의 실근의 개수에 따라 8보다 큰 수도 가능하다.)

여담:

수2 ㄱㄴㄷ 문제에서 $f'(x)$가 등장했을 때,

제일 먼저 평균값정리를 고려해보아야 하고,

그래도 안 풀리면 도함수의 사잇값 정리도 고려해야 하는 경우가 있다. (도함수의 사잇값 정리: $f'(x)$에 사잇값 정리 사용)

15.

정답: ④

해설:

step1 (가) 조건 해석

만약 $a_n \geq 0$이라면, $a_{n+3} = 2a_n - 3$이고,

$a_n \geq \frac{3}{2}$인 경우 $a_{n+6} = 4a_n - 9$이고

$0 \leq a_n < \frac{3}{2}$인 경우 $a_{n+6} = -4a_n + 3$이다.

이때 $a_n = a_{n+6}$이므로,

$a_n \geq \frac{3}{2}$일 경우 $4a_n - 9 = a_n$이므로 $a_n = 3$이며,

$0 \leq a_n < \frac{3}{2}$일 경우 $-4a_n + 3 = a_n$이므로 $a_n = \frac{3}{5}$이다.

또한 $a_n < 0$이라면, $a_{n+3} = -2a_n - 3$이고,

$-\frac{3}{2} < a_n < 0$인 경우 $a_{n+6} = 4a_n + 3$이고

$a_n \leq -\frac{3}{2}$인 경우 $a_{n+6} = -4a_n - 9$이다.

이때 $a_n = a_{n+6}$이므로,

$-\frac{3}{2} < a_n < 0$일 경우 $4a_n + 3 = a_n$이므로 $a_n = -1$이며,

$a_n \leq -\frac{3}{2}$일 경우 $-4a_n - 9 = a_n$이므로 $a_n = -\frac{9}{5}$이다.

따라서 가능한 a_n의 값은 3, $\frac{3}{5}$, -1, $-\frac{9}{5}$이다.

step2 (나) 조건 해석

$a_1 = 3$이라면 $a_4 = 2a_1 - 3 = 3$이고, $a_1 = a_4$가 되므로 $a_1 \neq 3$이다.

$a_1 = \frac{3}{5}$이라면 $a_4 = 2a_1 - 3 = -\frac{9}{5}$이고, $a_1 > a_4$가 되므로 $a_1 \neq \frac{3}{5}$이다.

$a_1 = -1$이라면 $a_4 = -2a_1 - 3 = -1$이고, $a_1 = a_4$가 되므로 $a_1 \neq -1$이다.

$a_1 = -\frac{9}{5}$라면 $a_4 = -2a_1 - 3 = \frac{3}{5}$이므로 가능한 a_1의 값은 $a_1 = -\frac{9}{5}$뿐이다.

$a_1 \longrightarrow a_4$

$3 \longrightarrow 3$: $a_1 = a_4$

$\frac{3}{5} \longrightarrow -\frac{9}{5}$: $a_1 > a_4$

$-1 \longrightarrow -1$: $a_1 = a_4$

$-\frac{9}{5} \longrightarrow \frac{3}{5}$: $a_1 < a_4$ (만족)

step3

$a_1 = -\frac{9}{5}$, $a_4 = \frac{3}{5}$이므로 $a_1 < a_2 < a_4$인 $a_2 = -1$이며 $a_5 = -1$이다.

$a_3 > a_4$이므로 $a_3 = 3$, $a_6 = 3$이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{35} a_k = (a_1 + a_4 + \cdots + a_{34}) + (a_2 + a_5 + \cdots + a_{35}) + (a_3 + a_6 + \cdots + a_{33})$$

$$= \left(-\frac{9}{5} + \frac{3}{5}\right) \times 6 + (-1) \times 12 + 3 \times 11$$

$= \frac{69}{5}$이다.

여담:

(가) 조건을 통해 가능한 a_n의 값 파악하는 과정에 주목하자.

20.

정답: 32

해설1:

step1 $F(x)$, $f(x)$, $f'(x)$ 설정하기

$f(x)$는 이차함수이므로 $F(x)$는 삼차함수이고,

$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$라 할 수 있다. (단, $a \neq 0$)

x에 대해 미분하면,

$f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(x) = 6ax + 2b$이다.

step2

$f(0)F(x) = c \times (ax^3 + bx^2 + cx + d) = acx^3 + bcx^2 + c^2x + cd$

$x^2 f'(x) = 6ax^3 + 2bx^2$

$f(2)x = (12a + 4b + c)x$

$F(0) = d$

step3

모든 실수 x에 대하여

$acx^3 + bcx^2 + c^2x + cd = 6ax^3 + 2bx^2 + (12a + 4b + c)x + d$ 이므로,

$ac = 6a$, $bc = 2b$, $c^2 = 12a + 4b + c$, $cd = d$이다.

이때 $a \neq 0$이므로 $c = 6$이고,

$bc = 6b = 2b$이므로 $b = 0$이며,

$c^2 = 12a + 4b + c$이므로 $a = \frac{5}{2}$이고,

$cd = 6d = d$이므로 $d = 0$이다.

그러므로

$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = \frac{5}{2}x^3 + 6x$이고,

$F(2) = \frac{5}{2} \times 2^3 + 6 \times 2 = 32$이다.

해설2:

step1

1) 주어진 등식 $f(0)F(x)=x^2f'(x)+f(2)x+F(0)$에 $x=0$을 대입하면 $f(0)F(0)=F(0)$이다.

2) $F(x)$의 최고차항 계수를 a라 하면, $f(x)$의 최고차항 계수는 $3a$이고, $f'(x)$의 최고차항 계수는 $6a$이다. 그러므로 주어진 등식의 최고차항의 계수, 즉 x^3의 계수를 비교하면 $f(0)\times a=6a$이므로 $f(0)=6$이다.

3) 1)에서 구했듯이 $f(0)F(0)=F(0)$인데 $f(0)=6$이므로 $F(0)=0$이다.

따라서 주어진 정보를 정리하면, $f(0)=6$, $F(0)=0$이다.

step2

$F(x)=ax^3+bx^2+6x$라 하자.

이때 $f(x)=3ax^2+2bx+6$이고, $f'(x)=6ax+2b$이다.

또한 $f(0)F(x)=6\times(ax^3+bx^2+6x)$이고,

$x^2f'(x)+f(2)x+F(0)=x^2(6ax+2b)+(12a+4b+6)x$이므로

$6\times(ax^3+bx^2+6x)=x^2(6ax+2b)+(12a+4b+6)x$이며,

$a=\frac{5}{2}$, $b=0$이다.

따라서 $F(x)=\frac{5}{2}x^3+6x$이므로 $F(2)=32$이다.

여담:

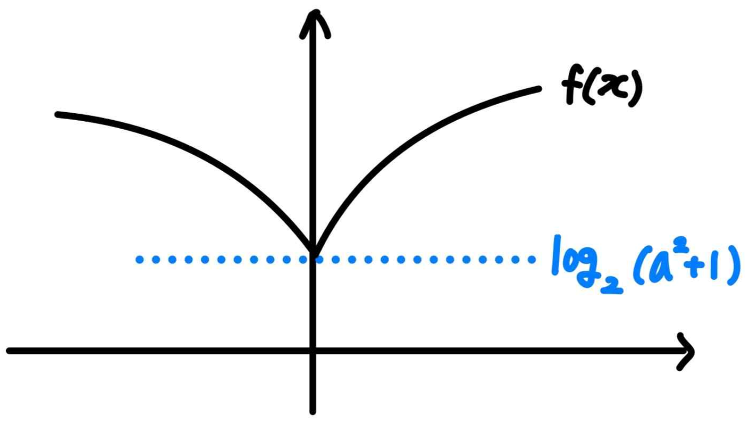
구해야 하는 값도 $F(2)$의 값이므로, $f(x)=ax^2+bx+c$로 설정하는 것보다 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 설정하는 게 더 편하다.

21.

정답: 18

해설:

step1



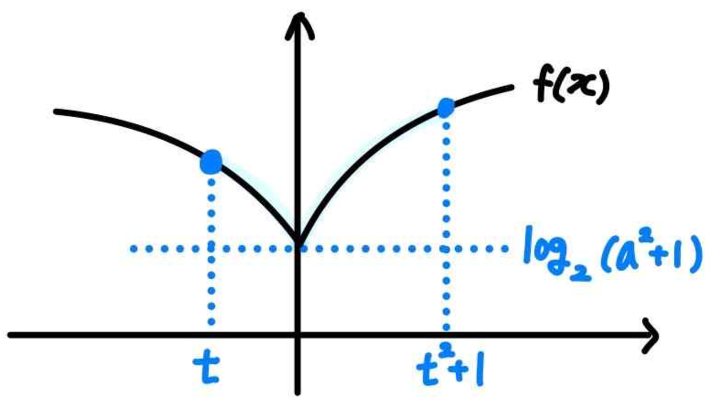
t^2+1은 양수이고, $t^2-|t|+1=(|t|-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로 $|t|<t^2+1$이다.

step2

1) $t\le 0$인 경우

$t\le 0$이라면 닫힌구간 $[t, t^2+1]$에서 최솟값은 $f(0)=\log_2(a^2+1)$이고,

$|t|<t^2+1$이므로 닫힌구간 $[t, t^2+1]$에서 최댓값은 $f(t^2+1)=\log_2(t^2+1+a^2+1)$이다.



이때 최댓값과 최솟값의 차이가 1이므로,

$f(t^2+1)-f(0)$

$=\log_2(t^2+1+a^2+1)-\log_2(a^2+1)=\log_2\left(\frac{t^2+1}{a^2+1}+1\right)=1$이고,

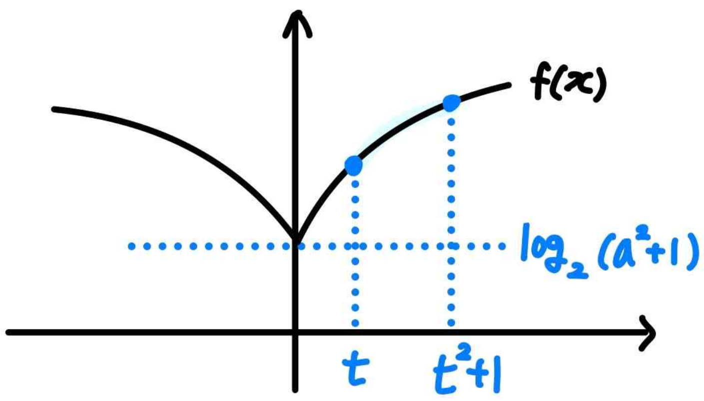
정리하면 $t=-a$이다.

2) $t>0$인 경우

$t>0$이라면 닫힌구간 $[t, t^2+1]$에서 최솟값은

$f(t)=\log_2(t+a^2+1)$이고,

닫힌구간 $[t, t^2+1]$에서 최댓값은
$f(t^2+1)=\log_2(t^2+1+a^2+1)$이다.



이때 최댓값과 최솟값의 차이가 1이므로,

$f(t^2+1)-f(t)=\log_2(t^2+1+a^2+1)-\log_2(t+a^2+1)=1$이고,

정리하면 $t^2-2t-a^2=0$이므로

양수인 t는 $t=1+\sqrt{a^2+1}$이다.

step3

모든 실수 t의 값의 합은

$1+\sqrt{a^2+1}+(-a)=\frac{3}{2}$이므로

$a^2+1=(a+\frac{1}{2})^2$이고, 이를 만족시키는 a는 $a=\frac{3}{4}$이다.

그러므로 $24a$의 값은 18이다.

여담:

1. $t\le 0$일 때와 $t>0$일 때 $[t, t^2+1]$에서 최솟값이 다른 식으로 나온다.

2. $|t|<t^2+1$이기 때문에 $t\le 0$일 때와 $t>0$일 때 $[t, t^2+1]$에서 최댓값이 같은 식으로 나온다.

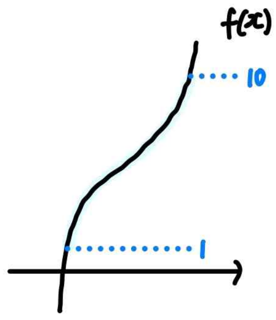
22.

정답: 259

해설:

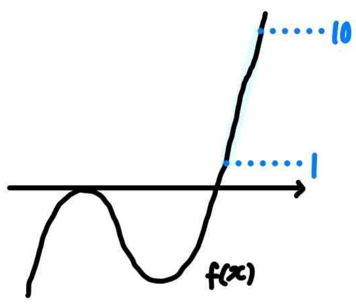
step1

만약 $f(x)$가 증가만 하는 개형이라면, $f(x)$의 값이 10이하의 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수는 10개이다.



그러므로 $f(x)$는 극대 극소를 가지는 개형이다.

또한 $f(x)$의 극댓값이 0 이하의 값이라면, $f(x)$의 치역이 0보다 큰 구간에서 $f(x)$는 일대일대응이므로, $f(x)$의 값이 10이하의 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수는 10개이다.



10이하의 자연수 n에 대하여, $f(x)=n$의 서로 다른 실근이 1개인 n의 개수를 p, $f(x)=n$의 실근이 3개인 n의 개수를 q라 하자.

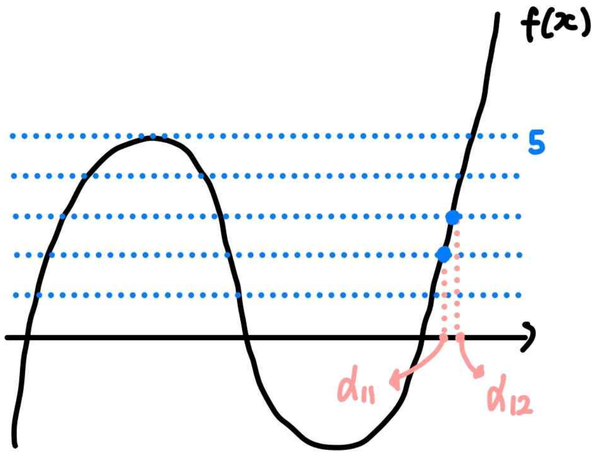
(단, n은 자연수, p, q는 0 이상의 정수, $n\le 10$, $p\le 10$, $q\le 10$)

$f(x)=n$의 실근이 2개인 n이 존재하지 않는다면, $p+q=10$이고, $p+3q=19$이므로 $p=\frac{11}{2}$, $q=\frac{9}{2}$이며, 이는 p와 q가 0 이상의 정수라는 조건에 모순이다.

따라서 $f(x)=n$의 실근이 2개인 n이 존재하고, $p+q=9$이며, $p+3q+2=19$이므로 $p=5$, $q=4$이다.

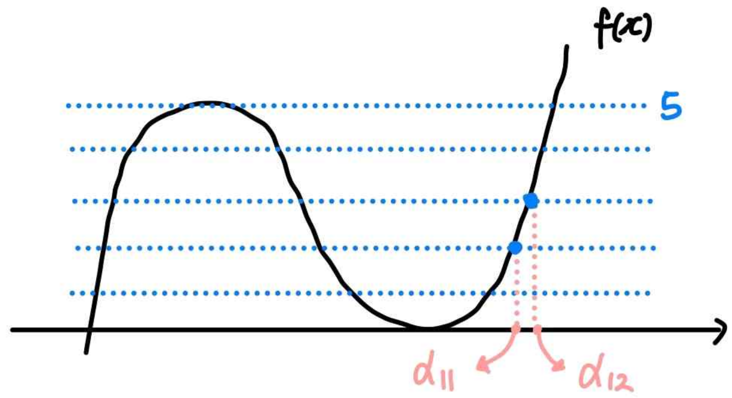
step2

1) $f(x)$의 실근이 3개인 경우



이 경우 $f'(\alpha_{11})>0$, $f'(\alpha_{12})>0$이므로 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$을 만족하지 않는다.

2) $f(x)$의 실근이 2개인 경우



이 경우 $f'(\alpha_{11})>0$, $f'(\alpha_{12})>0$이므로 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$을 만족하지 않는다.

3) $f(x)$의 실근이 1개인 경우

p와 q의 값이 정해져 있으므로 $f(x)$가 극댓값을 가지는 x는 아무리 커봤자 α_{10}과 α_{11} 사이의 값이고, 그러므로 $f(x)$의 극솟값이 정수라면 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})\geq 0$이므로 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$을 만족하지 않는다.

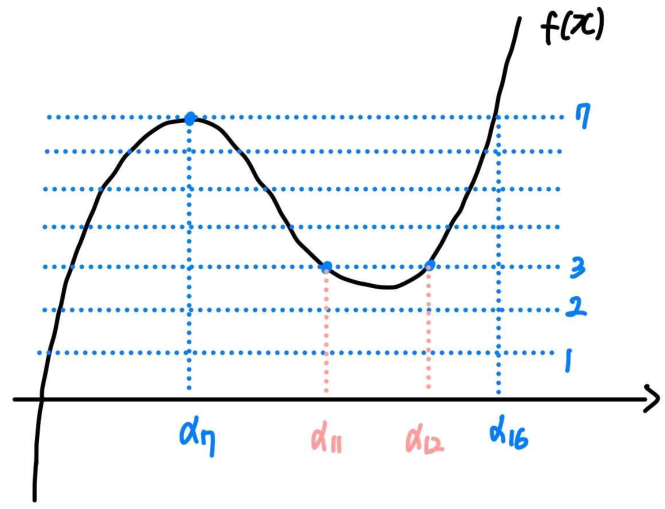
($x=\alpha_{11}$과 $x=\alpha_{12}$에서 극솟값을 안 가진다면 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})>0$이고, 둘 중 하나에서 극솟값을 가진다면 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})=0$이다.)

따라서 $f(x)$의 극댓값이 정수이며, $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$이려면 $f'(\alpha_{11})<0$, $f'(\alpha_{12})>0$이어야 한다.

이를 만족시키는 $f(x)$의 극솟값은, $2<(\text{극솟값})<3$이어야한다.

($f(x)\leq(f(x)$의 극댓값)에서 $f(x)=n$의 실근이 2개인 n이 1개, $f(x)=n$의 실근이 3개인 n이 4개 존재하므로 $f(x)=n$의 실근이 1개인 n이 2개 존재하면, $1\times2+2\times4+1=11$이다.

아래 그림참고)



step3

$f(x)=2(x-\alpha_7)^2(x-\alpha_{16})+7=2(x-\alpha_7)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)+7$라 하면,

$2<7-\frac{4}{27}\times2\times\left(\frac{3}{2}-\alpha_7\right)^3<3$이므로 $\frac{27}{2}<\left(\frac{3}{2}-\alpha_7\right)^3<\frac{135}{8}$이고,

이를 만족시키는 $\alpha_7=-1$이다.

따라서 $f(x)=2(x+1)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)+7$이므로 $f(5)=259$이다.

여담:

$f(x)=n$의 실근이 1개인 10이하의 자연수 n의 개수,

$f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$ 조건은 눈으로도 파악 가능하기 때문에, $f(x)=n$의 실근이 3개인 10이하의 자연수 n의 개수를 먼저 파악했으면, 많은 경우를 살펴보지 않아도 답을 구할 수 있었을 것이다.

기출 다시보기: 2019학년도 수능 가형 30번(미적분 선택자만)

14. 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고,

$\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.

(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

(단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$이다.) [4점]

정답: 27

3회 정답

8	①	*9*	④	*10*	②	*11*	①	*12*	②
13	③	*14*	①	*15*	⑤	*20*	12	*21*	98
22	13								

8.

정답: ①

해설:

step1

$g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=f(2)$이고,

$x=2$에서 연속이므로 $f(4)=3$이다.

step2

$f(0)=f(2)$이므로 $f(x)=x(x-2)+C$라 하자. (단, C는 상수)

$f(4)=4\times(4-2)+C=3$이므로 $C=-5$이다.

따라서 $f(x)=x(x-2)-5$이고, $f(5)=5\times(5-2)-5=10$이다.

여담:

이차함수 $f(x)$가 $f(a)=f(b)$이면 $f(x)=p(x-a)(x-b)+C$이다.
(단, $p\neq0$, C는 상수)

9.

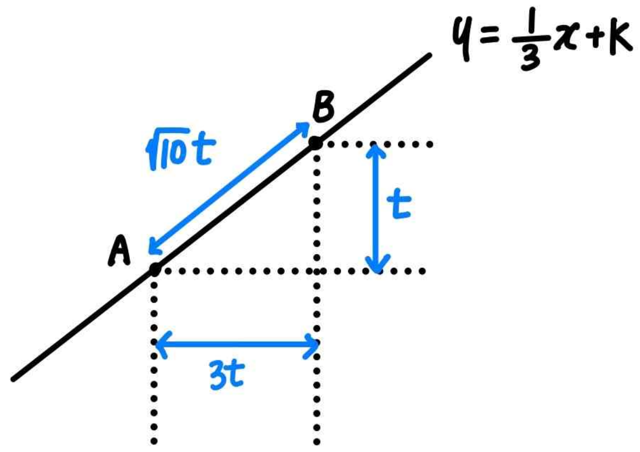
정답: ④

해설:

step1

$\overline{\mathrm{AB}}$의 x좌표 차이를 $3t$라 하면, 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}$의 y좌표 차이는 t가 되고, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\sqrt{3}t)^2+t^2}=\sqrt{10}t$이다.



주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{10}$이므로, $t=2$이다.

step2

점 A의 좌표를 $(p, \log_2(p+1))$이라 한다면,

점 B의 좌표는 $(p+6, \log_2(p+1)+2)$이다.

이때 점 B는 함수 $y=\log_2(x+1)$위의 점이므로,

$\log_2(p+7)=\log_2(p+1)+2$이고, $p=1$이다.

따라서 점 A의 좌표는 $(1,1)$이고, 점 A는 직선 $y=\frac{1}{3}x+k$위의

점이므로 $k=\frac{2}{3}$이다.

여담:

직선 AB의 기울기를 이용해 좌표차이를 구하고, 이를 통해 좌표 설정하는 법 잘 익혀두기.

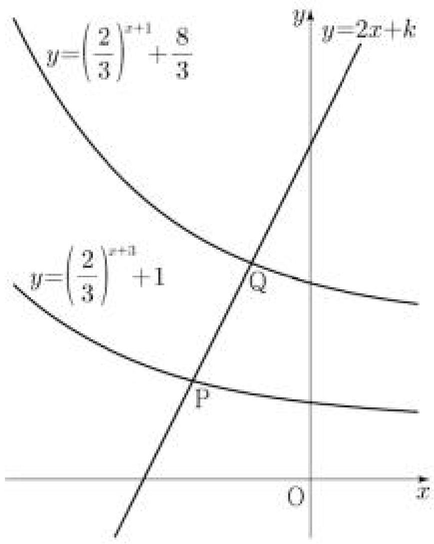
기출 다시보기: 2022학년도 수능 9번

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



정답: 4번

10.

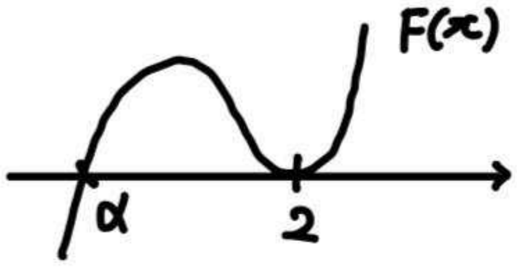
정답: ②

해설:

$F(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt$라 하자.

$x \geq 0$에서 $|F(x)|=F(x)$이므로 $x \geq 0$에서 $F(x) \geq 0$이어야 한다.

따라서 $F(2)=0$이므로 $F'(2)=f(2)=0$, $f'(2) \neq 0$이다.



삼차함수 $F(x)$에 대해 $F(x)=0$의 2가 아닌 실근을 α라 한다면,
(단, $\alpha<2$)

$x \geq 0$에서 $F(x) \geq 0$이므로 $\alpha \leq 0$이고,

$F(x)=\frac{1}{3}(x-\alpha)(x-2)^2$라 하면

$F'(x)=f(x)=\left(x-\frac{2\alpha+2}{3}\right)(x-2)$이다.

따라서 $f(5)=\left(5-\frac{2\alpha+2}{3}\right)(x-2)=13-2\alpha$이고,

$\alpha \leq 0$이므로 $f(5)=13-2\alpha \geq 13$이다.

여담:

삼차함수 $g(x)$에 대해, $g(a)=0$인데 $g(x)$가 $x=a$ 부근에서 부호변화가 없으려면 $g'(a)=0$이어야 한다. (단, 실수 p에 대하여 $g(x) \neq p(x-\alpha)^3$이다.)

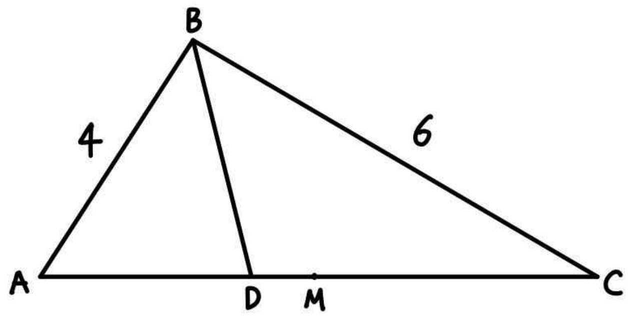
아마 $F(x)$라는 함수를 설정하지 않았다면
$\left|\int_{2}^{x} f(t)dt\right|=\int_{2}^{x} f(t)dt$을 해석하기 어려웠을수도 있다.

11.

정답: ①

해설:

step1

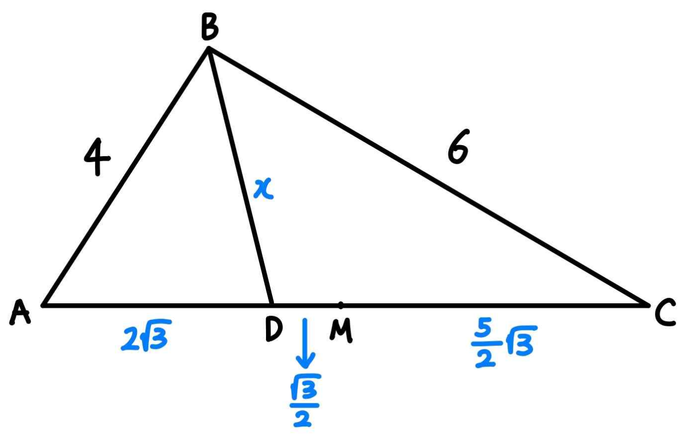


$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{CD}}=2:3$($\because$ $\angle$B의 이등분선),

$\overline{\mathrm{AM}}:\overline{\mathrm{CM}}=1:1$($\because$점 M은 선분 AC의 중점)이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=4\mathrm{t}$, $\overline{\mathrm{DM}}=\mathrm{t}$, $\overline{\mathrm{CM}}=5\mathrm{t}$ (단, $t>0$)라 할 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{DM}}=t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CM}}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$이다.



step2-1 정석적인 풀이

$\overline{\mathrm{BD}}=x$라 하면,

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}$이므로 $\cos\angle\mathrm{ABD}=\cos\angle\mathrm{DBC}$이다.

이때

$\cos\angle\mathrm{ABD}=\frac{(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BD}})^2-(\overline{\mathrm{AD}})^2}{2\times(\overline{\mathrm{AB}})\times(\overline{\mathrm{BD}})}=\frac{4^2+x^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times4\times x}$이고,

$\cos\angle\mathrm{DBC}=\frac{(\overline{\mathrm{BD}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2-(\overline{\mathrm{CD}})^2}{2\times(\overline{\mathrm{BD}})\times(\overline{\mathrm{BC}})}=\frac{6^2+x^2-(3\sqrt{3})^2}{2\times6\times x}$이므로

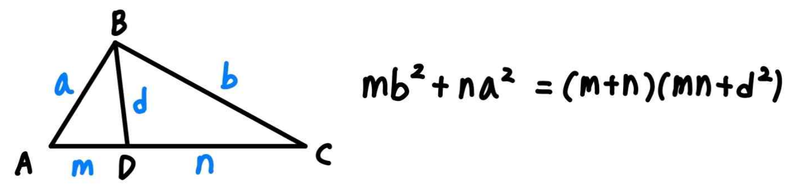
$\frac{4^2+x^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times4\times x}=\frac{6^2+x^2-(3\sqrt{3})^2}{2\times6\times x}$이다.

따라서 $x=\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{6}$이다.

이때 $\cos\angle ABD = \dfrac{4^2+(\sqrt{6})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times4\times\sqrt{6}}$이므로

$\overline{BD}\times\cos\angle ABD=\sqrt{6}\times\dfrac{5}{4\sqrt{6}}=\dfrac{5}{4}$이다.

step2-2 스튜어트정리



스튜어트정리에 의해

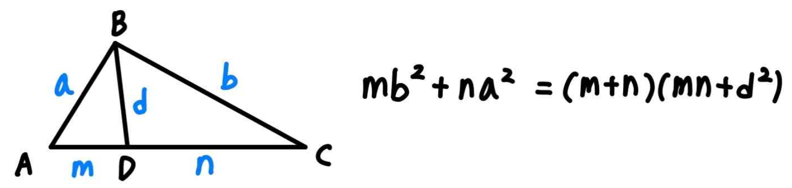
$2\sqrt{3}\times6^2+3\sqrt{3}\times4^2=(2\sqrt{3}+3\sqrt{3})\times\{2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}+(\overline{BD})^2\}$

이므로 $\overline{BD}=\sqrt{6}$이다.

이때 $\cos\angle ABD=\dfrac{4^2+(\sqrt{6})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times4\times\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{24}$이므로

$\overline{BD}\times\cos\angle ABD=\dfrac{5}{4}$이다.

여담:



스튜어트정리는 코사인법칙 두 번으로 유도 가능하다.

위 문제에서는 정석적인 풀이와 스튜어트정리를 사용한 풀이의 계산량이 비슷하지만, 알아두면 꽤 유용한 공식이니 알아두자.

12.

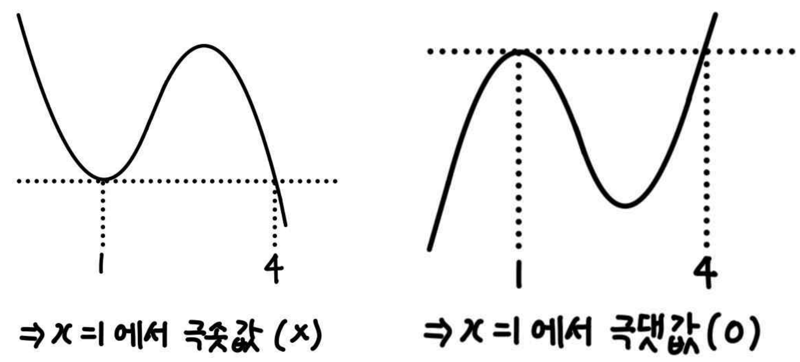
정답: ②

해설:

step1 (가) 조건 해석

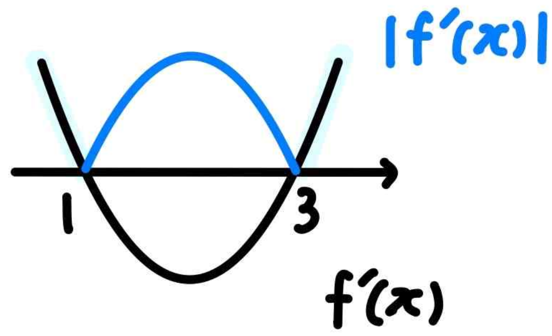
$f(1)=f(4)$이고, $f'(1)=0$이다.

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 음수라면 $x=1$에서 극대가 아닌 극소이기 때문에 $f(x)$의 최고차항 계수는 양수이다.



따라서 $f(x)=p(x-1)^2(x-4)+q$라 할 수 있다. (단, $p>0$)

step2 (나) 조건 해석



절댓값을 풀어보면

$\displaystyle\int_0^3|f'(x)|dx=\int_0^1 f'(x)dx+\int_1^3 -f'(x)dx$

$=\{f(1)-f(0)\}-\{f(3)-f(1)\}=4p-(-4p)=8p=4$

이므로 $p=\dfrac{1}{2}$이다.

또한 $f(2)=3$이므로 $f(2)=-2p+q=-1+q=3$이다.

그러므로 $q=4$이고, $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+4$이므로

$f(5)=\dfrac{1}{2}\times4^2\times1+4=12$이다.

여담:

$\int_a^b |f'(x)|dx$는 $x=a$부터 $x=b$까지 $f(x)$의 변화량의 총합과 같다. (도함수의 절댓값 적분은 원함수의 절대변화량과 같다.)

한 예시로, $\int_a^b |f'(t)|dt$는 시각 $t=a$부터 $t=b$까지 이동거리(위치의 변화량 아님)와 같다고 이해하면 된다.

이를 알고 있으면 굳이 $|f'(x)|$의 절댓값을 푸는 과정을 거칠 필요 없이, $f(x)$의 그래프를 보고 바로 $\int_a^b |f'(x)|dx$를 해석할 수 있다.

13.

정답: ③

해설:

step1 (가)/(나) 조건 해석

(가) 조건을 해석하면,

어떤 구간 c에서 $f(x)=x$라면, 구간 c를 제외한 실수 전체의 집합에서 $g(x)=2x$이다.

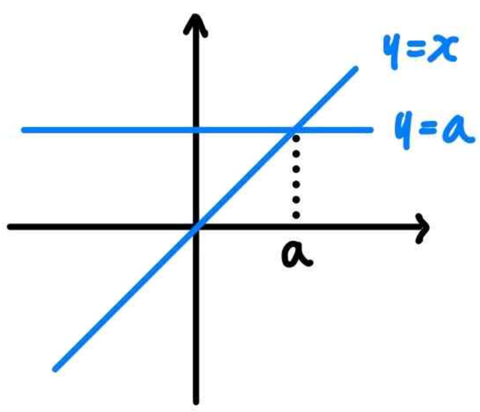
(나) 조건을 해석하면,

어떤 구간 d에서 $f(x)=a$라면, 구간 d를 제외한 실수 전체의 집합에서 $g(x)=-x+b$이다.

두 조건을 합치면,

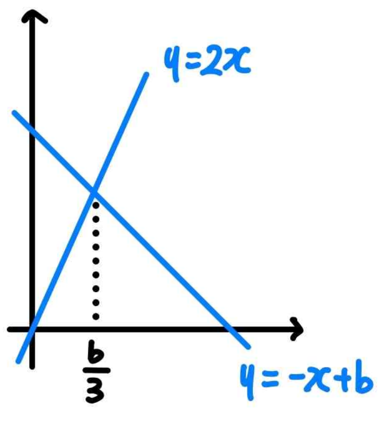
$f(x)=\begin{cases} x \\ a \end{cases}$ 이고, $f(x)$는 연속함수이므로,

$x=a$에서만 $f(x)$의 식이 바뀔 수 있다.



또한 $g(x)=\begin{cases} 2x \\ -x+b \end{cases}$ 이고, $g(x)$는 연속함수이므로,

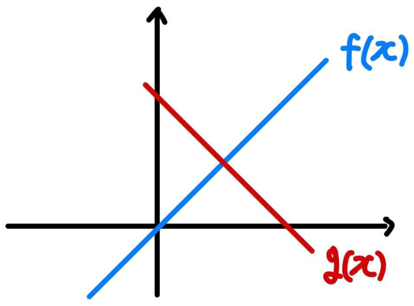
$x=\frac{b}{3}$에서만 $g(x)$의 식이 바뀔 수 있다.

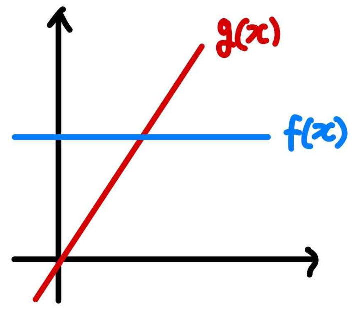


step2

만약 실수 전체의 집합에서 $f(x)=x$이면 $g(x)=-x+b$이고,

실수 전체의 집합에서 $f(x)=a$이면 $g(x)=2x$이다.



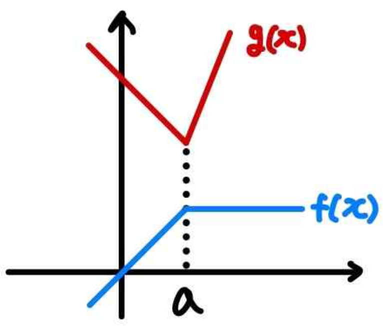


이 두 경우 모두 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 부분이 존재하지 않으므로, $f(x)$와 $g(x)$는 모두 식이 바뀌어야 한다.

또한 (가)와 (나)를 동시에 만족시키려면, $f(x)$의 식이 바뀌는 지점과 $g(x)$의 식이 바뀌는 곳이 겹쳐야 하므로 $a=\frac{b}{3}$이다.

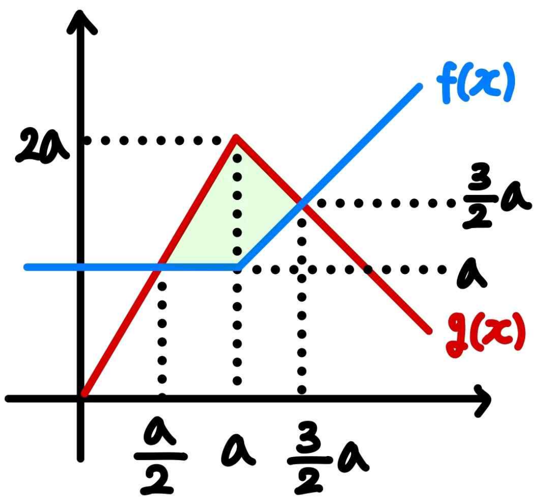
step3

1) $f(x)=\begin{cases} x & (x \le a) \\ a & (x > a) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -x+3a & (x \le a) \\ 2x & (x > a) \end{cases}$ 인 경우



이 경우 $f(x)$와 $g(x)$의 교점이 생기지 않는다.

2) $f(x)=\begin{cases} a & (x \le a) \\ x & (x > a) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2x & (x \le a) \\ -x+3a & (x > a) \end{cases}$ 인 경우



따라서 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times a+\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times a=\frac{1}{2}a^2=8$이므로 $a=4$이다.

그러므로 $b=3a=12$이므로 $a+b=4+12=16$이다.

여담:

1. $f(x)$의 식이 바뀌는 지점에서 $g(x)$의 식도 바뀌어야 한다는 점에 주목해 풀이 진행하자.

2. 헷갈리는 사람을 위한 예시를 들어주겠다.

만약, 주어진 조건이

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{f(x)-x\}\times\{f(x)-a\}=0$
(나) $\{g(x)-2x\}\times\{g(x)+x-b\}=0$

였다고 가정해보자.

이 경우 $f(x)=\begin{cases} x \\ a \end{cases}$ 이고, $f(x)$는 연속함수이므로 $x=a$에서만 $f(x)$의 식이 바뀔 수 있었을 것이다.

또한 $g(x)=\begin{cases} 2x \\ -x+b \end{cases}$ 이고, $g(x)$는 연속함수이므로 $x=\frac{b}{3}$에서만 $g(x)$의 식이 바뀔 수 있었을 것이다.

이 정보만으로 주어진 조건을 모두 만족시키게 될 것이다.

하지만 13번 문항에서는, $\{f(x)-x\}\times\{g(x)-2x\}=0$와 $\{f(x)-a\}\times\{g(x)+x-b\}=0$를 제시해 주었으므로,

$f(x)$와 $g(x)$의 연속조건에 의해

$f(x)=\begin{cases} x \\ a \end{cases}$ 이고, $x=a$에서만 $f(x)$의 식이 바뀔 수 있었을 것이며,

$g(x)=\begin{cases} 2x \\ -x+b \end{cases}$ 이고, $x=\frac{b}{3}$에서만 $g(x)$의 식이 바뀔 수 있었을 것이다.

라는 두 정보는 위의 예시 문항과 똑같이 가져가지만,

추가적으로 $a=\frac{b}{3}$이라는 조건이 생기게 된다.

기출 다시보기: 2022학년도 수능 12번

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이고 최솟값은 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

정답: 3번

14.

정답: ①

해설:

step1 $x \ge k$**에서 주어진 방정식의 실근의 개수 구하기**

$\cos4\pi x=-1$의 실근은 $\cos4\pi x$의 주기 1개마다 1개씩 생기므로, $x \ge k$에서 방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수는 $x \ge k$에서 반복되는 주기의 개수와 같다.

이때 $\cos4\pi x$의 주기가 $\frac{1}{2}$이므로, $x=0$, $x=k$, $x=10$ 등 구간의 끝 점이 주기의 중간에 위치하지 않는다.

또한 자연수 k에 대하여 $k \le 10$일 경우 $k \le x \le 10$에서 반복되는 주기의 개수는 $(10-k) \div \frac{1}{2}=20-2k$이다.

step2

1) $k<4$인 경우 ($1+\frac{k}{2}\sin\pi x$의 최솟값$=1-\frac{k}{2}>-1$)

이 경우 $0 \le x < k$에서 방정식 $f(x)+1=0$의 근은 생기지 않는다.

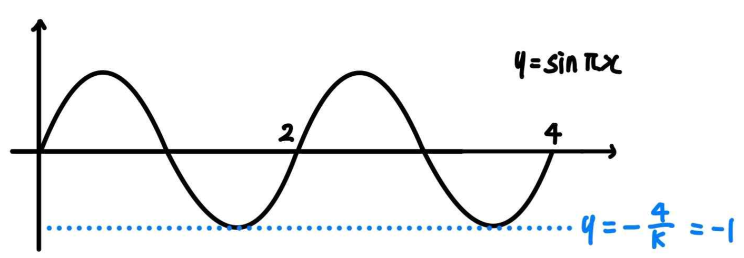
$k=1$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$0+(20-2\times1)=18$이다.

$k=2$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$0+(20-2\times2)=16$이다.

$k=3$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$0+(20-2\times3)=14$이다.

2) $k=4$인 경우

$0 \le x < k$에서 $1+\frac{k}{2}\sin\pi x+1=0$의 실근은 $\sin\pi x=-\frac{4}{k}$의 실근과 같다.



$k=4$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$2+(20-2\times4)=14$이다.

3) $k>4$인 경우

$0 \le x < k$에서 $f(x)+1=0$의 실근은 $\sin\pi x=-\frac{4}{k}$의 실근과 같다.

$\sin\pi x$의 주기는 2이므로, (홀수, 홀수+1)의 구간에서 $\sin\pi x = -\frac{4}{k}$의 실근은 2개씩 생긴다.

즉, $0 \le x < k$에서 $\sin\pi x = -\frac{4}{k}$의 실근의 개수는 $2\times\left[\frac{k}{2}\right]$와 같다.

([ ]: 가우스함수. $\left[\frac{k}{2}\right]$는 $\left[\frac{k}{2}\right]$보다 크지 않은 최대 정수를 의미한다. 이 경우 k가 자연수이기 때문에 $\left[\frac{k}{2}\right]$의 값은 $\left[\frac{k}{2}\right]$까지의 자연수의 개수와 동일하다.
(홀수, 홀수+1)의 구간의 개수를 세어줘야 하므로,

자연수 p에 대해

$k=2p$라면, $0 \le x < k$에서 (홀수, 홀수+1) 구간은 $\frac{k}{2}=p$개 존재하고,

$k=2p+1$이라면, $0 \le x < k$에서 (홀수, 홀수+1) 구간은 $\frac{k-1}{2}=\frac{2p}{2}=p$개 존재한다.

이를 가우스기호로 표현해서, $0 \le x < k$에서 (홀수, 홀수+1) 구간은 $\left[\frac{k}{2}\right]$개 존재한다고 한 것이다.)

$k=5$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$2\times\left[\frac{5}{2}\right]+(20-2\times5)=14$이다.

$k=6$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$2\times\left[\frac{6}{2}\right]+(20-2\times6)=6+8=14$이다.

$k=7$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$2\times\left[\frac{7}{2}\right]+(20-2\times7)=12$이다.

$k=8$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$2\times\left[\frac{8}{2}\right]+(20-2\times8)=8+4=12$이다.

$k=9$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는

$2\times\left[\frac{9}{2}\right]+(20-2\times9)=8+2=10$이다.

$k\ge10$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$2\times\left[\frac{10}{2}\right]+0=10$이다.

4) $k>10$인 경우

$0 \le x \le 10$에서 $f(x)+1=0$의 실근은 $\sin\pi x = -\frac{4}{k}$의 실근과 같다.

$k>10$일 경우 주어진 방정식의 실근의 개수는
$2\times\left[\frac{10}{2}\right]+0=10$이다.

따라서 닫힌구간 $[0, 10]$에서 방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 6의 배수이도록 하는 모든 자연수 k는 1, 7, 8이고, 모든 k의 값의 합은 16이다.

여담:

$\cos4\pi x$의 최댓값과 최솟값이 정해져있기 때문에 $x \ge k$에서 주어진 방정식의 실근의 개수는 일반화시킬 수 있다.

$1+\frac{k}{2}\sin\pi x$의 최댓값과 최솟값이 k값에 따라 바뀌기 때문에, $0 \le x < k$에서 주어진 방정식의 실근의 개수는 k값에 따라 분류해서 구해야한다.

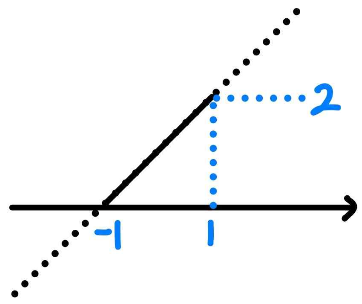
가우스함수는 개수를 세는 식에 활용하면, 실수할 포인트가 줄어드니 가우스함수를 통해 개수 세는 식을 표현하는 방법도 연습해두자.

15.

정답: ⑤

해설:

step1



$g(x)$는 연속함수이기 때문에 $f(-1)=0$이고 $f(1)=2$이다.

또한 $g(x)$의 미분불가능점이 1개이기 때문에

$f'(-1)=1,\ f'(1)\neq 1$ 또는

$f'(-1)\neq 1,\ f'(1)=1$이다.

step2

ㄱ.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$이려면 $f(x)$가 2차 이하의 다항함수여야한다.

$f(-1)=0,\ f(1)=2$이므로 $f(x)=p(x+1)(x-1)+x+1$라 하자.
(이때 p는 0이어도 된다.)

1) $f'(1)=1,\ f'(-1)\neq 1$인 경우

$f'(1)=2p+1=1$이므로 $p=0$이고,

이때 $f'(-1)=-2p+1=1$이므로 $f'(-1)\neq 1$을 만족하지 않는다.

($g(x)$의 미분불가능점이 0개이다.)

2) $f'(-1)=1,\ f'(1)\neq 1$인 경우

$f'(-1)=-2p+1=1$이므로 $p=0$이고,

이때 $f'(1)=2p+1=1$이므로 $f'(1)\neq 1$을 만족하지 않는다.

($g(x)$의 미분불가능점이 0개이다.)

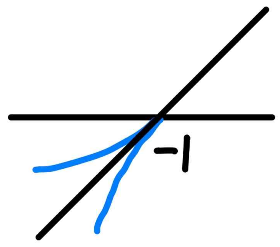
따라서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$을 만족시키는 다항함수 $f(x)$는 존재하지 않고, ㄱ은 거짓이다.

ㄴ.

모든 실수 x에 대해 $g(x)\geq 0$일 때,

$x\leq -1$에서 $f(x)\geq 0$이므로 $x=-1$에서 $g(x)$는 미분불가능하다.

(만약 $f'(-1)=1$이라면, $x=-1$ 주위에서 $g(x)$가 증가하므로, $x\to -1-$일 때 $g(x)<0$이다.



위 그림은 $f'(-1)=1$로 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능한 상황을 나타낸 것으로, $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 모든 실수 x에 대해 $g(x)\geq 0$ 조건을 만족시키지 않는다.)

$g(x)$의 미분불가능점이 1개이고, $x=-1$에서 미분불가능하므로

$g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고, ㄴ은 참이다.

ㄷ.

$x\to -\infty,\ x\to\infty$일 때 $g(x)\leq 2$이므로 $f(x)$의 최고차항 계수는 음수이다.

$f(-3)=2$이고,

$x=-3$에서 $g(x)=f(x)$이며 $g(x)\leq 2$이고 미분가능해야하므로,

$f'(-3)=0$이다.

또한 $f(1)=g(1)=2$인데 모든 실수 x에 대해 $g(x)\leq 2$이려면 $g(x)$는 $x=1$에서 미분불가능해야하므로 $x=-1$에서 $g(x)$는 미분가능하고, $f'(-1)=1$이다.

$f(x)=(x+3)^2(x-1)(px+q)+2$라 한다면, (단, $p<0$)

$f(-1)=8p-8q+2=0$이므로 $p-q+\dfrac{1}{4}=0$이고,

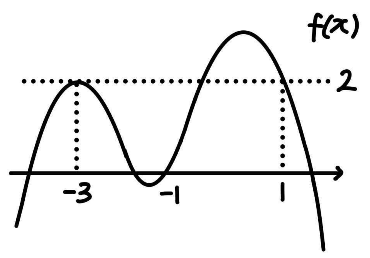
$f'(-1)=-8p+4(-p+q)-4(-p+q)-4(-p+q)=1$이므로

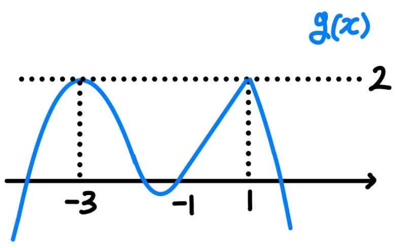
$p+q=-\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $p=-\dfrac{1}{4},\ q=0$이고,

$f(x)=-\dfrac{1}{4}x(x+3)^2(x-1)+2$이므로 $f(3)=-52$이고

ㄷ은 참이다.





여담:

ㄱ, ㄴ, ㄷ의 상황 모두 $f(-1)=0$이고 $f(1)=2$이며, $f'(-1)=1$과 $f'(1)=1$ 중 하나만 만족한다.

ㄱ의 경우 $f'(-1)=1$을 만족하는 상황과 $f'(1)=1$을 만족하는 상황 모두 거짓임을 보이면 되고,

ㄴ의 경우 $f'(1)=1$임을 알아내면 되고,

ㄷ의 경우 $f'(-1)=1$임을 사용하는 상황이다.

또한 ㄷ의 경우, 식을 세울 때 $y=2$ 기준으로 세우면 편리하다.

20.

정답: 12

해설:

step1 b_n 구하기

$$b_n=\max\left\{a_n, 1-\frac{a_n}{2}\right\}=\begin{cases} a_n & (a_n \geq \frac{2}{3}) \\ 1-\frac{a_n}{2} & (a_n < \frac{2}{3}) \end{cases}$$

step2

1) $a_n < \frac{2}{3}$일 때 n이 증가함에 따라 b_n은 감소하고,

$a_n \geq \frac{2}{3}$일 때 n이 증가함에 따라 b_n은 증가한다.

2) $a_n < \frac{2}{3}$일 때 $b_n=1-\frac{1}{2}a_n$이므로 $b_n > \frac{2}{3}$이고,

$a_n \geq \frac{2}{3}$일 때 $b_n=a_n$이므로 $b_n \geq \frac{2}{3}$이다.

따라서 b_n의 값은 항상 양수이다.

3) a_n의 공차가 양수이므로 n이 증가함에 따라 a_n은 계속 증가하며, 따라서 b_n은 n이 증가함에 따라 어느 순간까지는 감소하다가 그 이후로 계속 증가한다.

4) b_2, b_5, b_8은 순서대로 공비가 2인 등비수열을 이루고, 2)에 의해 b_n의 값은 모두 양수이므로, b_2, b_5, b_8은 증가하는 형태이다.

그러므로 1)과 4)에 의해 $b_5=a_5$, $b_8=a_8$이고, $a_5 \geq \frac{2}{3}$, $a_8 \geq \frac{2}{3}$이다.

step3

$a_n=a+(n-1)d$라 하자. (단, $d>0$)

1) $b_2=a_2$인 경우 ($a_2 \geq \frac{2}{3}$인 경우)

$b_5=2b_2$이므로 $a_5=2a_2$이고, 따라서 $a+4d=2(a+d)$이므로 $a=2d$이다.

$b_8=2b_5$이므로 $a_8=2a_5$이고, 따라서 $a+7d=2(a+4d)$이므로 $a=-d$이다.

그러므로 이 경우 $a=d=0$이므로 a_n의 공차가 양수라는 조건을

만족시키지 않는다.

2) $b_2 = 1 - \frac{1}{2}a_2$인 경우 ($a_2 < \frac{2}{3}$인 경우)

$b_5 = 2b_2$이므로 $a_5 = 2 \times (1 - \frac{1}{2}a_2)$이고, 따라서

$a + 4d = 2 - (a + d)$이므로 $2a + 5d = 2$이다.

$b_8 = 2b_5$이므로 $a_8 = 2a_5$이고, 따라서 $a + 7d = 2(a + 4d)$이므로 $a = -d$이다.

그러므로 $a = -\frac{2}{3}$, $d = \frac{2}{3}$이다.

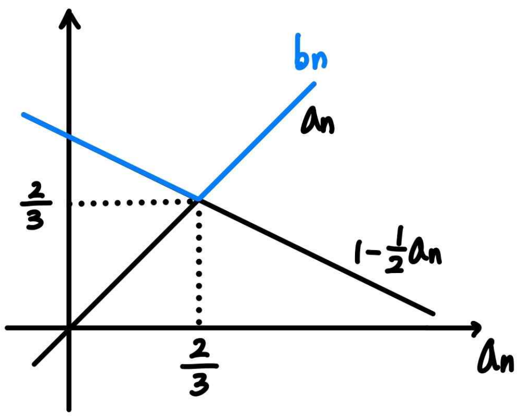
step4

$a_n = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(n-1)$이므로 $a_{20} = -\frac{2}{3} + \frac{38}{3} = 12$이다.

여담:

step2의 과정을 다음과 같이 생각해도 좋다.

1) 그래프로 살펴봐도



a_n의 값이 증가함에 따라, b_n의 값이 감소하다 증가한다는 점을 알 수 있다.

이때 n값이 증가함에 따라 a_n도 증가하므로, (a_n은 n에 대한 일차함수),

n을 실수 전체의 범위로 확장시켰을 때, b_n은 n값이 증가함에 따라 감소하다 증가한다는 점을 알 수 있다.

2) $b_2 < b_5 < b_8$이므로 적어도 b_5와 b_8은 $\frac{2}{3}$이상이다.

3) 만약 a_2까지 $\frac{2}{3}$이상이라면, b_2, b_5, b_8은 하나의 등차수열을 이루는데, 공비가 2인 등비수열이라 했으므로 모순이다.

(b_2, $b_5 = 2b_2$, $b_8 = 4b_2$인데, b_2, $2b_2$, $4b_2$가 등차수열을 이루는 것은 $b_2 \neq 0$일 때 불가능하다.

일반적으로 세 수가 공비 r인 등비수열을 이룰 때 공비가 1이거나 초항이 0이 아니라면, 등차수열이 될 수 없다.)

4) 따라서 $b_2 < \frac{2}{3}$이다.

21.

정답: 98

해설:

step1 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 0$ 이용하기

$a_2 = a$라 하자.

주어진 조건 (가)는 $a_n + a_{n+2} = -n + a$와 같다.

따라서

$a_9 = -a_7 + (-7+a) = a_5 - 2 = -a_3 - 5 + a = a_1 - 4 = -2$이고

$a_{10} = -a_8 + (-8+a) = a_6 - 2 = -a_4 - 6 + a = a_2 - 4 = a - 4$이다.

그러므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= (a_1+a_3)+(a_2+a_4)+(a_5+a_7)+(a_6+a_8)+(a_9+a_{10}) \\ &= (-1+a)+(-2+a)+(-5+a)+(-6+a)+(-2+a-4) \\ &= 5a-20 = 0\end{aligned}$$
이므로

$a = a_2 = 4$이고, $a_n + a_{n+2} = -n+4$이다.

step2

$a_n + a_{n+2} = -n+4$, $a_{n+2} + a_{n+4} = -n+2$이므로 두 식의 차이를 구하면 $a_{n+4} = a_n - 2$이다.

이때 $a_1 = 2$이고, $a_1 + a_3 = -1+4 = 3$이므로 $a_3 = 1$이며,

$a_2 = 4$이고, $a_2 + a_4 = -2+4 = 2$이므로 $a_4 = -2$이다.

따라서

$a_{19} = a_3 - 2 \times \dfrac{19-3}{4} = a_3 - 8 = -7$이고,

$a_{28} = a_4 - 2 \times \dfrac{28-4}{4} = a_4 - 12 = -14$이므로,

$a_{19} \times a_{28} = -7 \times (-14) = 98$이다.

여담:

(가) 조건을 해석해 (나) 조건을 해석하는 과정에서 a_2의 값을 구할 수 있다.

또한 (가) 조건을 변형해 a_{n+4}와 a_n 사이의 관계식을 구할 수 있다.

22.

정답: 13

해설:

step1

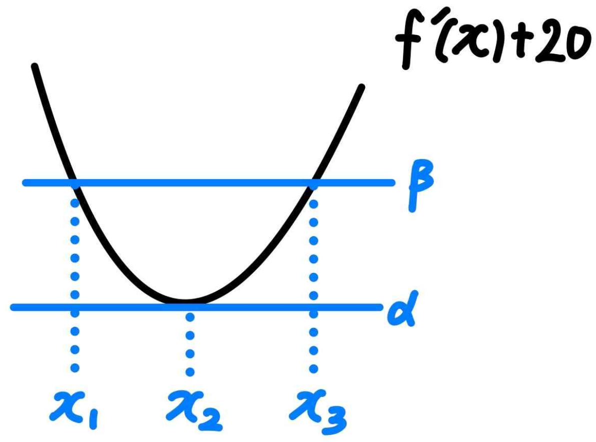
$f(x) \le 3$을 만족시키는 x의 범위를 집합 p라 하면,

함수 $y = f'(x)+20$의 치역이 집합 p에 속하게 하는 x값의 범위가 집합 S이다.

집합 S의 세 원소를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하자. (단, $x_1 < x_2 < x_3$)

집합 S의 원소가 3개이려면,
$f'(x_1)+20 = f'(x_3)+20 \neq f'(x_2)+20$이고, 함수 $y = f'(x)+20$은 $x = x_2$에서 극솟값을 가져야한다.

$f'(x_2)+20 = \alpha$, $f'(x_1)+20 = f'(x_3)+20 = \beta$라 하자. (단, $\alpha < \beta$)

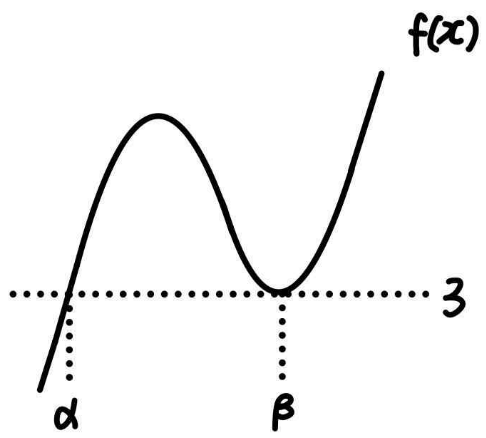


이때 구간 (α, β)는 집합 p에 속하지 않으므로,

(α, β)에서 $f(x) > 3$,

$x = \alpha$, β에서 $f(x) \le 3$이어야 한다.

따라서 $f(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)^2 + 3$이다.



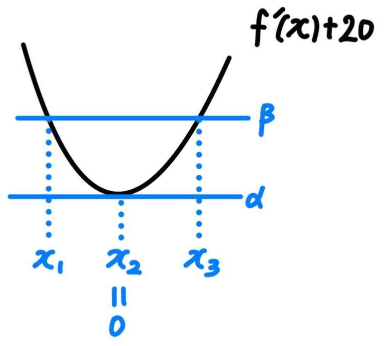
step2

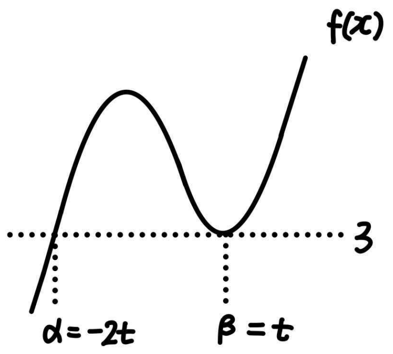
$x = x_1$과 $x = x_3$은 $x = x_2$에 대해 대칭이므로,

집합 S의 모든 원소의 합은 $x_1+x_2+x_3=3x_2=0$이고,

따라서 $x_2=0$이다.

또한 삼차함수 $f(x)$에서 비율관계에 의해 $\alpha=-2t$, $\beta=t$라 할 수 있다. (단, $t>0$)





그러므로 $f(x)=2(x+2t)(x-t)^2+3$이고,
$f'(x_2)+20=f'(0)+20=\alpha=-2t$이다.

step3

$f(x)$를 x에 대해 미분하면 $f'(x)=6(x+t)(x-t)$이고,

$f'(0)+20=-6t^2+20=-2t$이므로

양수 t의 값은 2이다.

따라서 $f(x)=2(x+4)(x-2)^2+3$, $f'(x)=6(x+2)(x-2)$이고,
$\alpha=-2t=-4$, $\beta=t=2$이다.

집합 S의 가장 큰 원소 $a=x_3$에 대해
$f'(x_3)+20=\beta=t=2$이므로 $x_1=-1$, $x_3=a=1$이다.

그러므로 $f(a)=f(1)=13$이다.

여담:

속함수인 $y=f'(x)+20$의 함숫값이 특정한 집합 p가 나오도록 하는 정의역의 개수가 3개라는 점에서, 함수 $f(x)$에 대해 $y=3$의 위치를 확정할 수 있다.

결국 이 문제 역시 집합 S의 '불연속성'에 주목해 풀이했다.

4회 정답

8	④	9	③	10	②	11	②	12	④
13	②	14	④	15	②	20	50	21	30
22	45								

8.

정답: ④

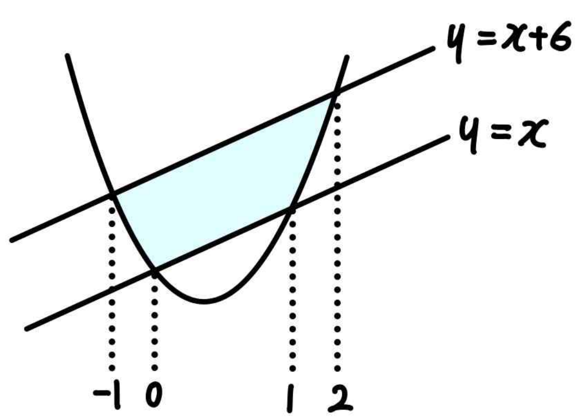
해설:

step1

$y=3x^2-2x$와 $y=x$의 교점의 x좌표는 방정식 $3x^2-2x=x$의 서로 다른 두 실근이므로 0과 1이고,

$y=3x^2-2x$와 $y=x+6$의 교점의 x좌표는 방정식 $3x^2-2x=x+6$의 서로 다른 두 실근이므로 -1과 2이다.

step2



곡선과 주어진 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는,

곡선과 $y=x+6$으로 둘러싸인 부분의 넓이에서,

곡선과 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 값과 같다.

따라서 곡선과 주어진 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

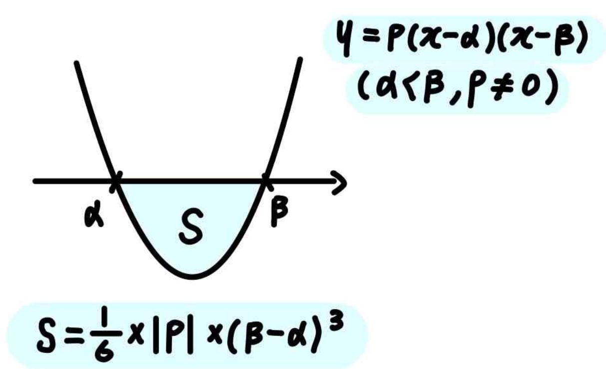
$\frac{3}{6}\{2-(-1)\}^2-\frac{3}{6}(1-0)^2=13$이다.

여담:

넓이공식 두 번으로 풀기!

이 공식은... 기본이고... 앞에서도 이미 적어놨으니... 생략하려 했으나, 한 번만 더 적어주겠다.

(교과서에도 나오는 공식을 설마 못 외운 친구는....없겠죠?)



9.

정답: ③

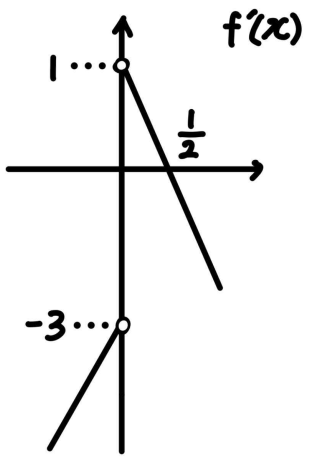
해설:

step1 $f'(x)$ 구하기

절댓값을 풀어보면 $f(x)=\begin{cases}-x^2+x+2 & (x \ge 0) \\ x^2-3x+2 & (x<0)\end{cases}$ 이므로,

$f(x)$를 미분해보면 $f'(x)=\begin{cases}-2x+1 & (x>0) \\ 2x-3 & (x<0)\end{cases}$ 이다.

step2



$f'(x)$는 $x=0$과 $x=\frac{1}{2}$ 주위에서 위 그림과 같이 부호가 바뀌므로,

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을, $x=\frac{1}{2}$에서 극댓값을 가진다.

따라서 극솟값은 $f(0)=2$이고, 극댓값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$이므로

극댓값과 극솟값의 합은 $\frac{17}{4}$이다.

여담:

귀찮아도 차근차근 절댓값 풀기. 괜히 계산 줄이려다가 실수 나오기 딱 좋은 느낌이다.

10.

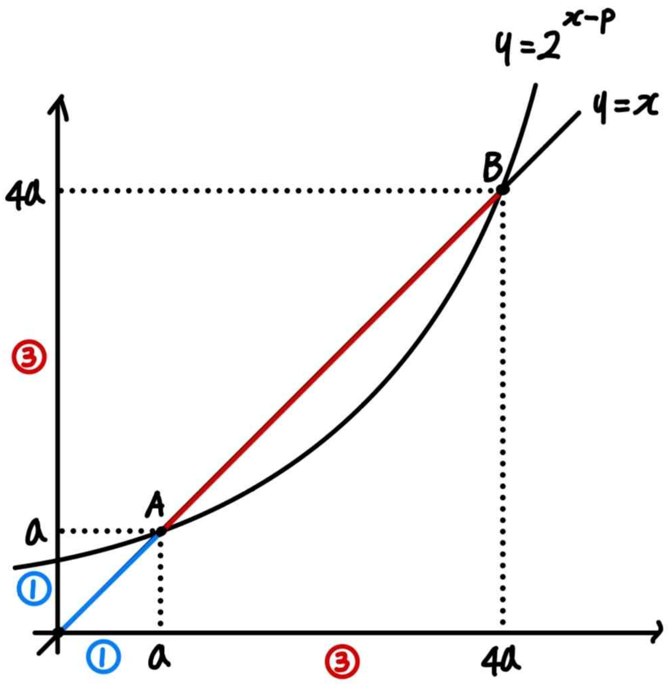
정답: ②

해설:

step1 점 A, B의 좌표 설정

점 A는 직선 $y=x$ 위에 있으므로, 점 A의 좌표를 (a, a)라 할 수 있다. (단, $a>0$)

이때 세 점 O, A, B는 한 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\overline{OA}:\overline{OB}=1:4$이고, 점 B의 좌표를 $(4a, 4a)$라 할 수 있다.



step2

점 A가 $y=2^{x-p}$ 위의 점이므로 $2^{a-p}=a$이고, ……ㄱ

점 B도 $y=2^{x-p}$ 위의 점이므로 $2^{4a-p}=4a$이다. ……ㄴ

식 ㄴ을 식 ㄱ으로 나누어주면 $2^{3a}=4$이므로 $a=\frac{2}{3}$이다.

따라서 $2^{\frac{2}{3}-p}=\frac{2}{3}$이므로 $p=\frac{2}{3}-\log_2\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}+\log_2 3=\log_8\frac{27}{2}$ 이다.

여담:

주어진 길이비와, 세 점이 한 직선 위에 있다는 사실을 이용해 점 A, B의 좌표를 한 문자로 표현할 수 있다.

이후 두 점이 한 곡선 위에 있다는 사실을 이용해 계산하기

11.

정답: ②

해설:

step1

l과 m이 평행하므로 $f'(0)=f'(2)$이다.

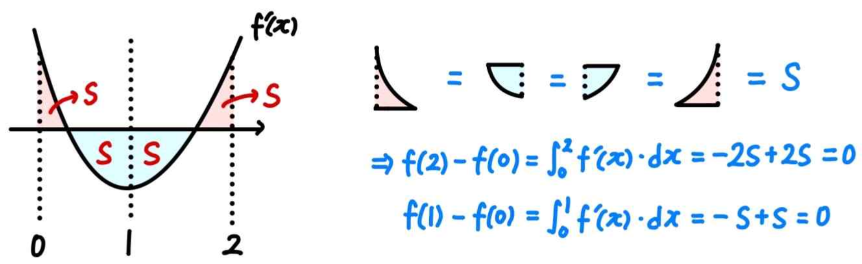
따라서 $f'(x)$는 $x=1$ 기준 대칭이며, $f(x)$는 점 $(1, f(1))$ 기준 대칭이다.

또한 주어진 조건에서 $f(0)=f(2)=1$이므로 $f(1)=1$임을 알 수 있다.

(참고: $f(1)=1$임을 구하는 방법 중 세 가지를 설명하겠다.

먼저, $(1, f(1))$이 변곡점임을 이용해 확인 가능하며,

$f'(x)$의 그래프를 통해 넓이로도 파악 가능하다.



수식으로 확인해보자면, $f'(x)$의 대칭성에 의해 $f'(x)=f'(2-x)$이고 $f(0)=f(2)$이므로 $\int_0^2 f'(x)dx=0$이다.

이때 $\int_1^2 f'(x)dx=\int_1^2 f'(2-x)dx=\int_0^1 f'(x)dx$이므로 $\int_0^2 f'(x)dx=2\times\int_0^1 f'(x)dx=0$이므로 $f(1)=f(0)$이다.)

step2

$f(0)=f(1)=f(2)=1$이므로 $f(x)=px(x-1)(x-2)+1$이라고 하자. (단, $p>0$)

$f'(0)=f'(2)=2p$이므로 직선 l과 m을 구해보면,

l: $y=2px+1$ 이고

m: $y=2p(x-2)+1$ 이다.

이때 직선 l과 m 사이 거리는 직선 l과, 직선 m 위의 한 점인 $(2, 1)$ 사이의 거리와 같다.

따라서 $\dfrac{|2p\times2+1-1|}{\sqrt{(2p)^2+1}}=\dfrac{8}{5}$ 이므로 양수 p의 값은 $\dfrac{2}{3}$이다.

그러므로 $f(x)=\dfrac{2}{3}x(x-1)(x-2)+1$이고,

$f(4)=\dfrac{2}{3}\times4\times3\times2+1=17$이다.

여담:

변곡점, 즉 대칭성 잘 파악하면 무난하게 해석할 수 있는 문제.

두 직선 사이 거리는 한 직선과, 다른 직선 위 한 점 사이의 거리와 같다.

12.

정답: ④

해설:

step1

$2S_3=a_m+a_{m+4}$이므로 $S_3=a_{m+2}$이다.

따라서 a_m, S_3, a_{m+4}, a_{2m}, $\frac{35}{2}$는 순서대로

a_m, a_{m+2}, a_{m+4}, a_{m+6}, a_{m+8}과 같다.

step2

1) $a_{2m}=a_{m+6}$이므로 $m=6$이다.

2) $a_{m+8}=a_{14}=\frac{35}{2}$이다.

3) $S_3=a_{m+2}=a_8$이고 $S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2$이므로 $a_8=3a_2$이다.

$a_n=a+(n-1)d$라 하자. (단, $d\neq 0$)

이때 $3a_2=3(a_{14}-12d)=3\times\left(\frac{35}{2}-12d\right)$이고,

$a_8=a_{14}-6d=\frac{35}{2}-6d$인데,

$3a_2=a_8$이므로 $3\times\left(\frac{35}{2}-12d\right)=\frac{35}{2}-6d$이고, $d=\frac{7}{6}$이다.

따라서 $a_{11}=a_{14}-3d=\frac{35}{2}-3\times\frac{7}{6}=14$이고,

$m+a_{11}=6+14=20$이다.

여담:

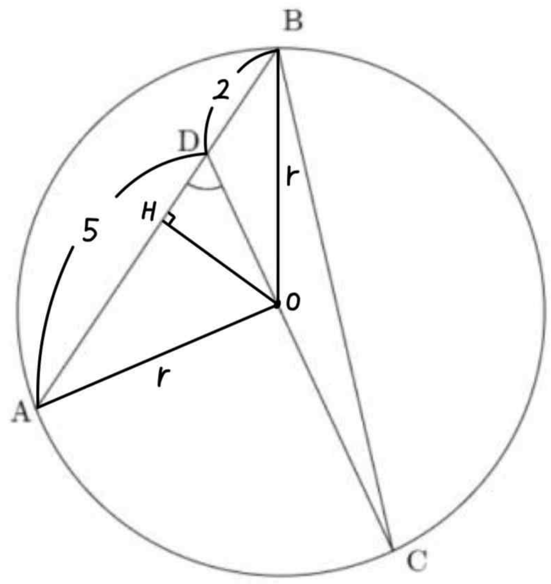
a_m, S_3, a_{m+4}, a_{2m}, $\frac{35}{2}$의 등차수열 조건을 놓치지 말고 이용해야 하는데, 무조건 등차중항만 이용하면 놓치기 쉬움!

그러므로 $2S_3=a_m+a_{m+4}$ 으로 각각의 항이 a_n의 어느항에 해당하는지 파악하고 푸는 것을 추천합니다.

13.

정답: ②

해설:



step1

선분 CD 위 원의중심 O에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 점 H라 하고, 주어진 원의 반지름의 길이를 r이라 하자.

삼각형 AOB는 이등변삼각형이므로, $\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{7}{2}$이다.

그러므로 $\overline{DH}=\overline{BH}-\overline{BD}=\frac{3}{2}$이고, $\cos\angle ODH=\frac{3}{8}\sqrt{2}$이므로

$\overline{OD}=\overline{DH}\times\frac{1}{\cos\angle ODH}=\frac{3}{2}\times\frac{8}{3\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$이다.

삼각형 AOD에서 코사인법칙을 사용하면,

$(\overline{AO})^2=(\overline{AD})^2+(\overline{OD})^2-2\times(\overline{AD})\times(\overline{OD})\times\cos\angle ADO$

$=5^2+(2\sqrt{2})^2-2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{3}{8}\sqrt{2}=18$이므로,

$\overline{AO}=r=3\sqrt{2}$이다.

따라서 선분 CD의 길이는

$\overline{CD}=\overline{OD}+\overline{OC}=2\sqrt{2}+r=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$이다.

step2

$\angle ADO+\angle BDC=\pi$이므로 $\cos\angle BDC=-\frac{3}{8}\sqrt{2}$이다.

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 사용하면,

$(\overline{BC})^2=(\overline{BD})^2+(\overline{CD})^2-2\times(\overline{BD})\times(\overline{CD})\times\cos\angle BDC$

$=2^2+(5\sqrt{2})^2-2\times2\times5\sqrt{2}\times\left(-\frac{3}{8}\sqrt{2}\right)=69$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{69}$ 이다.

여담:

주어진 그림의 모양이 괴상하니 원의 중심에서 각 점을 연결하는 보조선, 원의 중심에서 수선의 발 내리기 등은 해보자.

14.

정답: ④

해설:

step1

$f(a)=0$인 실수 a를 생각해보자.

1) $f(a)=0,\ f'(a)\neq 0$인 경우

이 경우 $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$와 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$의 값이 다르므로

$f(a-3)=0,\ f(4-a)=0$이어야 한다.

2) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$인 경우 (단, $b\neq a$)

이 경우 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$의 값이 존재하므로 $x=a$에서

$\lim\limits_{x\to t}\dfrac{f(t-3)|f(x)|}{f(x)}$와 $\lim\limits_{x\to t}\dfrac{f(4-t)|f(x)|}{f(x)}$의 값이 모두 존재한다.

또한 $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$와 $\lim\limits_{x\to b+}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$의 값이 다르므로

$f(b-3)=f(4-b)=0$이어야 한다.

3) $f(x)=(x-a)^3$인 경우

이 경우 $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$와 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$의 값이 다르므로

$f(a-3)=0,\ f(4-a)=0$이어야 한다.

이때 $a\neq a-3$이므로 삼차함수 $f(x)$에 대하여 이 경우는 불가능하다.

step2

I) $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$인 경우 (단, $a<b<c$)

$f(a-3)=0$이어야 $x=a$에서 주어진 조건 (가)를 만족시키는데,

$a-3<a<b<c$이므로 $f(a-3)\neq 0$이다.

따라서 이 경우는 불가능하다.

II) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$인 경우 (단, $a\neq b$)

$f(b-3)=f(4-b)=0$이어야하므로 $b-3=a$이다.

즉, $f(x)=(x-b)\{x-(b-3)\}^2$이다.

II-1) $b=4-b$인 경우

$b=2$이므로 $f(x)=(x-2)(x+1)^2$이고,

이 경우 $f(3)>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

II-2) $b-3=4-b$인 경우

$b=\frac{7}{2}$이므로 $f(x)=\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$이고, $f(3)<0$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $f(x)=\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$이고, $f\left(\frac{9}{2}\right)=16$이다.

여담:

문제 풀이가 헷갈리는 사람은, 상황별로 가, 나 조건을 동시에 만족하기 위해 필요한 조건을 따지는 과정인 step1을 잘 살펴보자.

15.

정답: ②

해설:

step1

n의 값이 증가함에 따라 a_n의 값은 증가하거나 유지한다.

그러므로 a_n의 모든 항은 자연수이다.

또한 $n=15$부터 $n=35$까지 a_n의 값은 모두 똑같아야 하고, 이 값을 a라 하자.

이때 $a>15$, $a>16$, $\cdots$, $a>34$여야 $n=15$부터 $n=35$까지 a_n의 값이 모두 똑같을 수 있으므로 $a=a_{15}>34$이다.

step2

$a_{10}<a_{15}$이므로 $n=10$과 $n=15$ 사이에 증가하는 항이 존재한다.

1) $a_{10}<a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{15}=\cdots=a_{35}$인 경우

이 경우 $a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{35}=a$이고, $a>34$이다.

또한 $a_{10}<a_{11}$이므로 $a_{10}\le 10$이고 $a_{11}=a_{10}+20\le 30$이므로 $a>34$를 만족시키지 않는다.

2) $a_{11}<a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{15}=\cdots=a_{35}$인 경우

이 경우 $a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{35}=a$이고, $a>34$이다.

또한 $a_{11}<a_{12}$이므로 $a_{11}\le 11$이고 $a_{12}=a_{11}+22\le 33$이므로 $a>34$를 만족시키지 않는다.

3) $a_{12}<a_{13}=a_{14}=a_{15}=\cdots=a_{35}$인 경우

이 경우 $a_{13}=a_{14}=\cdots=a_{35}=a$이고, $a>34$이다.

또한 $a_{12}<a_{13}$이므로 $a_{12}\le 12$이고, $a_{13}=a_{12}+24\le 36$이므로 $34<a\le 36$이고, $a=35$ 또는 $a=36$이다.

만약 $a_{13}=35$이라면, $a_{12}=11$, $a_{11}=-11$이므로, 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a_{13}=36$이라면, $a_{12}=a_{11}=\cdots=a_6=a_5=12$이고, $a_4=a_3=a_2=a_1=4$ 또는 12이다.

이 경우 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

4) $a_{13}<a_{14}=a_{15}=\cdots=a_{35}$인 경우

이 경우 $a_{14}=a_{15}=\cdots=a_{35}=a$이고, $a>34$이다.

또한 $a_{13} < a_{14}$이므로 $a_{13} \le 13$이고, $a_{14} = a_{13} + 26 \le 39$이므로 $34 < a \le 39$이고, $a = 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 39$이다.

$a = a_{14} = 35$이라면, $a_{13} = 9$, $a_{12} = -15$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{14} = 36$이라면, $a_{13} = 10$, $a_{12} = -14$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{14} = 37$이라면, $a_{13} = 11$, $a_{12} = -13$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{14} = 38$이라면, $a_{13} = 12$, $a_{12} = -12$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{14} = 39$이라면, $a_{13} = a_{12} = \cdots a_1 = 13$이고, 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

5) $a_{14} < a_{15} = \cdots = a_{35}$인 경우

이 경우 $a_{15} = \cdots = a_{35} = a$이고, $a > 34$이다.

또한 $a_{14} < a_{15}$이므로 $a_{14} \le 14$이고, $a_{15} = a_{14} + 28 \le 42$이므로 $34 < a \le 42$이고, $a = 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 39,\ 40,\ 41,\ 42$이다.

$a = a_{15} = 35$이라면, $a_{14} = 7$, $a_{13} = -19$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{15} = 36$이라면, $a_{14} = 8$, $a_{13} = -18$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{15} = 37$이라면, $a_{14} = 9$, $a_{13} = -17$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{15} = 38$이라면, $a_{14} = 10$, $a_{13} = -16$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{15} = 39$이라면, $a_{14} = 11$, $a_{13} = -15$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{15} = 40$이라면, $a_{14} = 12$, $a_{13} = -14$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{15} = 41$이라면, $a_{14} = 13$, $a_{13} = -13$이므로 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a = a_{15} = 42$이라면, $a_{14} = a_{13} = \cdots = a_1 = 14$이고, 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

step3

따라서 가능한 a_1의 값의 합은 $4 + 12 + 13 + 14 = 43$이다.

여담:

1) $a_{10} < a_{15}$이므로, $a_n = a_{15}$를 만족시키는 가장 작은 자연수 n을 기준으로 케이스분류하기.

2) 상황 이해를 돕기 위해, 수열 a_n이 진행되는 방식을 보여주겠다.

$a_1 = m$이라 하자. (단, m은 자연수)

이때 $m \ge 1$이므로 $a_2 = m + 4$이다.

또한 $n \le m + 4$일 때 $a_n \le m + 4$이므로,

$a_2 = a_3 = \cdots = a_{m+4} = m + 4$이다.

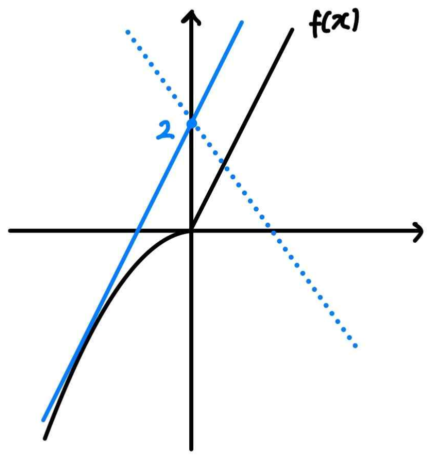
이때 $a_{m+4} \ge m + 4$이므로, $a_{m+5} = (m+4) + 2 \times (m+4)$이다.

즉, a_n은 n의 값이 증가함에 따라 유지를 반복하다가 한 번 증가하고, 이 패턴을 계속 반복한다.

20.

정답: 50

해설:



1) $y=tx+2$와 $y=2x$ $(x \geq 0)$의 교점의 개수가 바뀌는 순간은, 두 직선이 평행한 순간으로, $t=2$일 때이다.

2) $y=tx+2$와 $y=-ax^2$ $(x<0)$의 교점의 개수가 바뀌는 순간은, $y=tx+2$와 $y=-ax^2$ $(x<0)$이 접하는 순간이다.

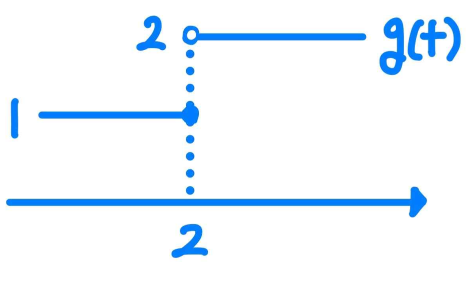
이때 $g(t)$가 불연속인 t의 값이 1개이기 때문에, 두 상황 1과 2는 동시에 일어난다.

그러므로 $y=2x+2$와 $y=-ax^2$ $(x<0)$이 접해야한다.

즉, 방정식 $ax^2+2x+2=0$의 실근이 1개여야 하므로, 판별식을 사용하면 $2^2-4 \times a \times 2=0$이고, $a=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $100a=50$이다.

(참고: $g(t)$의 그래프는 아래와 같다.)



여담:

$g(t)$가 불연속일 수 있는 상황은 두 번 존재하므로, 그 두 순간이 겹쳐야한다는 점에 주목하기.

21.

정답: 30

해설:

step1 (step2에서 다시 설명 예정)

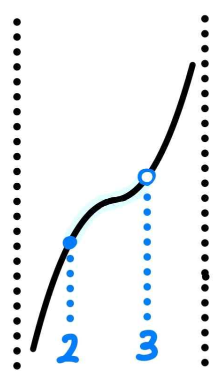
조건 (가)를 통해, $a<0$, $b<0$이고 구간 $(2, 3)$에 점근선이 존재하지 않는다는 점을 알 수 있다.

조건 (나)를 통해, $x=3$은 $f(x)$의 점근선임을 알 수 있다.

step2

$ab>0$이므로 a, b의 부호에 따라 케이스를 나눠 살펴보자.

1) $a>0$, $b>0$인 경우



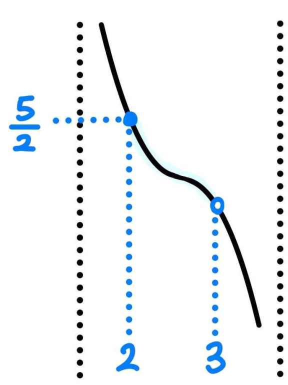
최댓값이 존재하려면 구간 $(2, 3)$에 점근선이 포함되면 안 된다.

그러나 이 경우 $[2, 3)$에서 $f(x)<f(3)$이므로 최댓값이 존재하지 않는다.

($x=3$이 점근선일 경우도, 마찬가지로 $f(x)$의 최댓값이 존재하지 않는다.)

2) $a<0$, $b<0$인 경우

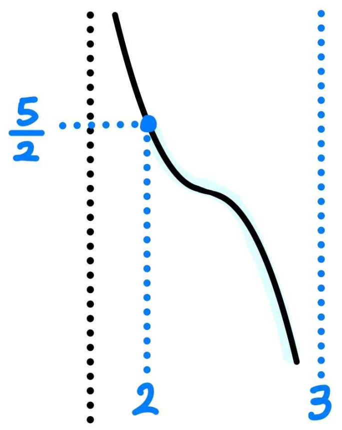
1과 마찬가지로 최댓값이 존재하려면 구간 $(2, 3)$에 점근선이 포함되면 안 된다.



또한 위 그림처럼 $x=3$이 점근선이 아니라면, $M=f(3)$일 경우 구간 $[2, 3)$의 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>M$이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다.

따라서 $x=3$은 $f(x)$의 점근선이며, $\left|\frac{\text{홀수}}{2b}\pi\right|=3$이다.

step3



먼저, 구간 $(2,3)$에 점근선이 존재하지 않으므로

$f(x)$의 주기 $=-\frac{\pi}{b}\geq 1$이다.

또한, step2에서 살펴봤듯이 $\left|\frac{\text{홀수}}{2b}\pi\right|=3$이므로,

위 두 조건을 동시에 만족시키는 음수 b의 값은 $-\frac{5}{6}\pi$이다.

(만약 $b=-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$일 경우 a의 값이 음수가 아니다.)

조건 (가)에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{5}{2}$이므로,

$f(2)=a+\sqrt{3}\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\times 2\right)=\frac{5}{2}$이고, $a=-\frac{1}{2}$이다.

그러므로 $\frac{72ab}{\pi}=\frac{72\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}{\pi}=30$이다.

여담:

요약하면 step1이 된다.

구간의 한쪽 끝이 열려있는데 최댓값이 존재한다는 점에 주목하자.

기출 다시보기: 2023학년도 수능 9번

9. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

정답: 3번

22.

정답: 45

해설:

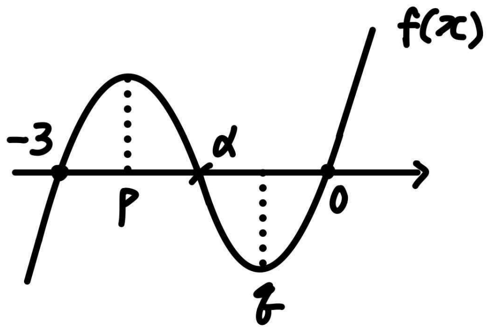
step1

$g(x)$는 연속함수이므로 $f(0)=f(-3)=0$이다.

또한, 만약 $f'(0)\times f'(-3)\le 0$이었다면, $g(x)$는 $x=0$에서도 극값을 가졌을 것이고, 이 경우 모든 a의 값의 곱은 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

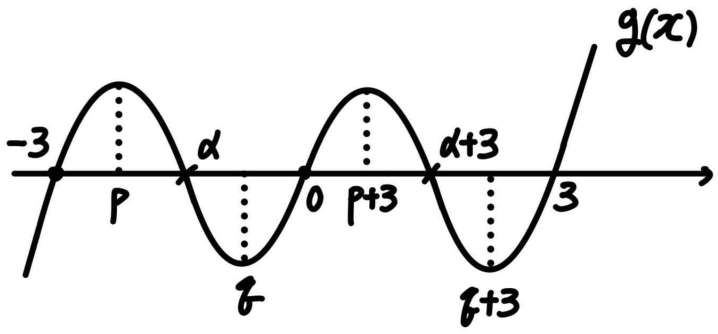
따라서 $f'(0)\times f'(-3)>0$이다.

step2



$f(x)=x(x+3)(x-\alpha)$, $f'(x)=3(x-p)(x-q)$라 하자.

(단, $-3<p<\alpha<q<0$)



$g(x)$가 극값을 가지는 x값은 $x=p$, $x=q$, $x=p+3$, $x=q+3$이다.

따라서 $p\times q\times(p+3)\times(q+3)=pq\times\{pq+3(p+q)+9\}=\dfrac{5}{4}$이다.

이때 $f(x)=x(x+3)(x-\alpha)$이므로

$f'(x)=3x^2+(6-2\alpha)x-3\alpha=3(x-p)(x-q)$이고, $p+q=\dfrac{2}{3}\alpha-2$, $pq=-\alpha$이다.

그러므로 $pq\times\{pq+3(p+q)+9\}=-\alpha(-\alpha+2\alpha-6+9)=\dfrac{5}{4}$이고,

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\alpha=-\dfrac{5}{2}$이다.

이때 $g(2)=f(-1)<0$이므로, $\alpha<-1$이어야 한다.

따라서 $\alpha=-\dfrac{5}{2}$이므로 $f(x)=x\left(x+\dfrac{5}{2}\right)(x+3)$이고,

$f(2)=2\times\left(2+\dfrac{5}{2}\right)\times 5=45$이다.

여담:

$g(x)$의 그래프는 원점대칭이 아님 주의!

5회 정답

8	②	*9*	①	*10*	④	*11*	③	*12*	③
13	④	*14*	⑤	*15*	④	*20*	18	*21*	98
22	100								

8.

정답: ②

해설:

$a_1 = 9$이므로 $a_2 = a_1 - 4 = 5$, $a_3 = a_2 - 4 = 1$, $a_4 = 3a_3 = 3$,
$a_5 = a_4 - 4 = -1$이고,

$\sum_{k=1}^{5} a_k = 17$이다.

$a_6 = 3a_6 = -3$, $a_7 = 3a_6 = -9$, $a_8 = 3a_7 = -27$이므로

$\sum_{k=1}^{7} a_k = 5$이고, $\sum_{k=1}^{8} a_k = -22$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{m} a_k < 0$인 자연수 m의 최솟값은 8이다.

여담:

a_n을 관찰해보면, n이 증가함에 따라 $a_n \geq 2$일 때 a_n의 값은 감소하고, $0 < a_n < 2$일 때 a_n의 값은 증가하며, $a_n < 0$일 때 a_n의 값은 감소한다. 즉, a_n의 값이 한 번 음수가 나오면 그 이후로는 계속 음수가 나온다.

주어진 상황에서는 n이 증가함에 따라 a_n이 계속 감소한다.

9.

정답: ①

해설:

만약 $f(2) \neq 2$라면, $\lim_{x\to2}\dfrac{\int_2^x f(t^3)dt}{f(x)-x}=0\neq3$이기 때문에

$f(2)=2$이다.

위 극한의 분모와 분자를 $(x-2)$로 나눠주면,

$$\lim_{x\to2}\dfrac{\dfrac{\int_2^x f(t^3)dt}{x-2}}{\dfrac{f(x)-x}{x-2}}=\dfrac{f(8)}{f'(2)-1}=\dfrac{f(8)}{2}=3$$이므로 $f(8)=6$이다.

따라서 $f(2)+f(8)=2+6=8$이다.

여담:

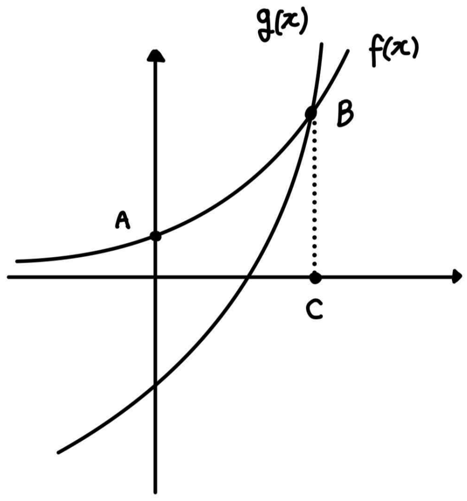
$f(2)=2$만 파악하면 수월하게 풀리는 문제!

10.

정답: ④

해설:

step1



점 A의 좌표는 $(0,2)$이다.

점 B의 x좌표를 p라 할 때, $f(p)=g(p)$이므로
$a^p+1=a^{2p}-11$이고, $a^p=4$이다.

따라서 점 B의 좌표는 $(p,5)$이고, 점 C의 좌표는 $(p,0)$이므로
$\overline{BC}=\overline{AB}=5$이다.

step2

$\overline{AB}=\sqrt{(p-0)^2+(5-2)^2}=5$이므로 $p=4$이고, $a^p=a^4=4$이므로
$a=\sqrt{2}$이다.

따라서 $f(6)=a^6+1=(\sqrt{2})^6+1=9$이다.

여담:

점 B의 x좌표를 설정하면 술술 풀린다..

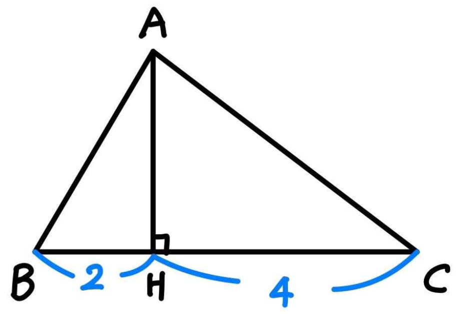
점 B의 x좌표와는 상관없이 점 B의 y좌표로 선분 BC의 길이를 구할 수 있다는 점 주목하기!

11.

정답: ③

해설:

step1 (나) 조건 해석/보조선 긋기



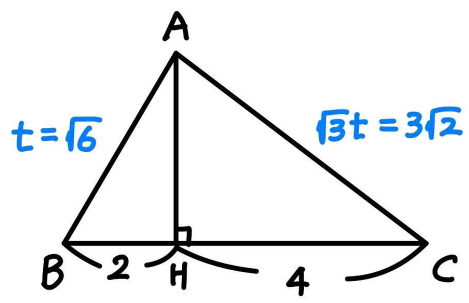
점 A에서 선분 BC에 수선의 발을 내리고, 그 수선의 발을 점 H라 하자.

삼각형 ABH에서 $\tan B = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$이고,

삼각형 ACH에서 $\tan C = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}}$이다.

따라서 (나) 조건에 의해 $2\tan C = \tan B$이고, 이는 $2\overline{BH} = \overline{CH}$로 해석할 수 있으며, $\overline{BC} = 6$이므로 $\overline{BH} = 2$, $\overline{CH} = 4$이다.

step2



(가) 조건에 의해 $\overline{AC} = \sqrt{3} \times \overline{AB}$이므로 $\overline{AB} = t$, $\overline{AC} = \sqrt{3}t$라 하자. (단, $t > 0$)

삼각형 ABH에서 $(\overline{AH})^2 = (\overline{AB})^2 - (\overline{BH})^2 = t^2 - 2^2$이고,

삼각형 ACH에서 $(\overline{AH})^2 = (\overline{AC})^2 - (\overline{CH})^2 = (\sqrt{3}t)^2 - 4^2$이다.

따라서 $(\overline{AH})^2 = t^2 - 4 = 3t^2 - 16$이므로 $t = \sqrt{6}$이고,
$\overline{AB} = t = \sqrt{6}$, $\overline{AC} = \sqrt{3}t = 3\sqrt{2}$이다.

step3

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면,

$$\cos\angle BAC = \frac{(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 - (\overline{BC})^2}{2 \times (\overline{AB}) \times (\overline{AC})}$$

$$= \frac{(\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 6^2}{2 \times \sqrt{6} \times 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\text{이므로,}$$

$\sin\angle BAC = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이다.

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하고, 삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면,

$$r = \frac{\overline{BC}}{2\sin\angle BAC} = \frac{6}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}\text{이다.}$$

여담:

(나) 조건을 괜히 cos, sin으로 분리하지 말고, 점 A에서 수선의 발을 내려 직각삼각형 두 개를 만들면 해석하기 쉬워짐.

step3에서 직각삼각형을 이용해 풀이를 단축할 수 있다.

삼각형 ABH에서,

$$\sin\angle ABH = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - 2^2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{이므로,}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면,

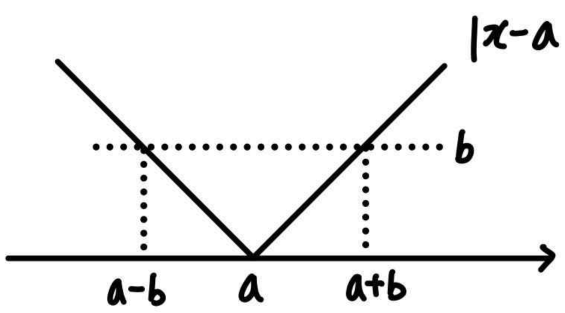
$$r = \frac{\overline{AC}}{2\sin\angle ABC} = \frac{3\sqrt{2}}{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}\text{이다.}$$

12.

정답: ③

해설1:

step1 $f(x)$의 불연속 의심점 확인하기



$f(x)$는 $x=a-b$ 또는 $x=a+b$에서 불연속일 수 있다.

(두 점에서 동시에 연속인 경우는 불가능하다.)

step2

1) $f(x)$가 $x=a-b$에서 불연속, $x=a+b$에서 불연속인 경우

$x=a-b$에서 $f(x)\{f(x)-4\}$가 연속이므로,

$(a-b+2)(a-b-2)=(2a-2b-4)(2a-2b-8)$이고,

$a-b=2$이거나 $a-b=6$이다.

또한 $x=a+b$에서 $f(x)\{f(x)-4\}$가 연속이므로,

$(a+b+2)(a+b-2)=(2a+2b-4)(2a+2b-8)$이고,

$a+b=2$이거나 $a+b=6$이다.

이때 $b>0$이므로 $a=2$, $b=4$이고, 이 경우 $f(x)$가 $x=a+b=6$에서 연속이므로 설정한 상황과 모순이다.

2) $f(x)$가 $x=a-b$에서 연속, $x=a+b$에서 불연속인 경우

$f(x)$가 $x=a-b$에서 연속이므로 $(a-b)+2=2(a-b)-4$이고 $a-b=6$이다.

또한 $x=a+b$에서 $f(x)\{f(x)-4\}$가 연속이므로,

$(a+b+2)(a+b-2)=(2a+2b-4)(2a+2b-8)$이고,

$a+b=2$이거나 $a+b=6$이다.

$a+b=6$이라면 $b=0$이기 때문에 $b>0$ 조건을 만족시키지 않는다.

또한 만약 $a+b=2$라면, $b=-2$이기 때문에 $b>0$ 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=a-b$에서 불연속이다.

3) $f(x)$가 $x=a-b$에서 불연속, $x=a+b$에서 연속인 경우

$f(x)$가 $x=a+b$에서 연속이므로 $(a+b)+2=2(a+b)-4$이고 $a+b=6$이다.

또한 $x=a-b$에서 $f(x)\{f(x)-4\}$가 연속이므로,

$(a-b+2)(a-b-2)=(2a-2b-4)(2a-2b-8)$이고,

$a-b=2$이거나 $a-b=6$이다.

만약 $a-b=6$이라면 $b=0$이기 때문에 $b>0$ 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a-b=2$이고, $a=4$, $b=2$이다.

그러므로 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (|x-4|<2) \\ 2x-4 & (|x-4|\geq 2) \end{cases}$이고,

$f(ab)=f(8)=2\times 8-4=12$이다.

해설2:

$f(x)\{f(x)-4\}=\begin{cases} (x+2)(x-2) & (|x-a|<b) \\ (2x-4)(2x-8) & (|x-a|\geq b) \end{cases}$이다.

이때 $f(x)\{f(x)-4\}$의 식이 바뀌는 경계에서 $(x+2)(x-2)=(2x-4)(2x-8)$이어야 하고, 이를 만족시키는 x값은 2, 6이다.

따라서 $a-b=2$, $a+b=6$이므로 $a=4$, $b=2$이다.

그러므로 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (|x-4|<2) \\ 2x-4 & (|x-4|\geq 2) \end{cases}$이고,

$f(ab)=f(8)=2\times 8-4=12$이다.

여담:

해설1에서 $f(x)$의 불연속 의심점을 확인한 뒤, 불연속 의심점들의 연속/불연속 여부로 케이스 분류하기.

함수 $f(x)\{f(x)-4\}$가 연속임을 따지는 과정을 조금 더 엄밀하게 이야기하자면, $f(x)\{f(x)-4\}$라는 함수가 $|x-a|<b$일 때 연속, $|x-a|>b$일 때 연속, $|x-a|=b$일 때 연속인지를 확인해야 한다.

13.

정답: ④

해설:

$a_n = 1+(n-1)d$라 하자. (단, d는 2 이상의 자연수)

모든 자연수 n에 대해 a_n의 값은 자연수이다.

1) d가 짝수인 경우

a_n의 값은 모두 홀수이다.

따라서 모든 자연수 n에 대해 $(-1)^{a_n} = -1$이고,
$(-1)^{a_n} \times a_n < 0$이다.

그러므로 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{a_k} \times a_k < 0$이므로 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{a_k} \times a_k = 24$를 만족시키지 않는다.

2) d가 홀수인 경우

$a_1 = 1$, $a_2 = 1+d$이므로 a_2는 짝수, $a_3 = 1+2d$이므로 a_3은 홀수이다.

즉, $a_{\text{홀수}} = \text{홀수}$, $a_{\text{짝수}} = \text{짝수}$이다.

만약 m이 홀수라면,

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{a_k} \times a_k = (-1)+(1+d)-(1+2d)+ \cdots -\{1+(m-1)d\}$$

$$= d+d+ \cdots +d-\{1+(m-1)d\} = d \times \frac{m-1}{2} - \{1+(m-1)d\}$$

$= -1-\frac{(m-1)}{2}d < 0$ 이므로 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{a_k} \times a_k = 24$를 만족시키지 않는다.

따라서 m은 짝수이고, 이 경우

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{a_k} \times a_k = (-1)+(1+d)-(1+2d)+ \cdots +\{1+(m-1)d\}$$

$= d+d+ \cdots +d = d \times \frac{m}{2} = 24$ 이므로

홀수인 d와 짝수인 m에 대해 $d \times m = 48$이다.

따라서 $d=3$, $m=16$이므로 $a_m = 1+15 \times 3 = 46$이다.

여담:

공차 d의 짝수 홀수 여부에 따라 $(-1)^{a_n}$은 항상 -1이거나,
-1과 1이 번갈아가며 나오므로 d는 홀수이고,

m이 홀수인 경우 역시 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{a_k} \times a_k < 0$이므로 m은 짝수이다.

짝수 홀수에 따른 부호 따지기에 주목하기!

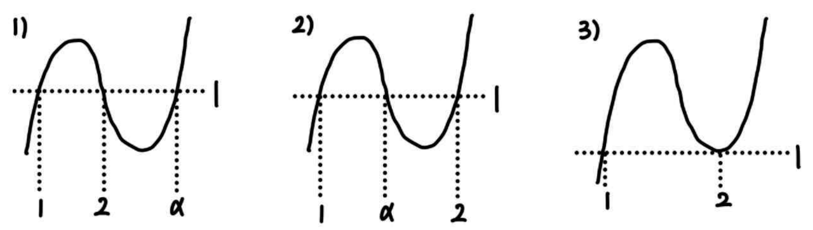
14.

정답: ⑤

해설:

step1

$f(1)=f(2)=1$, $f'(1)>0$을 만족시키는 상황 3가지를 살펴보자.



step2

ㄱ.

$f(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수는

1), 2)의 경우 $f(x)=1,\ 2,\ \alpha$의 서로 다른 실근의 개수의 합과 같고,

3)번 상황의 경우 $f(x)=1,\ 2$의 서로 다른 실근의 개수의 합과 같다.

1), 2)의 경우, $f(x)=1$의 서로 다른 실근이 3개이고, $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 최소 1개, $f(x)=\alpha$의 서로 다른 실근의 개수도 최소 1개이기 때문에 $g(t)\geq 5$이다.

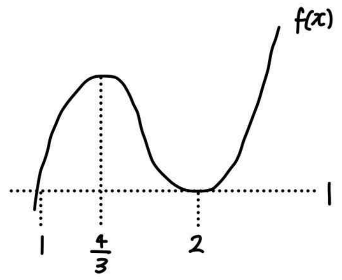
3)의 경우, $f(x)=1$의 서로 다른 실근이 2개이고, $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

따라서 $g(1)<5$를 만족시키는 상황은 3)번 상황이고, $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2이다.

이때 $f(x)=p(x-1)^2(x-2)+1$이라 하면 (단, $p>0$)

$f'(x)=3p\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2)$이므로 $f'\left(\frac{4}{3}\right)=0$이다.

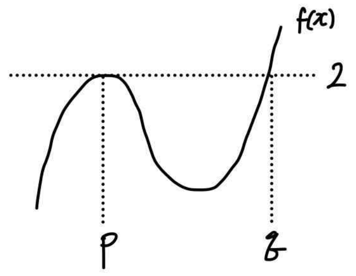
(미분 안 하고 아래 그림처럼 바로 삼차함수 비율관계를 적용해도 된다.)



따라서 ㄱ은 참이다.

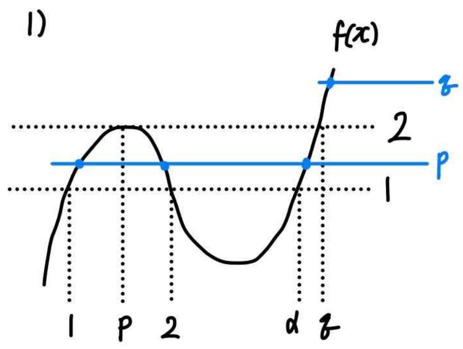
ㄴ.

$f(x)$가 $x=p$에서 극댓값을 가지고, $p<q$인 q에 대해 $f(q)=2$라 하자.

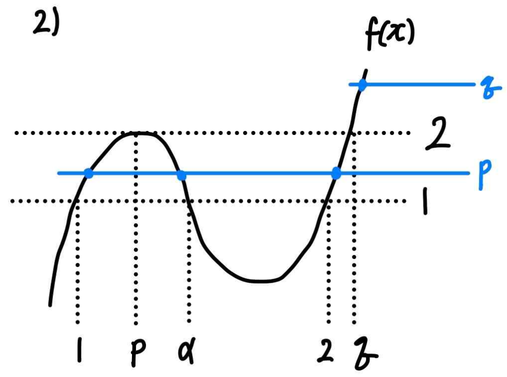


$f(f(x))=2$의 서로 다른 실근의 개수는, $f(x)=p$, $f(x)=q$의 서로 다른 실근의 개수의 합과 같다.

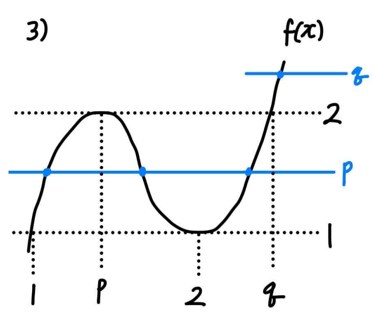
1)의 경우 $1<p<2<\alpha<q$이고 $f(x)=p$의 서로 다른 실근의 개수는 3개, $f(x)=q$의 서로 다른 실근의 개수는 1개이므로 $g(2)=4$이다.



2)의 경우 $1<p<2<\alpha<q$이고, $f(x)=p$의 서로 다른 실근의 개수는 3개, $f(x)=q$의 서로 다른 실근의 개수는 1개이므로 $g(2)=4$이다.



3)의 경우 $1<p<2<q$이고 , $f(x)=p$의 서로 다른 실근의 개수는 3개, $f(x)=q$의 서로 다른 실근의 개수는 1개이므로 $g(2)=4$이다.



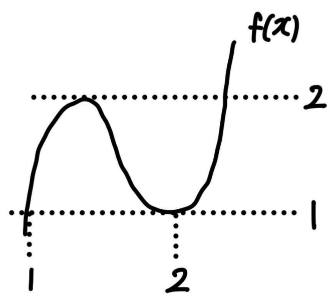
따라서 1), 2), 3) 모두 $g(2)=4$이므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ.

$g(1)\times g(2)=16$을 만족시키려면 $g(1)=4$, $g(2)=4$여야 한다.

(1), 2), 3) 모두 $g(1)\ge 3$이므로 $g(1)=1$, $g(2)=16$인 경우와, $g(1)=2$, $g(2)=8$인 경우는 불가능하다.)

ㄱ에서 $f(x)$의 극솟값이 1인 경우 $g(1)=4$, ㄴ에서 $f(x)$의 극댓값이 2인 경우 $g(2)=4$이므로 $f(x)$의 극솟값은 1, 극댓값은 2이다.



$f(x)=p(x-1)(x-2)^2+1$이라 하면, (단, $p>0$)

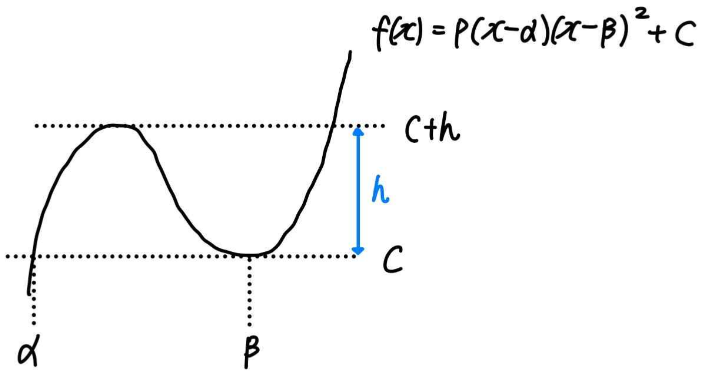
($f(x)$의 극댓값)$=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{27}p+1=2$이므로 $p=\frac{27}{4}$이다.

따라서 $f(x)=\frac{27}{4}(x-1)(x-2)^2+1$이므로 $f(0)=-26$이고,

ㄷ은 참이다.

여담:

ㄷ에서 최고차항 계수 구할 때 공식을 적용해도 된다.



$h=\frac{4}{27}\times|p|\times(\beta-\alpha)^3$ 이다.

나름 유용한 공식이니 알아두면 나쁠 건 없다...

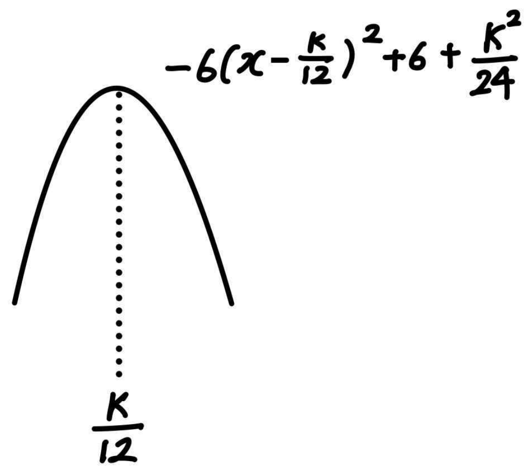
15.

정답: ④

해설:

step1

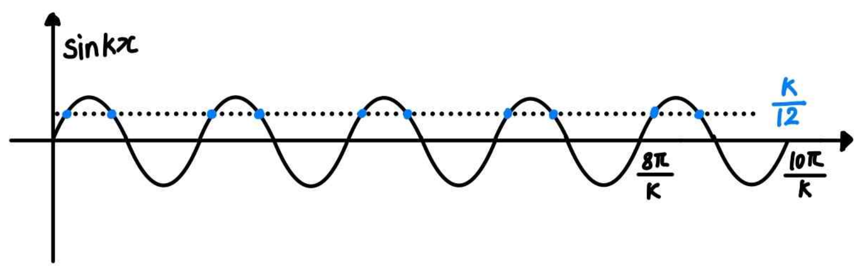
$f(x)=6(1-\sin^2 kx)+k\sin kx=-6\left(\sin kx-\frac{k}{12}\right)^2+6+\frac{k^2}{24}$

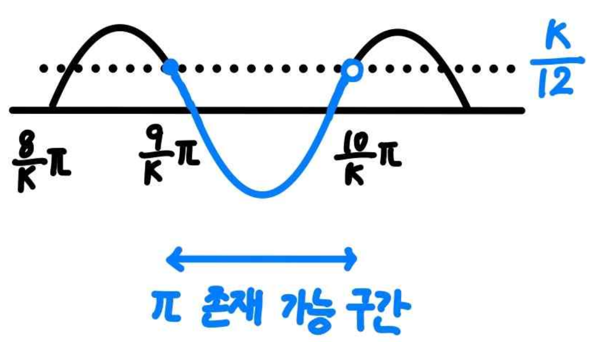


step2

1) $0<\frac{k}{12}<1$인 경우

$\sin kx=\frac{k}{12}$인 x에서 $f(x)$가 최댓값을 가진다.

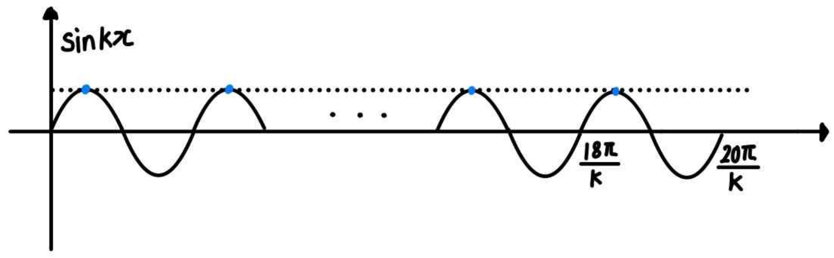


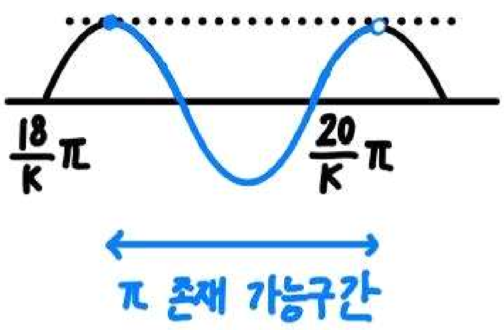


이 경우 가능한 자연수 k는 9 또는 10이다.

2) $\frac{k}{12}\ge 1$인 경우

$\sin kx=1$인 x에서 $f(x)$가 최댓값을 가진다.





이 경우 가능한 자연수 k는 19 또는 20이다.

step3

따라서 가능한 모든 자연수 k의 값의 합은
$9+10+19+20=58$이다.

여담:

k값의 범위에 따라 최댓값을 가지는 x의 조건이 바뀐다.

20.

정답: 18

해설:

step1

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, 실수 전체의 집합에서 연속이다.

만약 $f(x)$가 $x=0$ 주위에서 부호 변화가 없다면, $g(x)$의 연속 조건 때문에 $k=0$이고, 이 경우 k가 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$ 주위에서 부호 변화가 있고,

x가 음수에서 양수로 갈 때 $f(x)$가 양수에서 음수로 가야한다.

그러므로 $f(x)=2x(x-\alpha)$라 하자. (단, $\alpha>0$)

step2

$x=\alpha$에서 $xf(x)$의 부호가 변하므로,

$g(x)$의 연속 조건을 이용하면

$\int_{\alpha}^{0} 2x(x-\alpha)dx=\alpha^2-6\alpha+k$이고,

$g(x)$의 미분가능 조건을 이용하면

$-f(\alpha)=2\alpha-6$이다.

이때 $f(\alpha)=0$이므로 $\alpha=3$이다.

또한 $\int_{\alpha}^{0} 2x(x-\alpha)dx=\frac{1}{6}\times 2\times\alpha^3=9$이고,

$\int_{\alpha}^{0} 2x(x-\alpha)dx=\alpha^2-6\alpha+k$이므로 $k-9=9$이고 $k=18$이다.

여담:

$xf(x)$를 통해 $g(x)$의 미분불가능 의심점을 파악하고 그 점에서 연속이고 미분가능하도록 k와 $f(x)$를 설정하기.

21.

정답: 98

해설:

step1 a_3과 a_5의 관계 살펴보기

만약 $a_3 > 10$이라면 $a_4 = a_3 - a_3 = 0$, $a_5 = 2a_4 + 4 = 4$이므로 $a_5 = 7$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a_3 \le 10$이고, $a_4 = 2a_3 + 3$이다.

1) $a_4 = 2a_3 + 3 \le 10$ 인 경우 ($a_3 \le \frac{7}{2}$인 경우)

이때 $a_5 = 2a_4 + 4 = 4a_3 + 10 = 7$이므로 $a_3 = -\frac{3}{4}$이다.

또한 $a_2 = \frac{a_3 - 2}{2} = -\frac{11}{8}$이므로 이 경우 $a_2 > 0$ 조건을 만족시키지 않는다.

($a_2 = 2a_3 = -\frac{3}{2}$일 경우 $a_2 > 10$을 만족하지 않는다.)

2) $a_4 = 2a_3 + 3 > 10$ 인 경우 ($\frac{7}{2} < a_3 \le 10$인 경우)

이때 $a_5 = a_4 - a_3 = a_3 + 3 = 7$이므로 $a_3 = 4$이다.

또한 $a_2 = \frac{a_3 - 2}{2} = 1$이다.

($a_2 = 2a_3 = 8$일 경우 $a_2 > 10$을 만족하지 않는다.)

step2

$a_2 = 1$이므로 $a_1 = \frac{a_1 - 1}{2} = 0$이다.

따라서 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 11$, $a_5 = 7$,

$a_6 = 2a_5 + 5 = 19$, $a_7 = a_6 - a_3 = 15$, $a_8 = a_7 - a_3 = 11$, $a_9 = a_8 - a_3 = 7$, $a_{10} = 2a_9 + 9 = 23$이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n = 98$이다.

여담:

a_3을 기준으로 $a_5 = 7$, $a_2 > 0$을 모두 만족시키는 a_3의 값 찾기.

22.

정답: 100

해설:

step1 α_n의 의미 찾기

α_n은 $f(x) = x$의 실근을 β_1, β_2, β_3라 할 때, $f(x) = \beta_1$, $f(x) = \beta_2$, $f(x) = \beta_3$의 서로 다른 모든 실근이다.

그래프로 해석하자면, $f(x) = x$의 교점을 지나는, x축에 평행한 상수함수와 $f(x)$의 교점의 x좌표를 의미한다.

step2

1) $f(x)$의 최고차항 계수가 양수인 경우

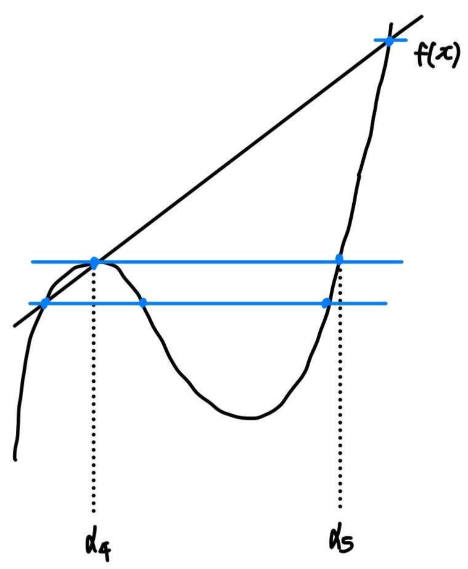
$f(x) = x$의 실근을 β_1, β_2, β_3이라 하자. (단, β_1, β_2, β_3은 동일한 값일 수 있음)

이때 $f(\alpha_4)$가 극댓값이므로 $f(\alpha_4) = f(\alpha_5) = \beta_3$이라 하면,

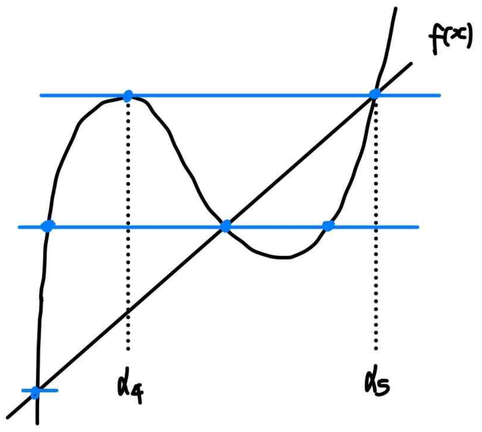
$y = x$는 $(\alpha_4, f(\alpha_4))$를 지나거나 $(\alpha_5, f(\alpha_5))$를 지나야 한다.

(이후 풀이에서는, n의 값과 상관 없이 α_4와 α_5의 위치를 고정하고 진행하겠다. 즉, α_4가 주어진 방정식의 실근을 크기 순으로 나열했을 때 4번째 실근이 아니거나, α_5가 5번째 실근이 아니라면 모순이다.)

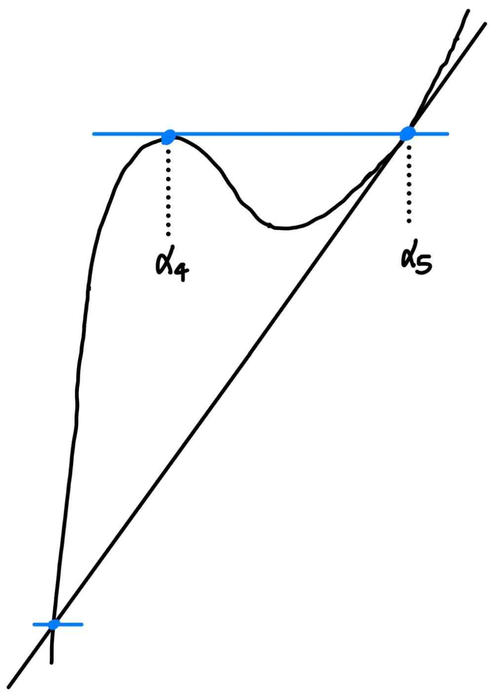
$y = x$가 $(\alpha_4, f(\alpha_4))$를 지날 경우 α_n은 α_6까지 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



$y = x$가 $(\alpha_5, f(\alpha_5))$를 지나고, $f'(\alpha_5) \ne 1$인 경우 α_n은 α_6까지 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



$y=x$가 $(\alpha_5, f(\alpha_5))$를 지나고, $f'(\alpha_5)=1$인 경우 α_n은 α_3까지 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



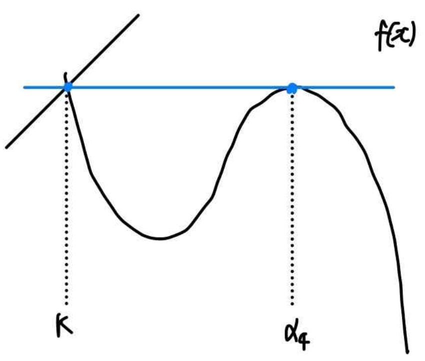
따라서 $f(x)$의 최고차항 계수는 음수이다.

2) $f(x)$의 최고차항 계수가 음수인 경우

$f(k)=f(\alpha_4)=\beta_3$이라 하자. (단, $k<\alpha_4$)

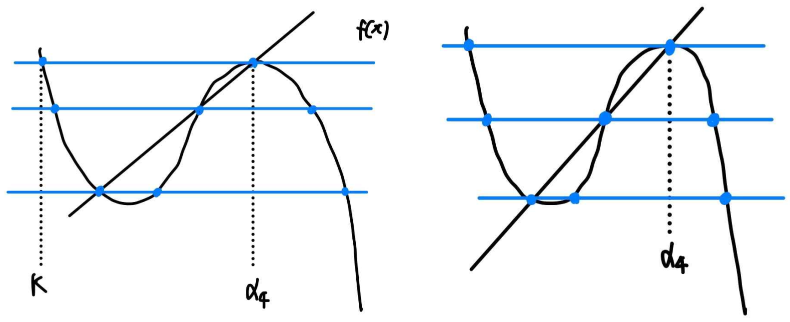
$y=x$는 $(k, f(k))$ 또는 $(\alpha_4, f(\alpha_4))$를 지나야 한다.

$y=x$가 $(k, f(k))$를 지날 경우 α_n은 α_2까지 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

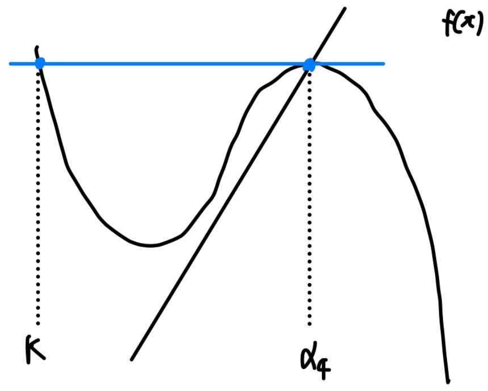


따라서 $y=x$는 $(\alpha_4, f(\alpha_4))$를 지난다.

만약 $y=x$와 $f(x)$의 교점이 3개라면, α_n은 α_7 또는 α_8까지 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

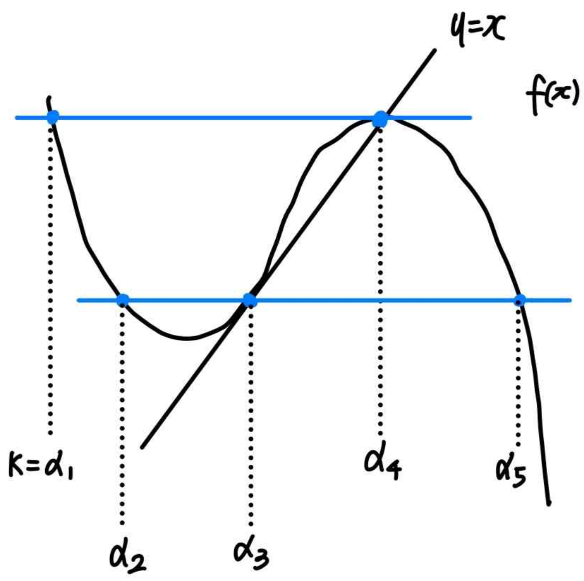


$y=x$와 $f(x)$의 교점이 1개라면, α_n은 α_2까지 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



따라서 $y=x$와 $f(x)$의 교점이 2개여야 한다.

step3



주어진 조건에 의해 $k=\alpha_1=0$이고, $\alpha_4=3t$라 하자. (단, $t>0$)

이때 $f(x)=f(0)$의 세 실근의 합과, $f(x)=x$의 세 실근의 합은 동일하다. (1회 12번 혹은 여담 참고)

따라서 $\alpha_1+2\alpha_4=2\alpha_3+\alpha_4$이고, (나) 조건에 의해 $\alpha_3=\dfrac{3}{2}$이므로

$0+2\times3t=2\times\dfrac{3}{2}+3t$이고, $t=1$이다.

따라서 $f(x)=ax(x-3)^2+3$이라 할 수 있고, $f(\alpha_3)=\alpha_3$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$이다. (단, $a<0$)

그러므로 $a=-\frac{4}{9}$이고 $f(x)=-\frac{4}{9}x(x-3)^2+3$이며,

$f(-1)=\frac{91}{9}$이므로 $p=9$, $q=91$이고, $p+q=100$이다.

여담:

a_n의 해석 방법 알아두기

삼차함수의 근과 계수와의 관계를 생각할 때,

$f(x)=0$과 $f(x)-(px+q)=0$의 삼차항과 이차항의 계수가 동일하기 때문에, 두 방정식의 세 근의 합은 동일하다.

6회 정답

8	②	*9*	②	*10*	①	*11*	③	*12*	②
13	①	*14*	②	*15*	②	*20*	23	*21*	31
22	68								

8.

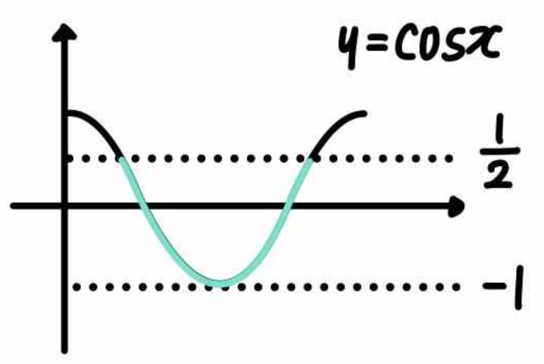
정답: ②

해설:

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로,

주어진 부등식 $3\cos x \le 2\sin^2 x$는 $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 \le 0$과 같다.

$(2\cos x - 1)(\cos x + 2) \le 0$을 만족하는 $\cos x$는 $-2 \le cosx \le \frac{1}{2}$를 만족시킨다.



구간 $0 \le x \le 2\pi$에서 $-2 \le cosx \le \frac{1}{2}$의 근은

$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3}$이므로,

$\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{5\pi}{3}$이고, $\alpha + 2\beta = \frac{7\pi}{3}$이다.

여담:

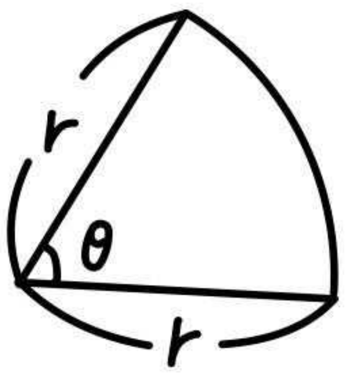
무난하게 식을 변형해서 푸는 정석적인 삼각부등식 문제

9.

정답: ②

해설:

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하자.



(부채꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}r^2\theta=12$ 이므로 $r\theta=\frac{24}{r}$이다.

(부채꼴의 둘레의 길이)$=r+r+r\theta=14$ 이다.

따라서 $2r+\frac{24}{r}=14$이므로 양수 r에 대해 $2(r-3)(r-4)=0$이고, 정리하면 $r=3$ 또는 $r=4$이다.

$r=3$이라면 $\theta=\frac{8}{3}$, $r=4$이라면 $\theta=\frac{3}{2}$이다.

이때 주어진 조건에서 $\theta<\frac{\pi}{2}<\frac{8}{3}$이므로 $r=4$, $\theta=\frac{3}{2}$이고,

(부채꼴의 호의 길이)$=r\theta=6$이다.

여담:

부채꼴의 둘레의 길이는 반지름 2개의 길이와 부채꼴의 호의 길이의 합이다.

반지름의 길이도 두 번 더해줘야 하는 거 놓치지 않게 주의하기.

π를 약 3.14라 하면 $\frac{\pi}{2}<\frac{8}{3}$임을 쉽게 찾을 수 있다.

10.

정답: ①

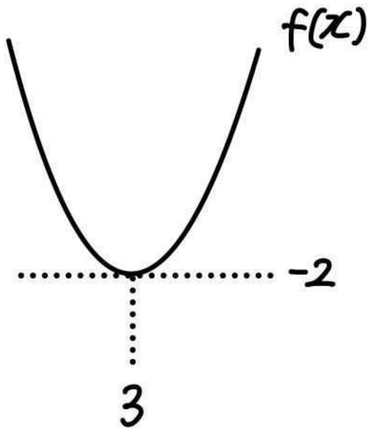
해설:

$\lim_{x\to k-}g(x)=f(k)$, $\lim_{x\to k+}g(x)=f(k)+4$이므로 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 불연속이다.

이때 $|g(x)|$가 $x=k$에서 연속이려면 $-f(k)=f(k)+4$여야 하므로 $f(k)=-2$이고,

주어진 조건에 의해 이를 만족시키는 실수 k는 오직 3뿐이다.

따라서 $f'(3)=0$, $f(3)=-2$이고, $f(x)$의 개형은 아래 그림과 같다.



그러므로 $f(x)=(x-3)^2-2$이고, $f(6)=(6-3)^2-2=7$이다.

여담:

$x=k$에서 $g(x)$가 연속이도록 하는 $f(k)$의 값을 구하면, $f(k)$의 값에 따라 가능한 k의 개수는 0개, 1개 또는 2개이다.

이때 가능한 k의 개수가 1개이려면 $f(x)$의 극솟값이 $f(k)$여야 한다.

11.

정답: ③

해설:

step1 $v(t)$의 식 구하기

$$v(t)=\begin{cases} -t^2+2t+p & (0 \le t < 2) \\ t^2-6t+q & (t \ge 2) \end{cases}$$ 라 하자. (단, p, q는 상수)

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $v(t)$의 부호가 바뀌면 안 되고, $t \to \infty$일 때 $v(t) \to \infty$이므로 $t \ge 0$에서 $v(t) \ge 0$이다.

$t \ge 2$에서 $v(t)$의 최솟값은 $v(3)$이므로, $v(3)=q-9 \ge 0$이고,

$0 \le t < 2$에서 $v(t)$의 최솟값은 $v(0)$이기 때문에 $v(0)=p \ge 0$이다.

또한, $v(t)$는 연속함수이기 때문에 $t=2$에서 연속이어야 하고, 따라서 $p=q-8$이다.

즉, $$v(t)=\begin{cases} -t^2+2t+q-8 & (0 \le t < 2) \\ t^2-6t+q & (t \ge 2) \end{cases}$$ 이고, $q \ge 9$이다.

step2

$t=0$일 때 점 P의 위치는 0이므로,

$t=5$에서 점 P의 위치는,

$$0+\int_0^5 v(t)dt=\int_0^2(-t^2+2t+q-8)dt+\int_2^5(t^2-6t+q)dt$$
$=5q-\dfrac{116}{3}$이다.

이때 $q \ge 9$이므로 $5q-\dfrac{116}{3} \ge \dfrac{19}{3}$이고,

따라서 $t=5$에서 점 P의 위치의 최솟값은 $\dfrac{19}{3}$이다.

여담:

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않는다는 조건을 이용해 $a(t)$를 적분하며 생긴 적분상수의 범위를 구할 수 있다.

(나중 위치)=(처음 위치)+(위치의 변화량)

12.

정답: ②

해설:

step1

$b_n=2a_n+|a_n|$ 이라 하자.

$$b_n=2a_n+|a_n|=\begin{cases} 3a_n & (a_n \ge 0) \\ a_n & (a_n < 0) \end{cases}$$ 이다.

또한 (가) 조건에 의해 b_n은 공차가 2인 증가하는 등차수열이고, a_n과 b_n의 부호는 동일하므로 (나) 조건에 의해 $a_2 \le 0$, $a_8 \ge 0$이다.

step2

$a_2 \le 0$이므로 $b_2=a_2$이고,

$a_8 \ge 0$이므로 $b_8=3a_8$이며,

b_n은 공차가 2인 등차수열이므로 $b_8=b_2+2\times 6=a_2+12$이다.

따라서 $b_8=3a_8=a_2+12$이므로 $a_8=\dfrac{1}{3}a_2+4$이다.

이때 (나) 조건에 의해 $a_2+a_8=0$이므로 $a_2+\left(\dfrac{1}{3}a_2+4\right)=0$ 이고,

정리하면 $a_2=-3$, $a_8=\dfrac{1}{3}a_2+4=3$이다.

그러므로 $b_2=a_2=-3$이고, $b_8=3a_8=9$이다.

step3

등차수열 b_n은 공차가 2이므로 $b_{13}=b_2+2\times 11=-3+22=19$이고,

$b_{13}=3a_{13} \ge 0$이므로 $a_{13}=\dfrac{19}{3}$이다.

여담:

a_n과 b_n의 부호가 일치함에 주목하자.

13.

정답: ①

해설:

step1

극한 $\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{|f(x)|}}{x-1}$은 수렴하고,

$x\to1$일 때 $\frac{x-\sqrt{|f(x)|}}{x-1}$의 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

따라서 $|f(1)|=1$이다.

극한 $\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{|f(x)|}}{x-1}$의 분모, 분자에 각각 $x+\sqrt{|f(x)|}$를 곱해주면,

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-\sqrt{|f(x)|})(x+\sqrt{|f(x)|})}{(x-1)(\sqrt{|f(x)|}+x)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-|f(x)|}{(x-1)(\sqrt{|f(x)|}+x)}$$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\times\frac{x^2-|f(x)|}{x-1}=f(1)$이다.

step2

$|f(1)|=1$의 절댓값을 풀어보자.

$f(1)=1$ 또는 $f(1)=-1$이다.

1) $f(1)=1$인 경우

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\times\frac{x^2-|f(x)|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\times\frac{x^2-f(x)}{x-1}=\frac{1}{2}\times\{2-f'(1)\}=f(1)$$

이고, $f(1)=1$이므로 $f'(1)=0$이다.

$f(0)=f(2)=0$이므로 $f(x)=x(x-2)(ax+b)$라 한다면,

$f(1)=1$이므로 $-(a+b)=1$이고,

$f'(1)=0$이므로 $-a-(a+b)+(a+b)=0$인데, 이는 불가능하다.

따라서 $f(1)=-1$이다.

2) $f(1)=-1$ 인 경우

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\times\frac{x^2-|f(x)|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\times\frac{x^2+f(x)}{x-1}=\frac{1}{2}\times\{2+f'(1)\}=f(1)$$

이고, $f(1)=-1$이므로 $f'(1)=-4$이다.

$f(x)=p(x-1)^3+q(x-1)^2-4(x-1)-1$이라고 한다면,

$f(0)=-p+q+4-1=0$이고,

$f(2)=p+q-4-1=0$이므로,

$p=4,\ q=1$이다.

따라서 $f(x)=4(x-1)^3+(x-1)^2-4(x-1)-1$이고,

$f(3)=27$이다.

여담:

1.

유리화 한 후 $f(1)$의 부호에 따라 케이스분류하기.

2.

step2의 1)과 2) 상황에서, $f(x)$의 식을 다른 정보를 이용해 다른 방식으로 세웠다.

1)에서는 $f(0)=f(2)=0$을 이용해 $f(x)$의 인수분해된 형태를 통해 식을 세웠는데,

2)에서는 $f(1)=-1,\ f'(1)=-4$를 이용해 $(x-1)$에 대한 형태로 식을 세웠다.

3.

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+f(x)}{x-1}$의 극한값을 간단히 구하는 방법을 설명하겠다.

(이 문제 말고 다른 극한값 구하는 과정에서도 사용 가능)

$g(x)=x^2+f(x)$라 한다면, $\lim_{x\to1}\frac{x^2+f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}$이다.

이때 $x\to1$일 때 극한의 분모가 0으로 가므로, $g(1)=0$이어야 한다.

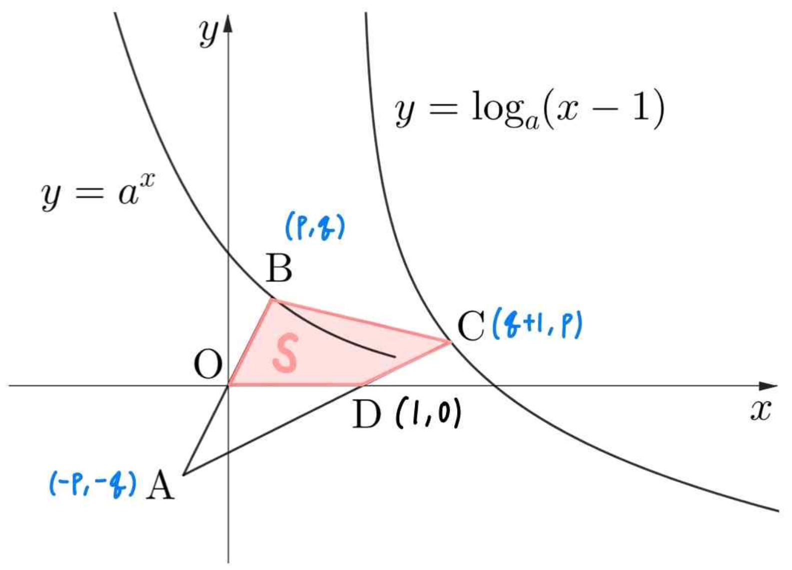
즉, $\lim_{x\to1}\frac{x^2+f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+f(x)}{x-1}=g'(1)=2+f'(1)$이다.

14.

정답: ②

해설:



step1

$y=a^x$를 $y=x$에 대해 대칭시키고 x축의 방향으로 $+1$만큼 평행이동시키면 $y=\log_a(x-1)$ 이다.

선분 OB와 선분 CD의 기울기의 곱이 1이고, 점 O를 x축의 방향으로 $+1$만큼 평행이동시키면 점 D이므로,

선분 OB를 직선 $y=x$에 대해 대칭시키고 x축의 방향으로 $+1$만큼 평행이동시키면 선분 CD임을 알 수 있다.

따라서 점 B의 좌표를 (p, q)라 하면 점 C의 좌표는 $(q+1, p)$이고, 점 A의 좌표는 $(-p, -q)$이다. (단, $p>0$, $q>0$)

직선 BC의 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 이므로 $\frac{p-q}{q-p+1}=-\frac{1}{4}$ 이고,

$q-p=\frac{1}{3}$ 이다.

또한 직선 CD의 식은 $y=\frac{p}{q}(x-1)$ 인데, 직선 CD 위에 점 $\mathrm{A}(-p, -q)$ 가 있기 때문에 $-q=\frac{p}{q}(-p-1)$이고, 정리하면 $p^2+p=q^2$ 이다.

따라서 $p^2+p=\left(p+\frac{1}{3}\right)^2$이므로 $p=\frac{1}{3}$이고, $q=p+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

step2

사각형 OBCD의 넓이인 S는,

$$S=\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times\left|\left(0+\frac{1}{3}+\frac{10}{9}+0\right)-\left(0+0+\frac{1}{9}+0\right)\right|$$

$=\frac{2}{3}$ 이고,

점 B는 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로 $a^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$이고 $a=\frac{8}{27}$이다.

따라서 $\frac{S}{a}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{27}}=\frac{9}{4}$ 이다.

여담:

선분 OB와 선분 CD의 관계에 주목하기.

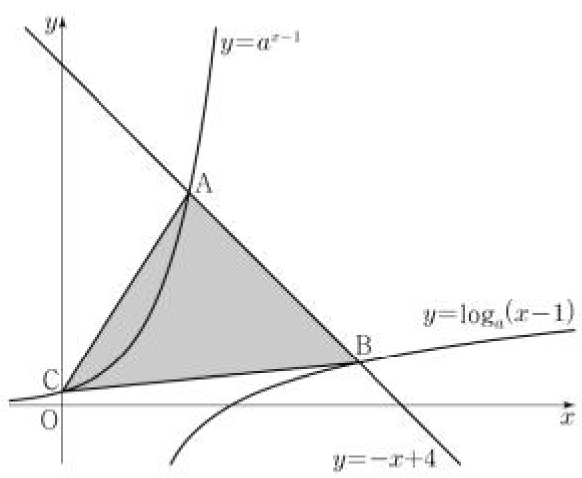
신발끈 공식은 사각형의 넓이를 구할 때에도 적용 가능하다.

기출 다시보기: 2024학년도 6월 모의평가 9번

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



정답: 192

15.

정답: ②

해설:

step1

max 함수는 항상 '작지 않은 값'을 고르는 함수이다.

$g(x)=\max\{F(x), f'(x)\}$ 이고,

$f'(x)=6x+\cdots$

$f(x)=3x^2+\cdots$

$F(x)=x^3+\cdots$ 이다.

step2

1) $g(x)$가 $x=0$에서만 미분 불가능하므로, $g(x)$는 $x=0$에서 식이 바뀌어야 하고, 이 점에서 $F(x)$와 $f'(x)$가 접해서는 안 된다. (접하면 $x=0$에서도 $g(x)$가 미분가능해진다.)

따라서 $F(0)=f'(0)$이고, $F(0)\neq 6$이다.

또한, $x=0$ 이외의 점에서는 $g(x)$가 미분가능해야 하므로, 식이 바뀌지 않거나, 바뀌더라도 접하면서 바뀌어야 한다.

그러므로 $F(x)$와 $f'(x)$의 교점이 $x=0$의 1개거나, 교점이 2개이며 $x=0$이 아닌 점에서 접해야한다.

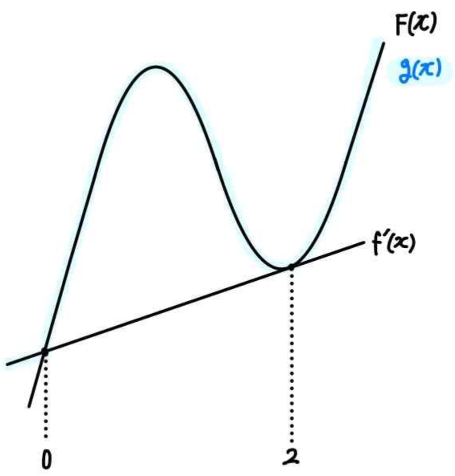
2) $g(2)=g(0)+12$이므로 $\dfrac{g(2)-g(0)}{2-0}=6$ 이고,

$g(0)=F(0)=f'(0)$이다.

이때 $f'(x)$의 기울기가 6으로 $(0, g(0))$와 $(2, g(2))$ 사이의 기울기와 같고, $g(0)=f'(0)$이므로 $g(2)=f'(2)$임을 알 수 있다.

만약 $F(x)$와 $f'(x)$의 교점이 $x=0$의 1개였다면, $x>0$에서 $g(x)=F(x)$이므로 $g(2)=f'(2)$를 만족시킬 수 없다.

따라서 $F(x)$와 $f'(x)$의 교점은 $x=0$과 $x=2$의 2개이며, $x=2$에서 접해야한다.



step3

$f'(x)=6x+c$ 라 하자.

$F(x)-f'(x)=x(x-2)^2$ 이므로 $F(x)=x(x-2)^2+6x+c$ 이고,

이 식을 미분하면 $f(x)=3x^2-8x+10$이며,

한 번 더 미분하면 $f'(x)=6x-8$ 이므로 $c=-8$이다.

따라서 $F(x)=x(x-2)^2+6x-8$이다.

그러므로 $f(4)=3\times4^2-8\times4+10=26$이고,
$F(3)=3\times(3-2)^2+6\times3-8=13$, $f'(3)=6\times3-8=10$이므로
$g(3)=\max\{F(3), f'(3)\}=F(3)=13$ 이며,
$f(4)+g(3)=26+13=39$ 이다.

여담:

max 함수는 '작지 않은 값'을 고르는 함수이고,

min 함수는 '크지 않은 값'을 고르는 함수이다.

$$\max\{f(x), g(x)\}=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

$$=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$ 이므로,

max 함수의 미분불가능 의심점은 $f(x)=g(x)$인 순간이다.

$$\min\{f(x), g(x)\}=\begin{cases} f(x) & (f(x)\leq g(x)) \\ g(x) & (f(x)\geq g(x)) \end{cases}$$

$$=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$ 이므로,

min함수의 미분불가능 의심점은 $f(x)=g(x)$인 순간이다.

물론 max, min 함수는 수식으로 해석하기보다 그래프로 해석하는 게 더 편하다.

20.

정답: 23

해설:

1) $\frac{1}{3}+\frac{5}{n}>1$ 인 경우

$\frac{1}{3}+\frac{5}{n}>1$ 이므로 $n<\frac{15}{2}$ 이다.

또한 $\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{n}\right)^{14n}<\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{n}\right)^{n^2+40}$ 을 만족시키려면

$14n<n^2+40$ 이어야 하므로 $n>10$ 또는 $n<4$여야 한다.

두 조건을 모두 만족시키는 n의 범위는 $n<4$이므로,

가능한 자연수 n은 1, 2, 3 이다.

2) $\frac{1}{3}+\frac{5}{n}=1$ 인 경우

$\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{n}\right)^{14n}=\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{n}\right)^{n^2+40}=1$로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

3) $\frac{1}{3}+\frac{5}{n}<1$ 인 경우

$\frac{1}{3}+\frac{5}{n}<1$ 이므로 $n>\frac{15}{2}$ 이다.

또한 $\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{n}\right)^{14n}<\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{n}\right)^{n^2+40}$을 만족시키려면

$14n>n^2+40$ 이어야 하므로 $4<n<10$ 이어야 한다.

두 조건을 모두 만족시키는 n의 범위는 $7.5<n<10$ 이므로, 가능한 자연수 n은 8, 9 이다.

따라서 가능한 모든 자연수 n은 1, 2, 3, 8, 9 이고,

모든 자연수 n의 값의 합은 $1+2+3+8+9=23$이다.

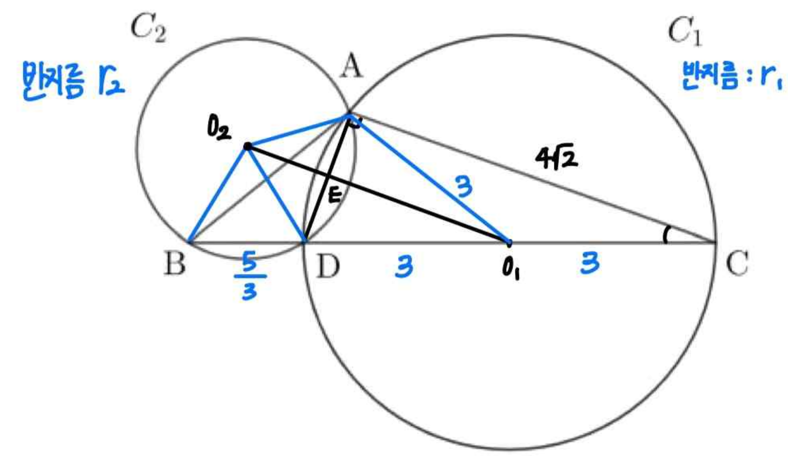
여담:

$\frac{1}{3}+\frac{5}{n}$과 1의 대소관계에 따라 세우는 식이 달라진다.

21.

정답: 31

해설:



step1

원 C_1의 반지름의 길이를 r_1, 원 C_2의 반지름의 길이를 r_2라 하자.

삼각형 ACD를 살펴보면, $\angle$DAC는 직각이고,

$\cos\angle \mathrm{ACD}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AC}}\times\frac{1}{\cos\angle \mathrm{ACD}}=6$ 이다.

그러므로 $2r_1=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $r_1=3$이고,

직각삼각형 ACD에서 $(\overline{\mathrm{CD}})^2=(\overline{\mathrm{AC}})^2+(\overline{\mathrm{AD}})^2$ 이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}=2$ 이며,

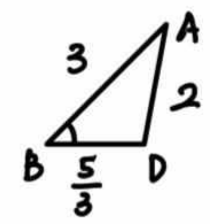
$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{CD}}=\frac{23}{3}-6=\frac{5}{3}$ 이다.

또한 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면,

$$(\overline{\mathrm{AB}})^2=(\overline{\mathrm{AC}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2-2\times(\overline{\mathrm{AC}})\times(\overline{\mathrm{BC}})\times\cos\angle \mathrm{ACB}$$

$$=(4\sqrt{2})^2+\left(\frac{23}{3}\right)^2-2\times4\sqrt{2}\times\frac{23}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=3$ 이다.



삼각형 ABD에서

$\cos\angle \mathrm{ABD}=\dfrac{(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BD}})^2-(\overline{\mathrm{AD}})^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD}}}=\dfrac{3^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2-2^2}{2\times 3\times\frac{5}{3}}=\dfrac{7}{9}$ 이므로

$\sin\angle \mathrm{ABD}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ 이고,

삼각형 ABD에서 사인법칙을 적용해주면,

원 C_2의 반지름 r_2는

$r_2=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{2\sin\angle \mathrm{ABD}}=\dfrac{2}{2\times\frac{4\sqrt{2}}{9}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$ 이다.

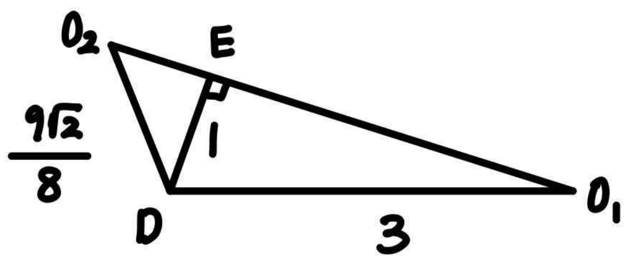
따라서 $\overline{\mathrm{O_2D}}=\overline{\mathrm{O_2A}}=r_{2=}\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$ 이다.

step2

두 원 C_1과 C_2의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하면,

선분 $\mathrm{O_1O_2}$에 의해 두 원의 공통현 $\overline{\mathrm{AD}}$는 수직이등분된다.

따라서 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DE}}=1$이다.



삼각형 $\mathrm{DEO_1}$에서 $\overline{\mathrm{EO_1}}=\sqrt{(\overline{\mathrm{DO_1}})^2-(\overline{\mathrm{DE}})^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ 이고,

삼각형 $\mathrm{DEO_2}$에서

$\overline{\mathrm{EO_2}}=\sqrt{(\overline{\mathrm{DO_2}})^2-(\overline{\mathrm{DE}})^2}=\sqrt{\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}\right)^2-1^2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{8}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{O_1O_2}}=\overline{\mathrm{EO_1}}+\overline{\mathrm{EO_2}}=2\sqrt{2}+\dfrac{7\sqrt{2}}{8}=\dfrac{23\sqrt{2}}{8}$ 이므로,

$p=8$, $q=23$이고,

$p+q=31$이다.

여담:

1. 선분 $\mathrm{O_1O_2}$을 그어주고, 이 길이를 구하기 위해 삼각형 $\mathrm{O_1O_2D}$를 기준으로 필요한 정보들을 구해보자.

2. 선분 $\mathrm{O_1O_2}$가 선분 AD를 수직이등분함을 보여보자.

$\overline{\mathrm{AE}}>\overline{\mathrm{DE}}$라 가정하면,

삼각형 $\mathrm{AO_2D}$에서 $\angle \mathrm{O_2EA}<\angle \mathrm{O_2ED}$이다.

또한 삼각형 $\mathrm{O_1AD}$에서도 $\overline{\mathrm{AE}}>\overline{\mathrm{DE}}$이므로,
$\angle \mathrm{O_1EA}<\angle \mathrm{O_1ED}$이다.

따라서 $\angle \mathrm{O_1EA}+\angle \mathrm{O_2EA}<\angle \mathrm{O_1ED}+\angle \mathrm{O_2ED}$이므로

선분 $\overline{\mathrm{O_2E}}$와 선분 $\overline{\mathrm{O_1E}}$는 한 직선 위에 있지 않게 된다.

($\overline{\mathrm{AE}}<\overline{\mathrm{DE}}$일 때도 마찬가지 논리로 불가능)

따라서 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DE}}$이고, $\triangle \mathrm{AO_2E}\equiv\triangle \mathrm{DO_2E}$이므로($SSS$합동)

$\angle \mathrm{O_2ED}=\angle \mathrm{O_2EA}=90^\circ$ 이다.

22.

정답: 68

해설:

step1

$x\times(f(x)-a|x|)\geq 0$ 의 절댓값을 풀어보자.

$x>0$일 때 위 부등식은 $x\times(f(x)-ax)\geq 0$ 이고,

$x>0$이므로 $f(x)-ax\geq 0$과 같다.

$x<0$일 때 위 부등식은 $x\times(f(x)+ax)\geq 0$ 이고,

$x<0$이므로 $f(x)+ax\leq 0$과 같다.

즉, 주어진 조건은

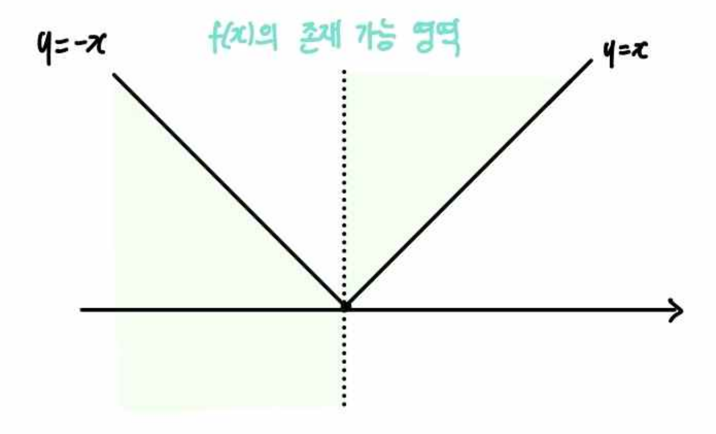
모든 실수 x에 대하여 $\begin{cases} f(x)\geq ax & (x>0) \\ f(x)\leq -ax & (x<0) \end{cases}$ 이도록 하는 실수 a가 오직 1뿐이다.

와 같다.

step2

1) 먼저, $a=1$인 상황을 살펴보자.

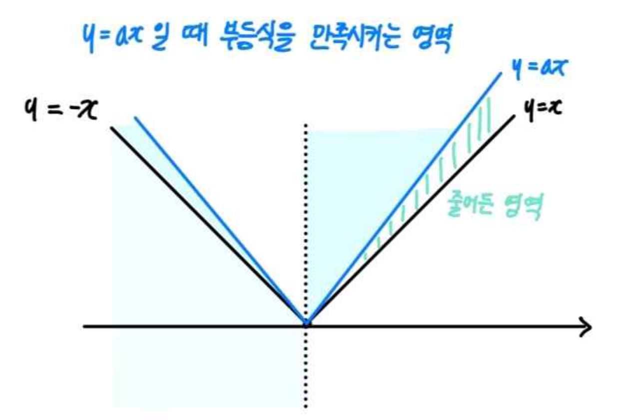
모든 실수 x에 대하여 $\begin{cases} f(x)\geq x & (x>0) \\ f(x)\leq -x & (x<0) \end{cases}$ 이다.



$f(0)=0$이고 $f'(0)\geq 1$임을 알 수 있다.

또한 $x\to\infty$일 때 $f(x)$는 양수이고, $x\to-\infty$일 때 $f(x)$는 음수이므로 $f(x)$의 최고차항 계수는 양수이다.

2) 만약 a의 값이 1보다 살짝 커진다면, 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.



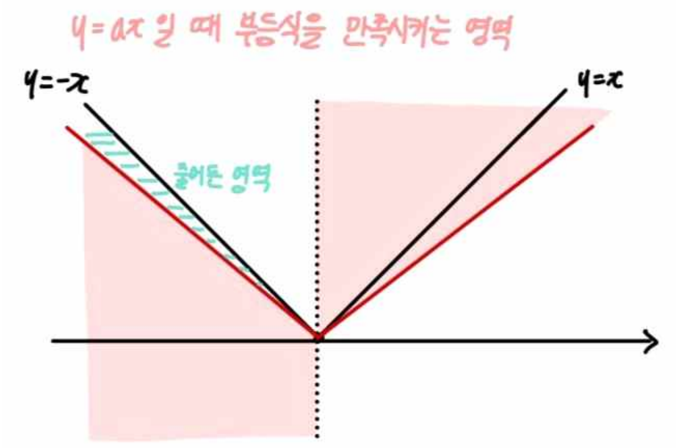
$y=x$일 때와 비교해서, 주어진 부등식을 만족시키기 위해 $x>0$일 때 $f(x)$가 존재할 수 있는 영역의 크기가 줄어들었다.

따라서 $y=x$일 때와 비교해 줄어들은 영역에 $f(x)$가 존재해야하므로,

$x\geq 0$에서 $f(x)$와 $y=x$는 접해야한다.

(접하지 않으면 $x>0$에서 $f(x)$가 $y=x$를 뚫고 지나가면서 $f(x)\geq x$도 만족시키지 않음)

3) 만약 a의 값이 1보다 살짝 작아진다면, 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.



$y=x$일 때와 비교해서, 주어진 부등식을 만족시키기 위해 $x<0$일 때 $f(x)$가 존재할 수 있는 영역의 크기가 줄어들었다.

따라서 $y=x$일 때와 비교해 줄어들은 영역에 $f(x)$가 존재해야하므로,

$x\leq 0$에서 $f(x)$와 $y=-x$는 접해야한다.

step3

$x\leq 0$에서 $f(x)$는 $y=-x$와 접하고, 그 접점의 좌표를 t라 하자. (단, $t<0$. $t=0$일 경우 $x\to 0+$일 때 $f(x)<x$이므로 조건을 만족시키지 않는다.)

이때 $f(x)=-x$의 실근은 $x=t$와 $x=0$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}x(x-t)^2-x$ 라 할 수 있다.

또한 $y=f(x)$와 $y=x$가 $x\geq 0$에서 접하려면, $x=0$에서 두

함수는 접해야 한다.

(만약 $f'(0)>1$이어서 $x=0$에서 두 함수가 접하지 않는다면, $x>0$일 때 $f'(x)>1$이므로 $x\geq 0$에서 $f(x)$와 $y=x$가 접할 수 없다.)

따라서 $f'(0)=1$이므로 $\frac{1}{2}t^2-1=1$이고, 음수 t의 값은 -2이다.

그러므로 $f(x)=\frac{1}{2}x(x+2)^2-x$이고, $f(4)=68$이다.

여담:

$a\to1+$일 때와 $a\to1-$ 일 때 조건을 만족시키지 않는다는 점에 주목하기.

아마 해설에 있는 그래프를 참고해 이해하면 조금 더 이해하기 쉬울 것이다.

7회 정답

8	⑤	*9*	④	*10*	①	*11*	④	*12*	⑤
13	③	*14*	⑤	*15*	③	*20*	36	*21*	35
22	457								

8.

정답: ⑤

해설:

$f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $f'(2)=0$이고,

$f'(2)=12-f(-1)\times 2^2=0$ 이므로 $f(-1)=3$ 이다.

따라서 $f'(x)=-3x^2+12$이므로 $f(x)=-x^3+12x+c$ 이고,

(단, c는 실수)

$f(-1)=-(-1)^3+12\times(-1)+c=3$ 이므로 $c=14$이다.

그러므로 $k=f(2)=-2^3+12\times 2+14=30$이다.

여담:

차근차근 조건 하나씩 찾아나가며 풀면 금방 해결되는 문제.

$f'(2)=0$을 통해 $f(-1)$의 값을 구하고, $f(-1)$의 값을 통해 $f(x)$의 적분상수를 구해 $f(x)$의 식을 확정해주는 문제.

9.

정답: ④

해설:

$a_n = a \times r^{n-1}$ 라고 하자. (단, $a \neq 0,\ r \neq 0$)

$\frac{a_5}{a_2} - \frac{a_7}{a_{10}} = a_{13} - a_{16} = \frac{3}{2}$을 a와 r을 이용해 다시 작성해보면,

$r^3 - \frac{1}{r^3} = ar^{12}(1-r^3) = \frac{3}{2}$ 이다.

$r^3 - \frac{1}{r^3} = \frac{3}{2}$이므로 $r^3 = 2$ 또는 $r^3 = -\frac{1}{2}$이고,

$r^3 = 2$일 경우 $a = -\frac{3}{32}$이며,

$r^3 = -\frac{1}{2}$일 경우 $a = 16$이다.

이 두 가지 경우 중 $a_3 > 0$을 만족시키는 경우는 $a = 16$, $r^3 = -\frac{1}{2}$인 상황이다.

따라서 $a_1 = 16,\ a_7 = a \times r^6 = 4,\ a_{10} = a \times r^9 = -2$ 이므로

$a_1 + a_7 + a_{10} = 18$이다.

여담:

무심코 $r > 0$이라 생각하면 실수하기 딱 좋다.

a를 설정하지 않고, a_{13}과 r에 대한 식을 이용해 계산 과정을 줄일 수도 있다.

10.

정답: ①

해설:

양수 a에 대하여, $x^2 - x = a$의 서로 다른 실근은 2개이므로,

그 두 점 중 최소 한 곳에서 $f(x)$가 연속이어야 $(x-b)f(x)$가 연속일 수 있다.

$x^2 + 2x = 4x + 3$의 근은 $x = 3$ 또는 $x = -1$이므로,

$x^2 - x = a$의 근 중 $x = 3$ 또는 $x = -1$이 존재해야하고,

따라서 $a = 3^2 - 3 = 6$이거나 $a = (-1)^2 - (-1) = 2$이다.

1) $a = 6$인 경우

$x^2 - x = 6$의 실근은 $x = 3$과 $x = -2$이므로,

$f(x)$는 $x = 3$에서는 연속, $x = -2$에서는 불연속이다.

$(x-b)f(x)$가 $x = -2$에서 연속이려면 $b = -2$여야 하는데,

이는 b가 양수라는 조건에 위배된다.

따라서 $a = 2$이다.

2) $a = 2$인 경우

$x^2 - x = 2$의 실근은 $x = 2$와 $x = -1$이므로,

$f(x)$는 $x = -1$에서는 연속, $x = 2$에서는 불연속이다.

$(x-b)f(x)$가 $x = 2$에서 연속이려면 $b = 2$여야 한다.

따라서 $a = 2,\ b = 2$이므로 $a + b = 2 + 2 = 4$이다.

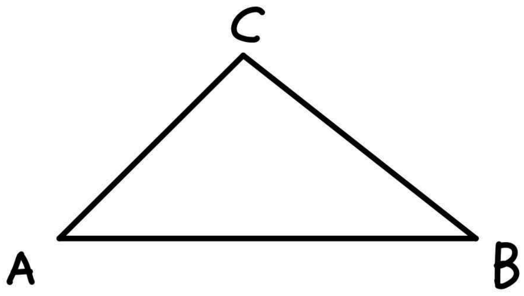
여담:

$f(x)$의 불연속 의심점은 2개이며, $(x-b)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 그 중 한 곳에서는 $f(x)$가 연속이고, 다른 한 곳에서는 $x-b$의 값이 0이어야 한다.

11.

정답: ④

해설:



step1 (나) 조건 해석

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$, $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$이므로,

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\tan A} = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A} \times \cos A$ 이고, $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\tan B} = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B} \times \cos B$이다.

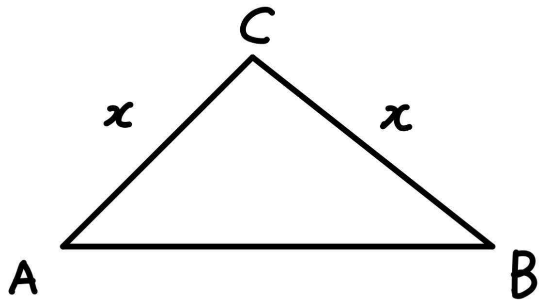
따라서 (나) 조건에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B} \times \cos B = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A} \times \cos A$이고,

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A} = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}$ 이므로

$\cos A = \cos B$이다.

즉, $\angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{CBA}$이고, $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$이다.

step2



$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}} = x$라 하자.

(가) 조건에 의해 $\cos C = -\dfrac{3}{5}$이므로 $\sin C = \dfrac{4}{5}$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는,

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \sin C = \dfrac{1}{2} \times x \times x \times \dfrac{4}{5} = 8$이므로

$x = \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{5}$이다.

step3

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면,

$$(\overline{\mathrm{AB}})^2 = (\overline{\mathrm{AC}})^2 + (\overline{\mathrm{BC}})^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \cos C$$
$$= (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) = 64\text{이므로,}$$

$\overline{\mathrm{AB}} = 8$이다.

여담:

5회 11번과는 다르게 tan를 cos와 sin으로 분리하는 문제.

($\dfrac{\text{길이}}{\tan}$ 형식을 보고 사인법칙을 떠올려 tan를 cos와 sin으로 분리했다면 아주 잘한 것이다.)

12.

정답: ⑤

해설:

step1 극한 해석

$x \to 3$일 때 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)+f(1)}{|x-3|}$ 의 (분모)$\to$0이므로, 극한값이 존재하려면 (분자)$\to$0이어야 한다.

따라서 $f(3)+f(1)=0$이다.

또한, $\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)+f(1)}{-(x-3)}=\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)+f(1)}{x-3}=f(4)$이므로

$f'(3)=f(4)=0$이다.

step2

$f'(3)=0$을 이용해 $f(x)=(x-3)^2(x-a)+b$라 하자.

(단, a, b는 실수)

1) $f(3)=-f(1)$이므로 $b=-4(1-a)-b$이다.

2) $f(4)=0$이므로 $4-a+b=0$이다.

따라서 $a=-2$, $b=-6$이고, $f(x)=(x+2)(x-3)^2-6$이므로

$f(5)=(5+2)\times(5-3)^2-6=22$이다.

여담:

(분모)$\to$0와, 분모에 절댓값이 있다는 점에 주목하기.

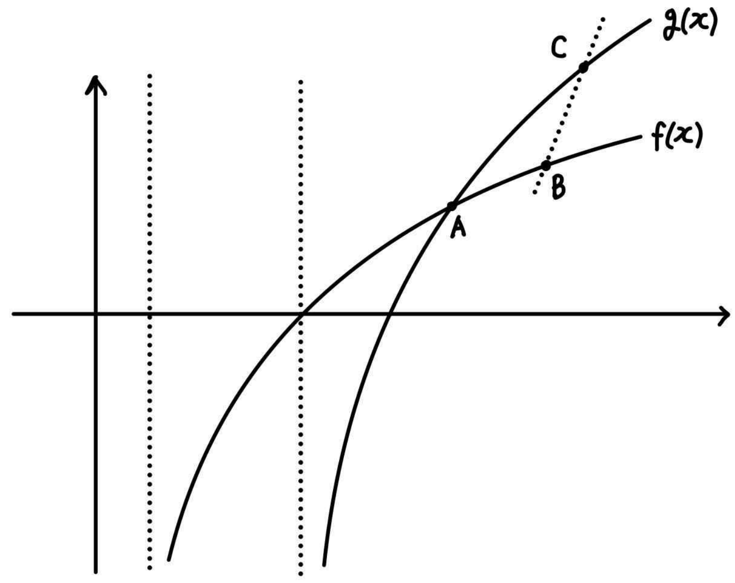
$f'(3)=0$을 통해 $f(x)=(x-3)^2(x-a)+b$라고 식을 세울 수 있다.

실제로 값을 이용해 식을 세우는 경우는 종종 어려운 문제들에서 출제가 되는데 위 경우가 거의 가장 어려운 값이다. 바로바로 나오도록 연습을 해주도록 하자.

13.

정답: ③

해설:



step1

점 A의 x좌표는 $\log_{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\log_{\sqrt{2}}(2x-3)$의 근과 같으므로,

점 A의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이고, 점 A의 y좌표는 $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=2$이다.

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},2\right)$이다.

step2

$g(x)=\log_{\sqrt{2}}(2x-3)=\log_{\sqrt{2}}\left((x-1)-\frac{1}{2}\right)+2$이므로,

$g(x)$는 $f(x)$를 x축의 방향으로 $+1$만큼, y축의 방향으로 $+2$만큼 평행이동 시킨 것이다.

선분 BC의 기울기가 2이므로, 점 C는 점 B를 x축의 방향으로 $+1$만큼, y축의 방향으로 $+2$만큼 평행이동 시킨 것이다.

따라서, 점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표의 $\frac{3}{2}$배라는 조건에 의해 점 B의 y좌표를 $2t$, 점 C의 y좌표를 $3t$라 한다면,

점 B와 점 C의 y좌표의 차이는 2이므로 $t=2$이다.

점 B는 $f(x)$ 위의 점이며 y좌표가 4이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},4\right)$이고,

점 C는 $g(x)$ 위의 점이며 y좌표가 6이므로 점 C의 좌표는 $\left(\frac{11}{2},6\right)$이다.

step3

$A\left(\frac{5}{2}, 2\right)$, $B\left(\frac{9}{2}, 4\right)$, $C\left(\frac{11}{2}, 6\right)$이므로

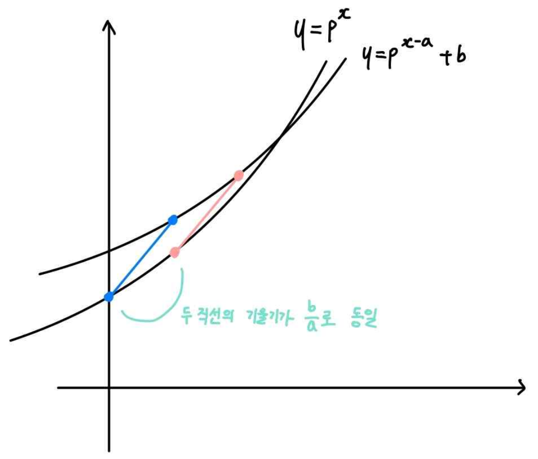
삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left|\begin{matrix} \frac{5}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\times|(10+27+11)-(9+22+15)| = 1$ 이다.

($\because$신발끈공식)

여담:

1) 지수로그함수를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 이동시킨 후, 이동되기 전의 점과 이동된 이후의 점을 이어보면 항상 기울기가 $\frac{b}{a}$이다.



(단, 평행이동 관계에 있는 두 점이 아니라 다른 점을 이은 경우 기울기가 $\frac{b}{a}$가 아니다.)

2) step3에서 계산을 줄이는 방법

세 점을 모두 같은 만큼 평행이동시켜 신발끈 공식을 적용해도 된다.

(이 경우, 세 점 중 한 점이 원점에 가도록 평행이동 시키면 계산이 줄어들겠죠?)

ex. $A'(0,0)$, $B'(2,2)$, $C'(3,4)$로 평행이동 시킨 다음,

$\frac{1}{2}\times\left|\begin{matrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{matrix}\right| = 1$로 계산해도 된다.

14.

정답: ⑤

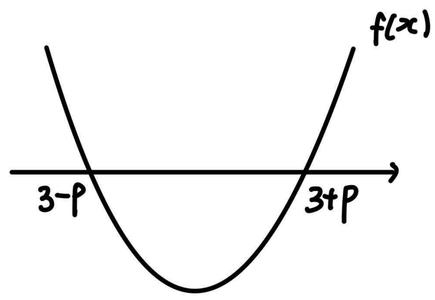
해설:

$f(x)$의 극솟값은 $f(3)$이고,

$f'(x) = 6x-18$이므로

$f(x) = 3x^2-18x+c = 3(x-3-p)(x-3+p)$라 하자.

(단, c는 실수, $p>0$)



$f(3) = -3p^2$이다.

함수 $y = 13+\int_6^x f(t)dt$의 도함수는 $y = f(x)$이므로,

$13+\int_6^x f(t)dt$의 극댓값은 $13+\int_6^{3-p} f(t)dt$이다.

$$13+\int_6^{3-p} f(t)dt = 13+\int_6^{3-p}(3t^2-18t+27-3p^2)dt$$

$$= 13+\left[t^3-9t^2+(27-3p^2)t\right]_6^{3-p}$$

$$= 2p^3+9p^2-14$$이다.

따라서 $y = f(x)$의 극솟값인 $f(3)$과, $y = 13+\int_6^x f(t)dt$의 극댓값인 $13+\int_6^{3-p} f(t)dt$의 값이 같으므로,

$-3p^2 = 2p^3+9p^2-14$이고, 양수 p의 값은 $p=1$이다.

그러므로 $f(x) = 3(x-4)(x-2)$이므로,

$f(8) = 3\times4\times6 = 72$이다.

여담:

계산이 귀찮아도 끝까지 밀고나가자.

$f(x) = 3x^2-18x+c$라 식을 세우는 것보다,
$f(x) = 3(x-3-p)(x-3+p)$ 혹은 $f(x) = 3(x-3)^2-27+c$라고 식을 세우는 것이 $13+\int_6^x f(t)dt$의 극댓값을 계산하기에 더

편하다.

또한 $f(x)$를 x축으로 -3만큼 평행이동시켜서,

$g(x)=f(x+3)=3(x-p)(x+p)$라 한 다음, $\int_{6}^{3-p} f(t)dt$의 값

대신 $\int_{3}^{-p} g(t)dt$의 값을 구해주어도 된다.

15.

정답: ③

해설:

step1

$f(x)=a_n x^2+2x+a_{n+1}$ 에 $n=3$을 대입해보자.

$a_3=\frac{1}{2}$, $a_5=7$이므로

$[0,2]$에서 함수 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+a_4=\frac{1}{2}(x+2)^2+a_4-2$의

최댓값이 7이므로,

$\frac{1}{2}\times(2+2)^2+a_4-2=7$이고, $a_4=1$이다.

그러므로 $a_3=\frac{1}{2}$, $a_4=1$, $a_5=7$이다.

step2

1) $n=4$ 대입

$y=x^2+2x+7$의 $[0,2]$에서 최댓값이 a_6이므로
$a_6=2^2+2\times2+7=15$이다.

2) $n=2$ 대입

$y=a_2x^2+2x+\frac{1}{2}$의 $[0,2]$에서 최댓값이 1이다.

① $x=0$에서 최대일 경우, 최댓값이 $\frac{1}{2}$이므로 해당하는 상황이 아니다.

② $x=2$에서 최대일 경우, $a_2\times2^2+2\times2+\frac{1}{2}=1$이므로

$a_2=-\frac{7}{8}$이고, 이 경우 $x=\frac{8}{7}$에서 최대이므로 해당하는 상황이 아니다.

③ $x=-\frac{1}{a_2}$에서 최대일 경우,

$a_2\times\left(-\frac{1}{a_2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{a_2}\right)+\frac{1}{2}=1$이므로 $a_2=-2$이고, 이 경우

$x=-\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}$에서 최대이다.

따라서 $a_2=-2$이다.

3) $n=1$ 대입

$y=a_1x^2+2x-2$의 $[0,2]$에서 최댓값이 $\frac{1}{2}$이다.

① $x=0$에서 최대일 경우, 최댓값이 -2이므로 해당하는 상황이 아니다.

② $x=-\frac{1}{a_1}$에서 최대일 경우,

$a_1\times\left(-\frac{1}{a_1}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{a_1}\right)-2=\frac{1}{2}$이므로 $a_1=-\frac{2}{5}$이고, 이 경우 $x=2$에서 최대이므로 해당하는 상황이 아니다.

③ $x=2$에서 최대일 경우, $a_1\times2^2+2\times2-2=\frac{1}{2}$이므로

$a_1=-\frac{3}{8}$이고, 이 경우 $x=2$에서 최대이다.

따라서 $a_1=-\frac{3}{8}$이다.

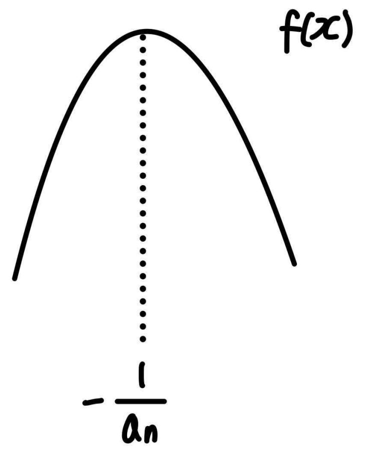
그러므로 $a_1+a_6=-\frac{3}{8}+15=\frac{117}{8}$이다.

여담:

1)

닫힌구간 $[0,2]$에서 $f(x)$의 최댓값은

$\max\left\{f(0), f\left(-\frac{1}{a_n}\right), f(1)\right\}$임을 이용해 케이스분류하기.



$[0,2]$에서 $f(x)$의 최댓값은,

$-\frac{1}{a_n}\geq 2$일 때 $f(2)$이고,

$0<-\frac{1}{a_n}<2$일 때 $f\left(-\frac{1}{a_n}\right)$이며,

$-\frac{1}{a_n}\leq 0$일 때 $f(0)$이다.

2)

주어진 값을 기준으로 역추론을 해본다면 이러한 유형은 거의 무조건 풀린다. 케이스 분류에 두려움을 갖지 말자!

기출 다시보기: 2021학년도 9월 모의평가 나형 21번

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n\leq a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n>a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

정답: 2번

20.

정답: 36

해설:

step1

등식 $\int_{-1}^{5}|f(x)|dx=\int_{-1}^{5}f(x)dx-2\int_{2}^{3}f(x)dx$는

$\int_{-1}^{5}|f(x)|-f(x)dx=-2\int_{2}^{3}f(x)dx$이므로

$|f(x)|-f(x)$를 관찰해보자.

step2

$f(x)\geq 0$이면 $|f(x)|-f(x)=0$이고,

$f(x)<0$이면 $|f(x)|-f(x)=-2f(x)$이다.

따라서 $[-1,2)$, $(3,5]$의 구간에서 $|f(x)|-f(x)=0$이 되어야 하므로 이 구간에서 $f(x)\geq 0$이고,

$[2,3]$의 구간에서 $f(x)\leq 0$이다.

(이 경우, $\int_{-1}^{5}|f(x)|-f(x)dx=\int_{-1}^{2}0dx+\int_{2}^{3}-2f(x)dx+\int_{3}^{5}0dx$

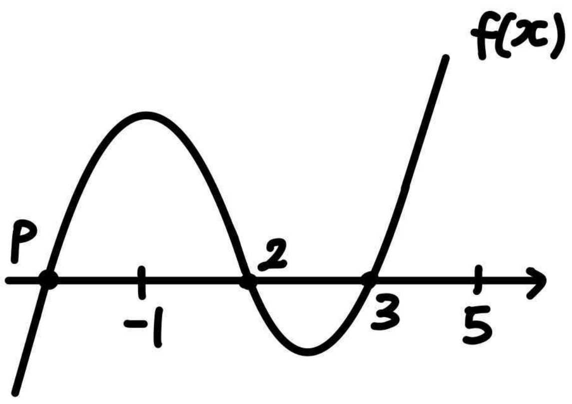
$=-2\int_{2}^{3}f(x)dx$이다.)

step3

$f(x)=(x-p)(x-2)(x-3)$이라 하면, (단, $p\leq -1$)

$f(5)=(5-p)\times 3\times 2=30-6p\geq 36$이다.

따라서 $f(5)$의 최솟값은 36이다.



여담:

$|f(x)|-f(x)$의 적절한 식 변형/ 식 해석이 필요함

딱딱 상황이 맞아떨어지는게 행복하네요.

21.

정답: 35

해설:

step1

방정식 $x+a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=2$의 실근은 $a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=2-x$의 실근과 같다.

이때 함수 $y=a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$는 $(2,0)$에 대해 점대칭이고, $y=2-x$ 역시 $(2,0)$에 대해 점대칭이다.

즉, $(\alpha_1, 2-\alpha_1)$과 $(\alpha_n, 2-\alpha_n)$도 $(2,0)$에 대해 점대칭이므로 $\alpha_n=4-\alpha_1$이라 할 수 있다.

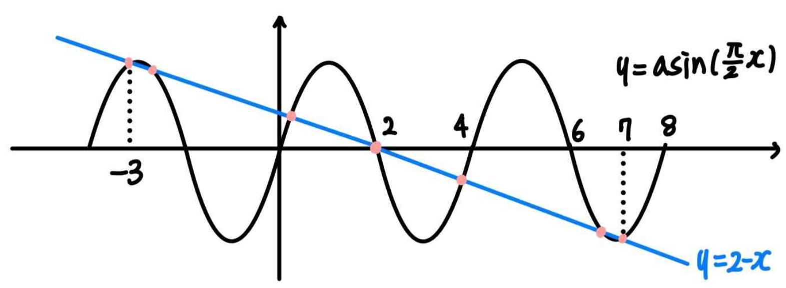
따라서 $\alpha_1\times\alpha_n=\alpha_1\times(4-\alpha_1)=-21$이므로 $\alpha_1=-3$, $\alpha_n=7$이다. $(\because \alpha_1<\alpha_n)$

step2 a 구하기

$a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=2-x$에 $x=\alpha_1=-3$을 대입해보면,

$a\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=2-(-3)$이므로 $a=5$이다.

step3 n 구하기



두 함수의 교점의 개수가 7개이므로, $n=7$이다.

그러므로 $a=5$, $n=7$이므로 $a\times n=5\times 7=35$이다.

여담:

방정식의 실근을 사인함수와 직선의 교점으로 해석하기!

사인함수와 직선이 같은 점에 대해 점대칭임을 파악하면 쉽다.

직선을 그을 때 y좌표가 정수인 점을 찾아놓고 그래프를 그리면 쉽다.

22.

정답: 457

해설:

step1 (나) 조건 해석

$x=0$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $x \to 0-$일 때, $xf'(g(x)) \to 0$이므로 $f(0)=0$이다.

$xf'(g(x))=f(x)$을 x로 나눠주면, ($xf'(g(x))=f(x)$일 때 x는 음수이므로 x로 나눠줘도 상관없다.)

$f'(g(x))=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$이고,

따라서 $x<0$일 때 $f'(g(x))$의 값은 $(x, f(x))$와 $(0, f(0))$ 두 점을 지나는 직선의 기울기와 같다.

이때, $x \geq 0$일 때 $f(g(x)+f(2))=x$이므로 $g(x)$가 $x<0$일 때만 극댓값을 가질 수 있다.

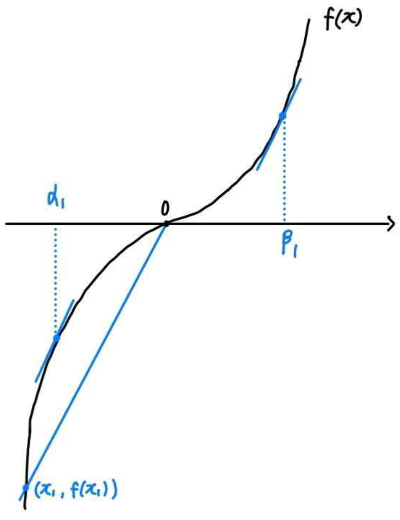
($x \to \infty$에서 $x \to 0+$까지 x가 감소하는 과정에서, $g(x)$가 연속이므로 $g(x)+f(2)$ 또한 연속함수이고, 이때 $g(x)+f(2)$가 연속이려면 $x \to \infty$에서 $x \to 0+$까지 감소하는 형태여야 한다. 따라서 $x<0$일 때만 극댓값을 가질 수 있다.)

step2

$f(0)=0$, $f'(0)=0$이므로 가능한 $f(x)$의 개형은 3가지가 존재한다.

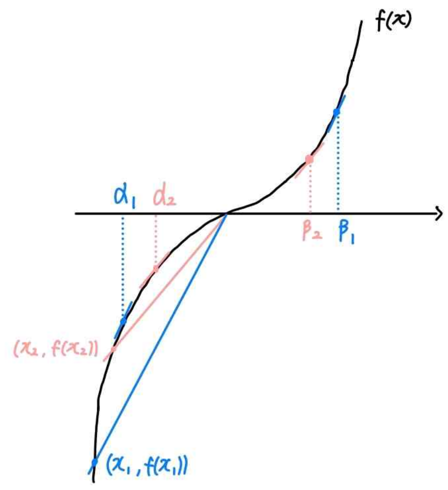
1) $f(x)=ax^3$ (단, $a>0$)

$x<0$에서 $g(x)$의 원활한 이해를 위해 $x=x_1$인 상황을 살펴보자. (단, $x_1<0$)



$x=x_1$일 때, $g(x_1)=\alpha_1$ 또는 $g(x_1)=\beta_1$이다.

또한, x값이 조금 더 커진 $x=x_2$인 상황도 살펴보자. (단, $x_1<x_2<0$)

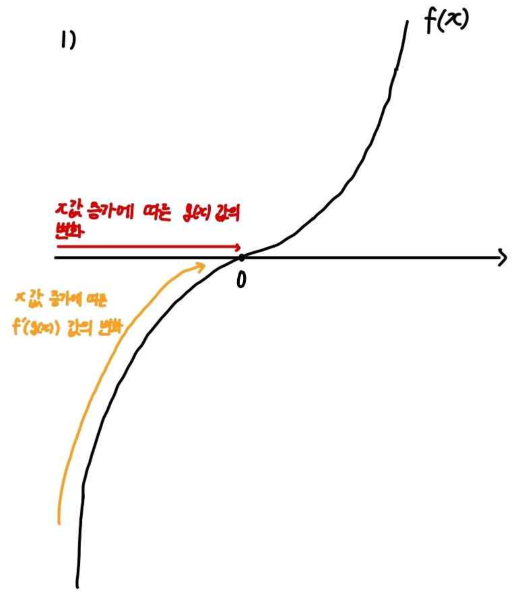


$g(x)$는 연속함수이기 때문에

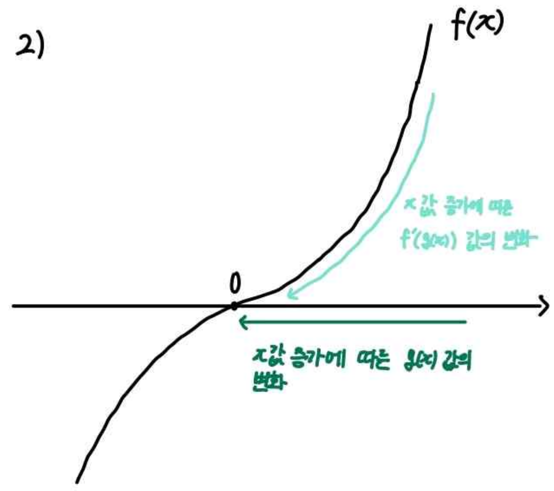
만약 $g(x_1)=\alpha_1$이었다면, $g(x_2)=\alpha_2$이고,

$g(x_1)=\beta_1$이었다면, $g(x_2)=\beta_2$이다.

즉 x의 값이 0이 될 때까지 점점 커지는 과정에서,



$g(x)$의 값은 0이 될 때 까지 계속 증가하기만 하거나,



$g(x)$의 값은 0이 될 때 까지 감소하기만 한다.

(두 경우 모두 $x<0$일 때 $g(x)$를 표시한 것이다. 헷갈리지 않게

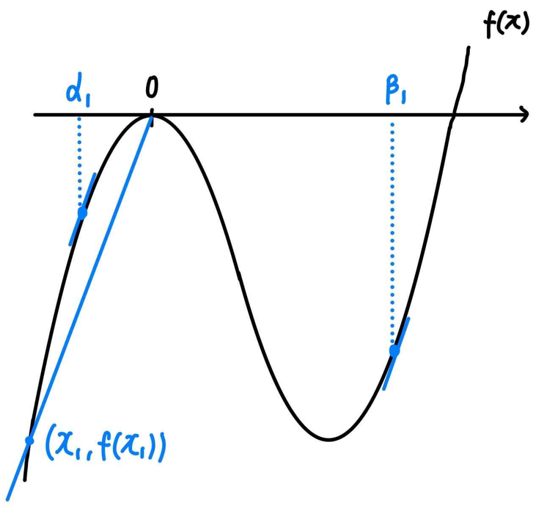
주의하기)

따라서 이 경우 $g(x)$가 음수인 극댓값을 가지지 않는다.

또한 1) 상황의 경우, $x \to 0+$일 때 $f(g(0)+f(2))=0$이고, $f(x)=0$을 만족하는 x의 값이 0 뿐이므로, $g(0)+f(2)=0$이다. 즉, $g(0)=-f(2)$이어야 하는데, $x \to 0-$일 때 $g(x) \to 0$이므로 이는 불가능하다. (연속인 함수 $g(x)$가 존재하지 않는다.)

2) $f(x)$의 극댓값이 0인 경우

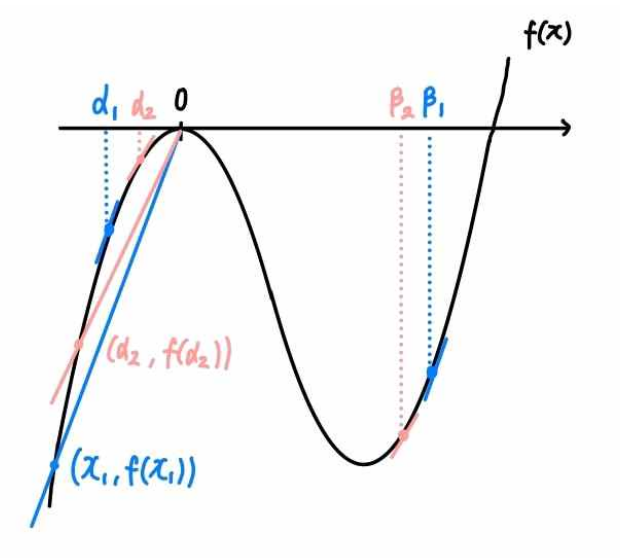
$x<0$에서 $g(x)$의 원활한 이해를 위해 $x=x_1$인 상황을 살펴보자. (단, $x_1<0$)



$x=x_1$일 때, $g(x_1)=\alpha_1$ 또는 $g(x_1)=\beta_1$이다.

또한, x값이 조금 더 커진 $x=x_2$인 상황도 살펴보자.

(단, $x_1<x_2<0$)

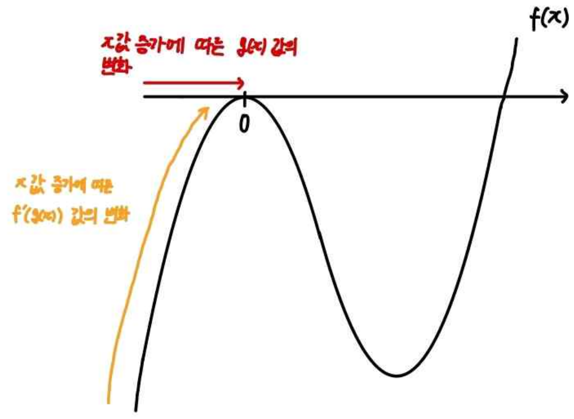


$g(x)$는 연속함수이기 때문에

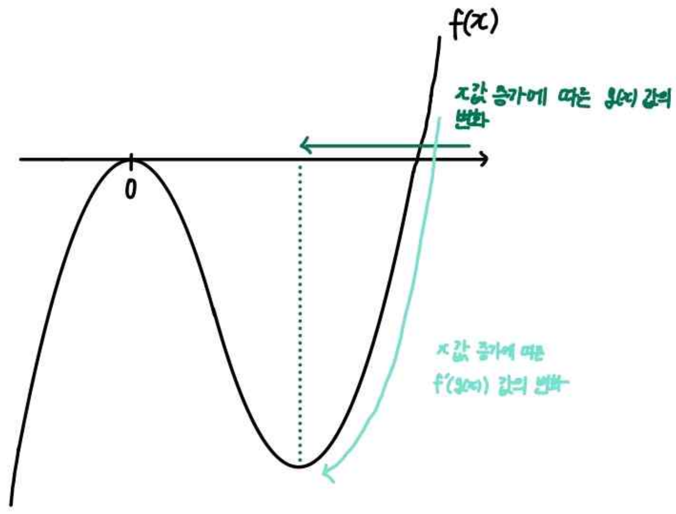
만약 $g(x_1)=\alpha_1$이었다면, $g(x_2)=\alpha_2$이고,

$g(x_1)=\beta_1$이었다면, $g(x_2)=\beta_2$이다.

즉 x의 값이 0이 될 때까지 점점 커지는 과정에서,



$g(x)$의 값은 0이 될 때 까지 계속 증가하기만 하거나,



$g(x)$의 값은 감소하기만 한다.

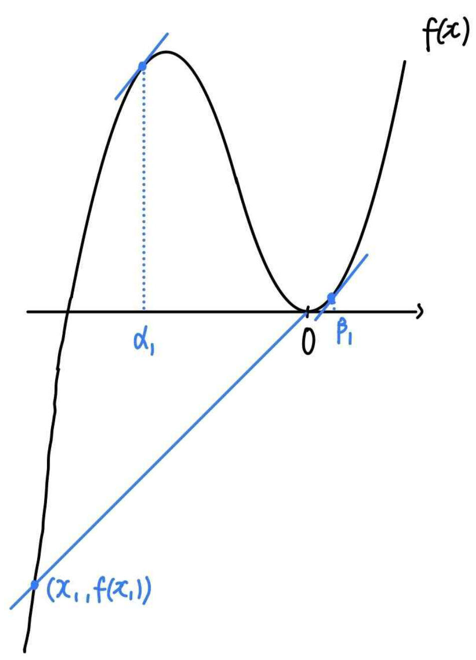
(두 경우 모두 $x<0$일 때 $g(x)$를 표시한 것이다. 헷갈리지 않게 주의하기)

따라서 이 경우 $g(x)$가 음수인 극댓값을 가지지 않는다.

그러므로 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

3) $f(x)$의 극솟값이 0인 경우

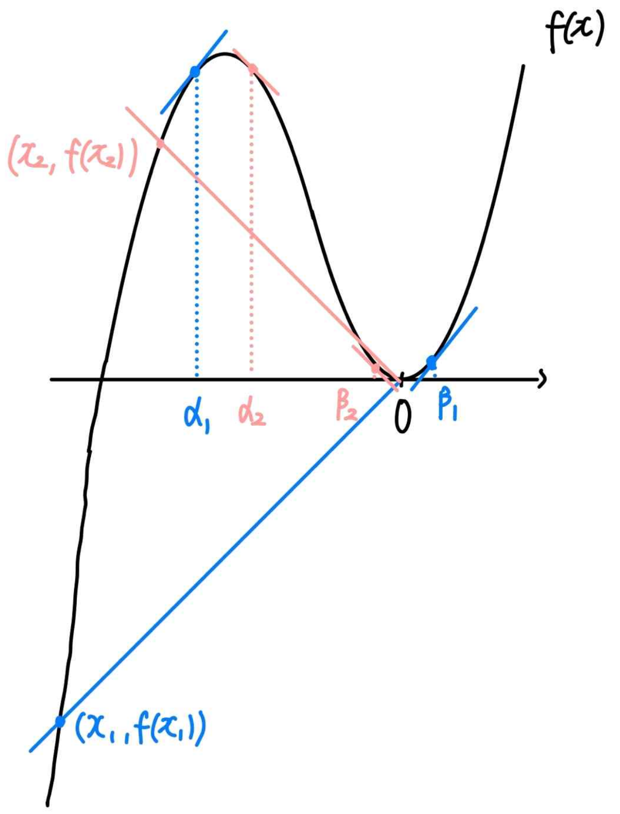
$x<0$에서 $g(x)$의 원활한 이해를 위해 $x=x_1$인 상황을 살펴보자. (단, $x_1<0$)



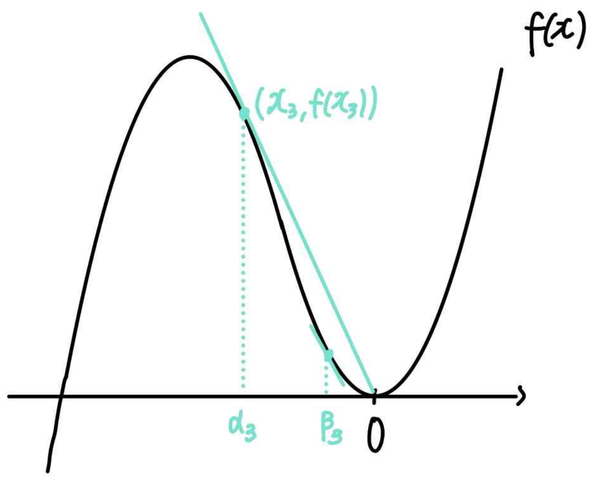
$x=x_1$일 때, $g(x_1)=\alpha_1$ 또는 $g(x_1)=\beta_1$이다.

또한, x값이 조금 더 커진 $x=x_2$인 상황도 살펴보자.

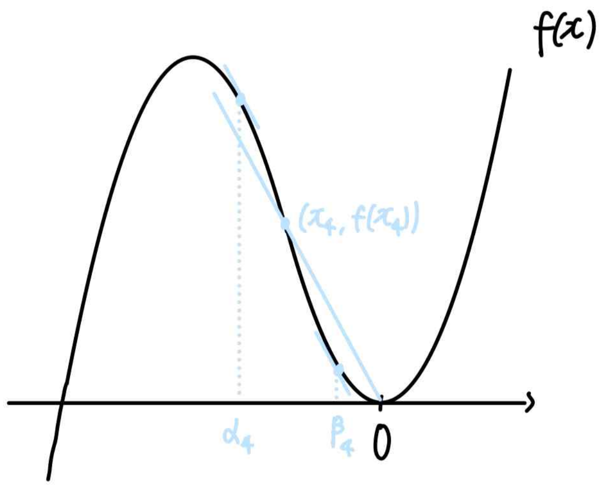
(단, $x_1<x_2<0$)



$x_1<x_2<x_3<0$인 $x=x_3=\alpha_3$인 상황도 살펴보자.



$x_1<x_2<x_3<x_4<0$인 $x=x_4$인 상황도 살펴보자.

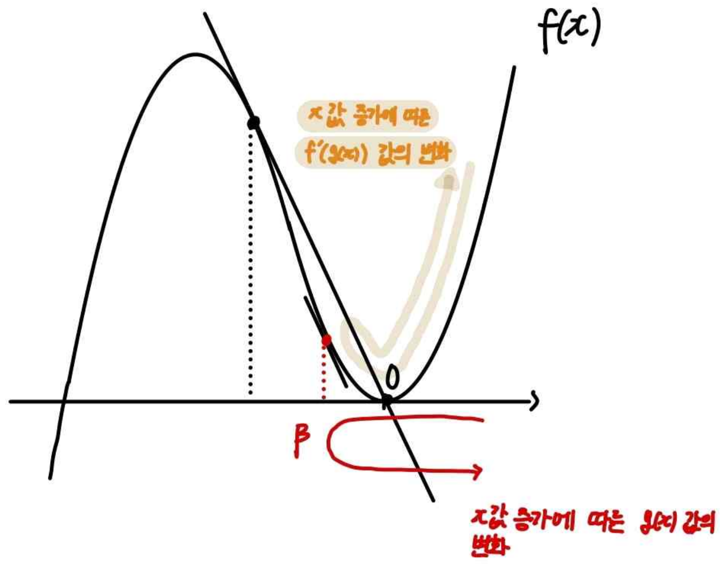


$g(x)$는 연속함수이기 때문에

만약 $g(x_1)=\alpha_1$이었다면, $g(x_2)=\alpha_2$, $g(x_3)=\alpha_3$, $g(x_4)=\alpha_4$이고,

$g(x_1)=\beta_1$이었다면, $g(x_2)=\beta_2$, $g(x_3)=\beta_3$, $g(x_4)=\beta_4$이다.

즉 x의 값이 0이 될 때까지 점점 커지는 과정에서



$f'(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$인 α에 대해,

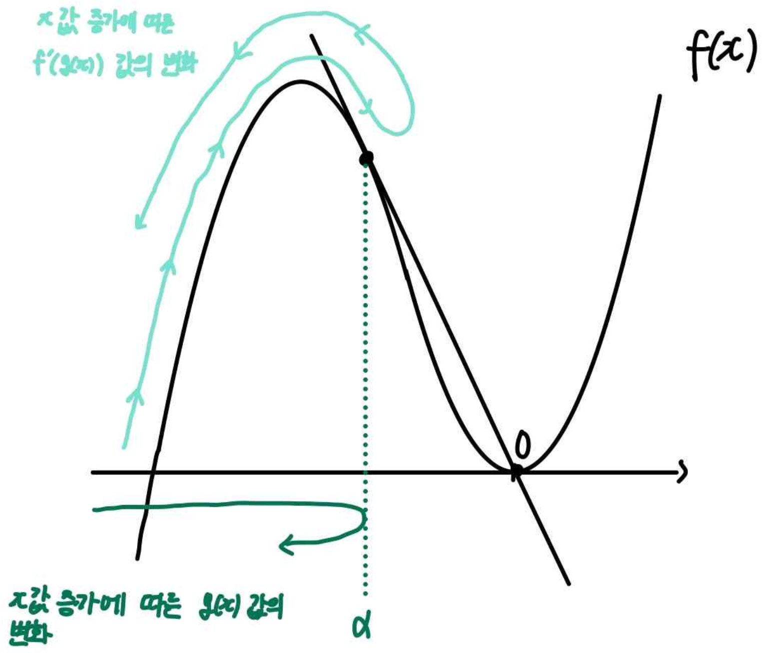
$f'(\alpha)=f'(\beta)$인 β까지 $g(x)$가 감소하다가, (단, $\alpha<\beta$)

$g(x)=\beta$에서 극소를 찍고 ($g(x)$의 극솟값이 β이며),

이후 $g(x)$가 증가할 수 있다.

이 경우 $g(x)$는 음수인 극댓값을 가지지 않는다.

또한 x의 값이 0이 될 때까지 점점 커지는 과정에서



$f'(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$인 α까지 $g(x)$가 증가하다가,

$g(x)=\alpha$에서 극대를 찍고 ($g(x)$의 극댓값이 α이며),

이후 $g(x)$가 감소할 수 있다.

이 경우 $g(x)$는 음수인 극댓값을 가지고,

($g(x)$의 극댓값)$=\alpha=-\dfrac{9}{4}$이다.

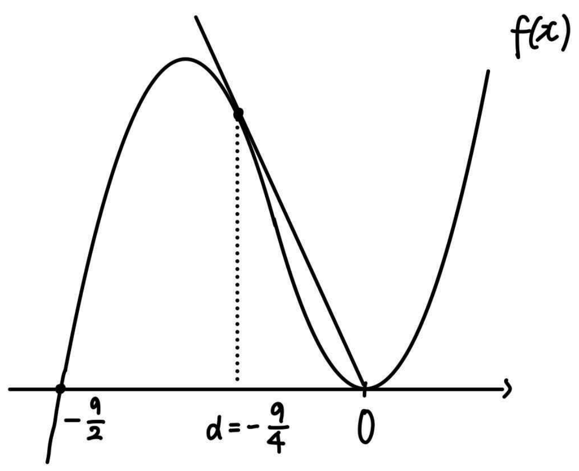
step3

$f(x)=$($x=\alpha$에서의 접선의 방정식)의 세 근이 $-\dfrac{9}{4}$, $-\dfrac{9}{4}$, 0이므로,

$f(x)=0$의 세 실근의 합은 $-\dfrac{9}{4}+\left(-\dfrac{9}{4}\right)+0=-\dfrac{9}{2}$이다.

따라서 $f(x)=0$의 세 실근은 0, 0, $-\dfrac{9}{2}$이다.

그러므로 $f(x)=ax^2\left(x+\dfrac{9}{2}\right)$라 할 수 있다. (단, $a>0$)



step4 조건 (가) 해석

$f(g(x)+f(2))=x$에 $x=0$을 대입해보자.

$f(g(0)+f(2))=0$이다.

조건 (나) 에서,

$x\to0-$일 때, $\lim\limits_{x\to0-}f'(g(x))=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)}{x}=0$이므로

연속함수 $g(x)$에 대해 $\lim\limits_{x\to0-}g(x)=-3$이다.

따라서 $f(g(0)+f(2))=f(-3+f(2))=0$이므로

$-3+f(2)=-\dfrac{9}{2}$ 또는 $-3+f(2)=0$이고,

이때 $f(2)>f(0)=0$이므로 $f(2)=3$이다.

step5

$f(x)=ax^2\left(x+\dfrac{9}{2}\right)$에 대해

$f(2)=a\times2^2\times\left(2+\dfrac{9}{2}\right)=26a=3$이므로

$a=\dfrac{3}{26}$이다.

따라서 $f(3)=a\times9\times\left(3+\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{135}{2}a=\dfrac{405}{52}$이므로

$p=52$, $q=405$이고, $p+q=457$이다.

여담:

평균변화율 함수의 변화 양상을 꼭 기억해두자.

기출 다시보기: 2023학년도 수능 22번

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

정답: 13

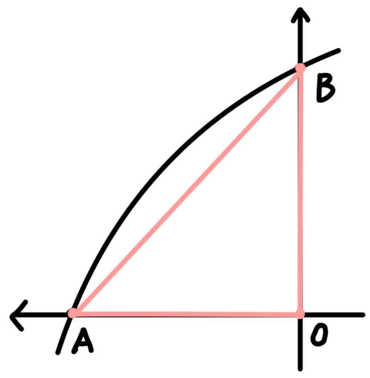
8회 정답

8	①	9	③	10	⑤	11	⑤	12	①
13	②	14	④	15	③	20	24	21	66
22	26								

8.

정답: ①

해설:



점 A의 좌표는 $(-4,0)$, 점 B의 좌표는 $(0,\log_a 5)$이다.

$\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 $\log_a 5=4$이고, $a=5^{\frac{1}{4}}$이다.

여담:

$\angle AOB$가 직각이기 때문에 삼각형 OAB가 이등변삼각형이라면 $\overline{OA}=\overline{OB}$일 수밖에 없다.

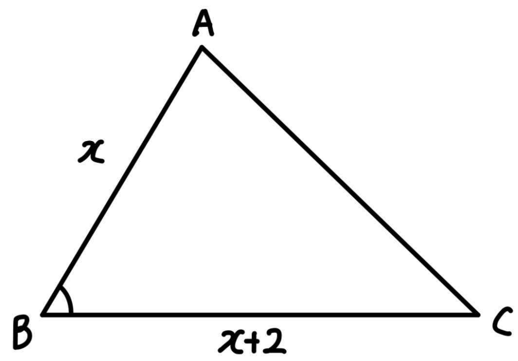
(만약 $\overline{OA}=\overline{AB}$일 경우 $\angle AOB=\angle ABO=90^\circ$이므로 삼각형 OAB가 성립하지 않고,

$\overline{OB}=\overline{AB}$일 경우 $\angle AOB=\angle OAB=90^\circ$이므로 삼각형 OAB가 성립하지 않는다.)

9.

정답: ③

해설:



$\cos B = \frac{3}{4}$이므로 $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = \mathrm{x}$라 하면 (가) 조건에 의해 $\overline{\mathrm{BC}} = \mathrm{x}+2$이고,

(삼각형 ABC의 넓이)

$= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times x \times (x+2) \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 6\sqrt{7}$이므로

양수 x의 값은 $x=6$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = 6$이고, $\overline{\mathrm{BC}} = 8$이다.

또한 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면,

$$(\overline{\mathrm{AC}})^2 = (\overline{\mathrm{AB}})^2 + (\overline{\mathrm{BC}})^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$= 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{3}{4} = 28\text{이므로,}$$

$\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{7}$이다.

여담:

넓이공식과 코사인법칙 이용하는 문제

10.

정답: ⑤

해설:

먼저, 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면 $0 = g(0)$이고,

$f(x)$는 연속함수이기 때문에 $\int_0^x f(t)dt$ 또한 연속함수이므로

$x=1$에서 $\int_0^1 f(t)dt = g(1) = 1^2 - 1 = 0$이다.

또한, 주어진 등식을 x에 대해 미분하면,

$$f(x) = \begin{cases} g'(x) & (x<1) \\ 2x-1 & (x \geq 1) \end{cases} \text{ 이다.}$$

이때 $f(x)$는 연속함수이기 때문에 $g'(1) = 2\times1-1 = 1$이다.

따라서 $g(0)=0,\ g(1)=0,\ g'(1)=1$ 이므로,

$g(x) = x(x-1)(x-a)$라 한다면,

$g'(1) = 1-a = 1$이므로 $a=0$이고,

$g(x) = x^2(x-1)$이다.

그러므로 $f(-1) = g'(-1) = 3\times(-1)^2 - 2\times(-1) = 5$이고,

$g(2) = 2^2 \times (2-1) = 4$이므로

$f(-1)+g(2) = 9$이다.

여담:

$\int_0^x f(t)dt$와 $f(x)$가 모두 연속함수라는 점 이용하기.

연속성을 이용해 차근차근 정보를 구해가다보면 답이 나온다.

11.

정답: ⑤

해설:

step1

$\sin^2\pi x+\cos^2\pi x=1$이므로

방정식 $3\sin^2\pi x+\cos^2\pi x=3|\sin\pi x|$은

방정식 $2\sin^2\pi x-3|\sin\pi x|+1=0$과 같다.

step2

1) $0<x\le 1$에서 방정식 $2\sin^2\pi x-3|\sin\pi x|+1=0$은

방정식 $2\sin^2\pi x-3\sin\pi x+1=0$과 같고,

위 방정식의 실근은 $\sin\pi x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\pi x=1$의 실근과 같다.

따라서 $0<x\le 1$에서 방정식 $3\sin^2\pi x+\cos^2\pi x=3|\sin\pi x|$의 실근은 $x=\frac{1}{6}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{5}{6}$이다.

2) $1<x<2$에서 방정식 $2\sin^2\pi x-3|\sin\pi x|+1=0$은

방정식 $2\sin^2\pi x+3\sin\pi x+1=0$과 같고,

위 방정식의 실근은 $\sin\pi x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\pi x=-1$의 실근과 같다.

따라서 $1<x<2$에서 방정식 $3\sin^2\pi x+\cos^2\pi x=3|\sin\pi x|$의 실근은 $x=\frac{7}{6}$, $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{11}{6}$이다.

step3

$\alpha_1=\frac{1}{6}$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{5}{6}$, $\alpha_4=\frac{7}{6}$, $\alpha_5=\frac{3}{2}$, $\alpha_6=\frac{11}{6}$이므로,

$m=6$, $\alpha_6=\frac{11}{6}$이다.

따라서 $m\times\alpha_6=11$이다.

여담:

차근차근 절댓값 풀어서 범위별로 방정식의 실근을 구하면 되는 문제.

처음에 주어진 방정식의 형태를 보고 $\sin^2\pi x+\cos^2\pi x=1$을 이용해 $\cos\pi x$를 없앨 생각을 했다면 무난하게 해결 가능했을 것이다.

방정식 $2\sin^2\pi x-3|\sin\pi x|+1=0$을 $2|\sin\pi x|^2-3|\sin\pi x|+1=0$으로 해석할 경우, $|\sin\pi x|=\frac{1}{2}$ 또는 $|\sin\pi x|=1$을 만족하는 x값을 찾으면 된다. 이렇게 풀 경우 케이스분류 없이 $|\sin\pi x|$의 그래프만 그려서 풀 수 있으므로, 시간 단축이 가능하다.

12.

정답: ①

해설:

step1

$2\int_0^x |f(t)|dt = |x-2|f(x)+3$에 $x=0$을 대입하면

$0=2f(0)+3$이므로 $f(0)=-\frac{3}{2}$이다.

또한 $2\int_0^x |f(t)|dt = |x-2|f(x)+3$을 x에 대해 미분하면,

$$2|f(x)|=\begin{cases}(x-2)f'(x)+f(x) & (x\geq 2)\\ -(x-2)f'(x)-f(x) & (x<2)\end{cases}$$ 이다.

……ㄱ

step2

1) $f(x)$는 다항함수이므로 $|f(x)|$는 연속함수이다.

따라서 ㄱ에 의해 $f(2)=-f(2)$이므로 $f(2)=0$이다.

2) $x<2$이고 $f(x)<0$인 x에 대해, (혹은 $x=0$ 주위에서)

등식 ㄱ은 $-2f(x)=-(x-2)f'(x)-f(x)$이다.

이때 $f(x)$는 다항함수이므로,

모든 실수 x에 대해 $f(x)=(x-2)f'(x)$가 성립한다.

step3

$f(x)=(x-2)f'(x)$에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=0$이고,

$f(x)$의 최고차항의 계수를 a, 차수를 n이라 한다면,

$ax^n = x\times nax^{n-1}$이므로 $n=1$이다.

따라서 $f(x)$는 일차함수이고, $f(2)=0$이므로,

$f(x)=a(x-2)$라 한다면, (단, $a\neq 0$)

$f(0)=-\frac{3}{2}$이므로 $a=\frac{4}{3}$이고, $f(x)=\frac{3}{4}(x-2)$이다.

그러므로 $f(6)=3$이다.

여담:

다항함수에서 연속적인 일부 구간에 대해 성립하는 등식은, 무수히 많은 점에 대해 성립하는 등식이므로, 실수 전체의 구간에서도 성립한다. (단 '다항함수'인 경우!)

13.

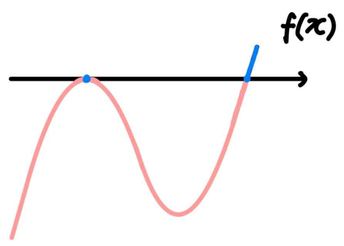
정답: ②

해설:

step1

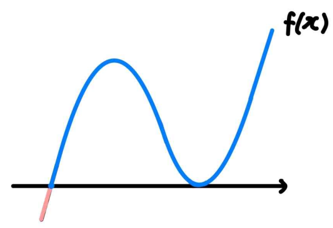
$g(x)$의 불연속점이 두 개라는 뜻은, $f(x)<0$과 $f(x)\geq 0$이 바뀌는 순간이 두 번이라는 뜻이다.

즉, $f(x)$의 극댓값이 0인 개형으로 확정 가능하다.



(조건 만족 O)

($f(x)$의 극솟값이 0일 경우, $f(x)<0$과 $f(x)\geq 0$이 한 번 바뀐다. 아래 그림 참고.)



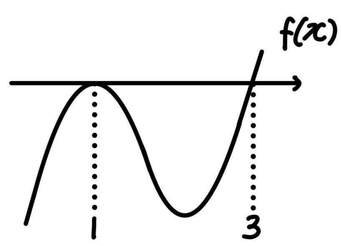
(조건 만족 X)

step2

ㄱ.

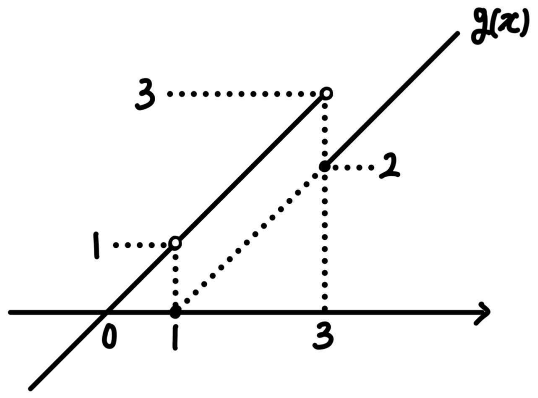
step1에서 파악했듯이 $f(x)$의 극댓값은 0이고, $f(x)$가 극대가 되는 순간 처음으로 $g(x)$의 식이 바뀌므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

따라서 ㄱ은 참이다.



ㄴ.

$g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)g(x-k)$가 $x=3$에서 미분가능하려면, $x=3$에서 연속이어야 한다.

따라서

$\lim_{x\to3-} g(x)g(x-k)=3\times\lim_{x\to3-} g(x-k)$이고

$\lim_{x\to3+} g(x)g(x-k)=2\times\lim_{x\to3+} g(x-k)$이므로

$3\times\lim_{x\to3-} g(x-k)=2\times\lim_{x\to3+} g(x-k)=2\times g(3-k)$이다.

그러므로 $y=g(x)g(x-k)$가 $x=3$에서 연속이도록 하는 k값은 $k=3$이다.

$\lim_{x\to3-}\{g'(x)g(x-k)+g(x)g'(x-k)\}=\lim_{x\to3-} g(x-k)+3$

$\lim_{x\to3+}\{g'(x)g(x-k)+g(x)g'(x-k)\}=\lim_{x\to3+} g(x-k)+2$

따라서 $x=3$에서 $y=g(x)g(x-k)$가 미분가능하려면,

$\lim_{x\to3-} g(x-3)+3=\lim_{x\to3+} g(x-3)+2$을 만족해야하는데,

위 등식은 성립하지 않는다.

따라서 $y=g(x)g(x-k)$가 $x=3$에서 미분가능하도록 하는 실수 k는 존재하지 않고, ㄴ은 참이다.

ㄷ.

함수 $y=g(x)g(x-k)$가 $x=1$에서 미분가능하려면, $x=1$에서 연속이어야 한다.

따라서

$\lim_{x\to1} g(x)g(x-k)=1\times\lim_{x\to1} g(x-k)$이고

$g(1)\times g(1-k)=0$이므로

$1\times\lim_{x\to1} g(x-k)=0$이어야 한다.

그러므로 $y=g(x)g(x-k)$가 $x=1$에서 연속이도록 하는 k값은 $k=1$이다.

$\lim_{x\to1-}\{g'(x)g(x-k)+g(x)g'(x-k)\}=\lim_{x\to1-} g(x-k)+1$

$\lim_{x\to1+}\{g'(x)g(x-k)+g(x)g'(x-k)\}=\lim_{x\to1+} g(x-k)+1$

따라서 $x=1$에서 주어진 함수가 미분가능하려면,

$\lim_{x\to1-} g(x-1)+1=\lim_{x\to1+} g(x-1)+1$여야 하고,

위 등식은 성립한다.

따라서 $y=g(x)g(x-k)$가 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 실수 k는 존재하고, ㄷ은 거짓이다.

여담:

1)

함수 $p(x)$가 미분가능하면 연속이다. (역은 성립하지 않는다.)

즉, ㄴ과 ㄷ 선지에서 주어진 함수가 연속인지도 확인해야 한다.

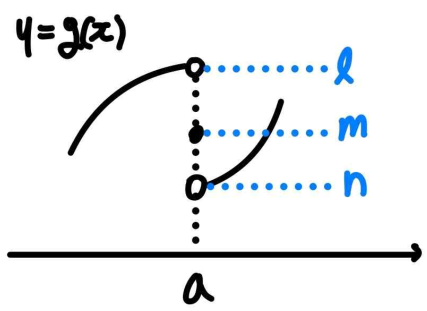
2)

연속성과 미분가능성 따지는 연습은 꼼꼼히 해 두면 좋다.

몇 가지 연습을 해 보자.

2-1) 연속성 따지기

연속함수 $f(x)$가 있고, $g(x)$가 다음과 같다.



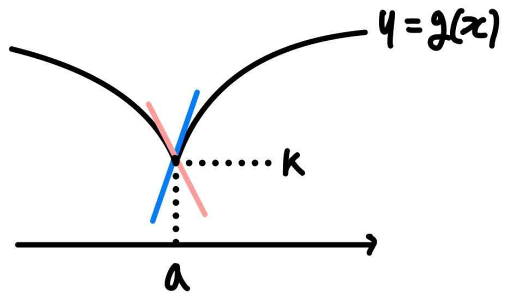
Q1. 함수 $f(x)\times g(x)$가 연속이려면 $f(x)$는 어떤 조건을 만족해야 하는가?

A1. $f(a)=0$

Q2. 함수 $f(g(x))$가 연속이려면 $f(x)$는 어떤 조건을 만족해야 하는가?

A2. $f(l)=f(m)=f(n)$

연속이며 도함수도 연속인 함수 $f(x)$와, $x=a$에서 좌미분계수와 우미분계수가 존재하고 연속이나 미분 불가능한 함수 $g(x)$가 있다.



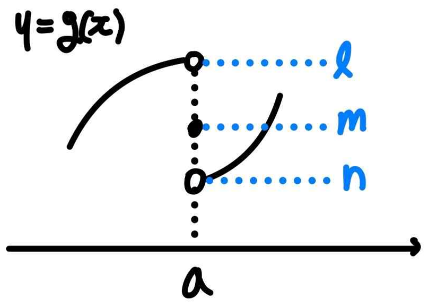
Q3. 함수 $f(x)\times g(x)$의 도함수가 연속이려면 $f(x)$는 어떤 조건을 만족해야 하는가?

A3. $f(a)=0$

Q4. 함수 $f(g(x))$의 도함수가 연속이려면 $f(x)$는 어떤 조건을 만족해야 하는가?

A4. $f'(k)=0$

연속이며 도함수도 연속인 함수 $f(x)$가 있고, $g(x)$가 다음과 같다.



Q5. 함수 $f(x)\times g(x)$의 도함수가 연속이려면 $f(x)$는 어떤 조건을 만족해야 하는가?

A5. $f(a)=f'(a)=0$

기출 다시보기: 2020학년도 수능 나형 20번

20. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x\le 0) \\ x-1 & (0<x\le 2) \\ 2x-3 & (x>2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어 떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답: 2번

14.

정답: ④

해설:

step1

방정식 $(x-a_{n+1})(x^2-3x+a_n)=0$은 삼차방정식이므로, 서로 다른 실근이 최대 3개 존재한다.

$n \geq 3$인 자연수 n에 대하여 $a_n=1$ 또는 $a_n=2$ 또는 $a_n=3$이다.

1) $a_3=a_4=a_5=\cdots=1$인 경우

$a_3=1$, $a_4=1$이므로 a_5는 $(x-1)(x^2-3x+1)=0$의 서로 다른 실근의 개수이고, $a_5=3$이다.

따라서 $a_5=3 \neq 1$이므로, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

2) $a_3=a_4=a_5=\cdots=3$인 경우

$a_3=3$, $a_4=3$이므로 a_5는 $(x-3)(x^2-3x+3)=0$의 서로 다른 실근의 개수이고, $a_5=1$이다.

따라서 $a_5=1 \neq 3$이므로, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

3) $a_3=a_4=a_5=\cdots=2$인 경우

$a_3=2$, $a_4=2$이므로 a_5는 $(x-2)(x^2-3x+2)=0$의 서로 다른 실근의 개수이고, $a_5=2$이다.

이 경우 주어진 조건을 만족시킨다.

step2

$a_3=2$, $a_4=2$이므로 $(x-2)(x^2-3x+a_2)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2여야 한다.

따라서 $a_2=2$ 또는 $a_2=\frac{9}{4}$이다.

$a_3=2$이므로 $(x-a_2)(x^2-3x+a_1)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2여야 한다.

만약 $a_2=2$라면, $a_1=2$ 또는 $a_1=\frac{9}{4}$이고,

$a_2=\frac{9}{4}$라면 $a_1=\frac{27}{16}$ 또는 $a_1=\frac{9}{4}$이다.

step3

$\sum_{k=1}^{7} a_k$의 최솟값은 $\frac{27}{16}+\frac{9}{4}+2\times 5=\frac{223}{16}$이다.

여담:

$(x-a_{n+1})(x^2-3x+a_n)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면, $x^2-3x+a_n=0$이 중근을 가지거나, $x^2-3x+a_n=0$의 실근 중 $x=a_{n+1}$이 존재해야 한다.

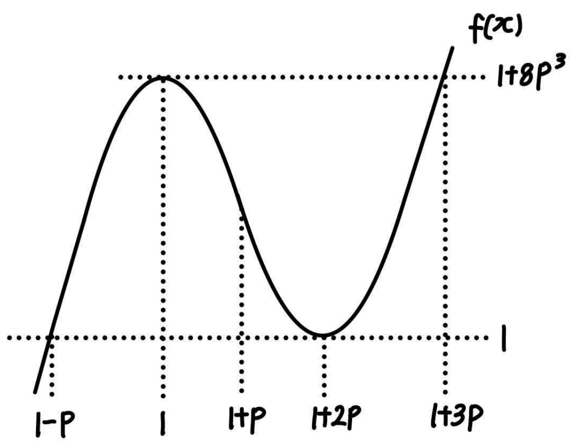
15.

정답: ③

해설:

step1

$f(x)$가 극솟값을 가지는 x값과, 극댓값을 가지는 x값의 차이를 $2p$라 하자. (단, $p>0$)



$f(x)=2\{x-(1-p)\}\{x-(1+2p)\}^2+1$이라고 하면,

$f(x)$의 극댓값은 $f(1)=1+8p^3$이다.

step2

$g(t)=2$라는 뜻은, x에 대한 방정식 $f(x)=f(f(t))$의 서로 다른 실근의 개수가 2라는 뜻이다.

x에 대한 방정식 $f(x)=f(f(t))$에서, $f(f(t))$는 상수이다.

따라서 $f(x)=f(f(t))$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면, $f(f(t))=1$ 또는 $f(f(t))=1+8p^3$이어야 한다.

이를 만족시키는 $f(t)$의 값은, $1-p$, $1+2p$, 1, $1+3p$이므로,

$f(t)=1-p$, 1, $1+2p$, $1+3p$인 t에 대해 $f(x)=f(f(t))$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

따라서 $f(t)=1-p$, 1, $1+2p$, $1+3p$ 를 만족시키는 실수 t의 개수는 6이다.

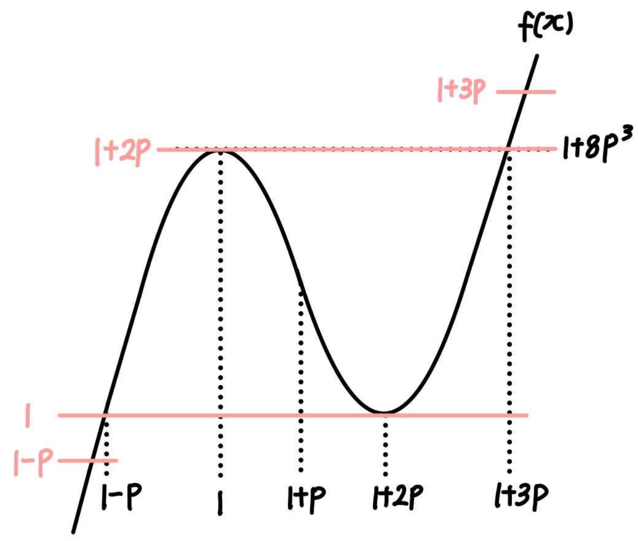
step3

p는 양수이므로, $1-p<1<1+2p<1+3p$이다.

이때 $f(t)=1-p$의 서로 다른 실근의 개수는 1,

$f(t)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로,

$f(t)=1+2p$와 $f(t)=1+3p$의 서로 다른 실근의 개수의 합은 3이어야 한다.



따라서 $f(t)=1+2p$의 서로 다른 실근의 개수가 2여야 하므로, $1+2p=1+8p^3$이다.

그러므로 양수 p의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

step3

$f(x)=2\{x-(1-p)\}\{x-(1+2p)\}^2+1$이고, $p=\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)^2+1$이다.

따라서 $f(7)=2\times\frac{13}{2}\times5^2+1=326$이다.

여담:

x에 대한 방정식 $f(x)=f(f(t))$에서 $f(f(t))$가 상수임을 파악하고 가면 이해하기 수월해진다.

하지만, $f(t)=(\text{상수})$를 만족하는 실수 t의 개수를 셀 때에는, t의 값이 변수이다.

20.

정답: 24

해설:

step1

1) n이 홀수인 경우

$x^n = X$라 한다면, $X^2 - X = a_n$의 실근의 개수는 0, 1, 2이고,
$x^n =$(상수)의 실근의 개수는 1개이므로

가능한 b_n의 값은 0, 1, 2이다.

2) n이 짝수인 경우

$x^n = X$라 한다면, $X^2 - X = a_n$의 실근의 개수는 0, 1, 2이고,
$x^n =$(상수)의 실근의 개수는 0, 1, 2이므로

가능한 b_n의 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

(주어진 방정식이 $X^2 - X = a_n$의 형태이므로 $b_n = 1$인 경우는 사실상 나오지 않는다.)

따라서 $3b_3 = b_8 > 0$을 만족시키는 $b_3 = 1$, $b_8 = 3$이다.

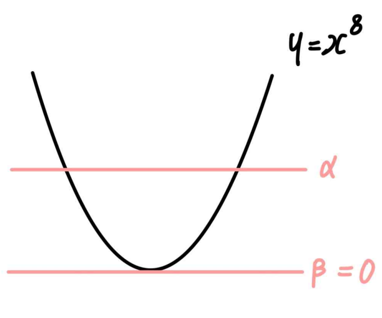
step2

$b_8 = 3$을 만족시키는 경우를 살펴보자.

$x^{16} - x^8 - a_8 = 0$을 만족시키는 실수 x^8의 값은 2개여야 하고, 이를 α, β라 하자. (단, $\alpha > \beta$)

이때 $x^8 = \alpha$의 서로 다른 실근의 개수는 2개, $x^8 = \beta$의 서로 다른 실근의 개수는 1개여야 하므로 $\alpha > 0$, $\beta = 0$이다.

따라서 $\alpha_8 = 0^2 - 0 = 0$이다.



또한 $b_3 = 1$이므로,

$x^6 - x^3 - a_3 = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 하는데,

이를 만족시키려면 $\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 = x^6 - x^3 - a_3$이어야 하므로

$a_3 = -\frac{1}{4}$이다.

step3

등차수열 a_n에 대하며 $a_3 = -\frac{1}{4}$, $a_8 = 0$이므로

$a_n = \frac{1}{20}(n-1) - \frac{7}{20}$이다.

따라서 $a_6 = -\frac{1}{10}$, $a_{128} = 6$이고,

b_6은 $x^{12} - x^6 = -\frac{1}{10}$의 서로 다른 실근의 개수이므로 $b_6 = 4$이다.

따라서 $a_{128} \times b_6 = 6 \times 4 = 24$이다.

여담:

b_n의 값 구하는 과정

여러분의 자립을 위해, 문제에서 쓰인 방정식 대신 다른
방정식으로 설명해보겠다!

x에 대한 방정식 $x^{2n} - ax^n + b = 0$의 서로 다른 실근의 개수를 b_n이라 하자.

1) n이 홀수일 경우

b_n의 값은 X에 대한 방정식 $X^2 - aX + b = 0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다. (단, $X = x^n$)

2) n이 짝수일 경우

$X = x^n$이라 하자.

X에 대한 방정식 $X^2 - aX + b = 0$의 서로 다른 실근이 2개 존재하고, 이 실근이 모두 양수라면 b_n의 값은 4이다.

X에 대한 방정식 $X^2 - aX + b = 0$의 서로 다른 실근이 2개 존재하고, 두 실근 중 하나는 양수, 하나는 0이라면 b_n의 값은 3이다.

X에 대한 방정식 $X^2 - aX + b = 0$의 서로 다른 실근이 2개 존재하고, 두 실근 중 하나는 양수, 하나는 음수라면 b_n의 값은 2이다.

X에 대한 방정식 $X^2 - aX + b = 0$의 서로 다른 실근이 2개 존재하고, 두 실근 중 하나는 0, 하나는 음수라면 b_n의 값은 1이다.

X에 대한 방정식 $X^2 - aX + b = 0$의 서로 다른 실근이 2개 존재하고, 두 실근이 모두 음수라면 b_n의 값은 0이다.

X에 대한 방정식 $X^2 - aX + b = 0$의 서로 다른 실근이 1개 존재하고, 그 실근이 양수라면 $b_n = 2$, 0이라면 $b_n = 1$, 음수라면

$b_n=0$이다.

X에 대한 방정식 $X^2-aX+b=0$의 실근이 존재하지 않는다면, $b_n=0$이다.

$X^2-aX+b=0$와 $X=x^n$의 그래프를 분리해서 생각해보면 편하다.

21.

정답: 66

해설:

step1

$\log_n 64=p$라 하자. (단, p는 자연수)

$n^p=2^6$이고 n과 p는 모두 자연수이므로, 가능한 (p, n)의 조합은 $(6, 2)$, $(3, 2^2)$, $(2, 2^3)$, $(1, 2^6)$이다.

step2

n의 값이 2, 2^2, 2^3, 2^6이라면 $\log_n 64$의 값이 자연수이므로 $k\log_{2n}2$의 값은 자연수이면 안 된다.

1) $n=2$인 경우

$k\log_{2n}2=\frac{k}{2}$이고, 이 값이 자연수이면 안 되므로 $k\neq(2$의 배수$)$이다.

2) $n=2^2$인 경우

$k\log_{2n}2=\frac{k}{3}$이고, 이 값이 자연수이면 안 되므로 $k\neq(3$의 배수$)$이다.

3) $n=2^3$인 경우

$k\log_{2n}2=\frac{k}{4}$이고, 이 값이 자연수이면 안 되므로 $k\neq(4$의 배수$)$이다.

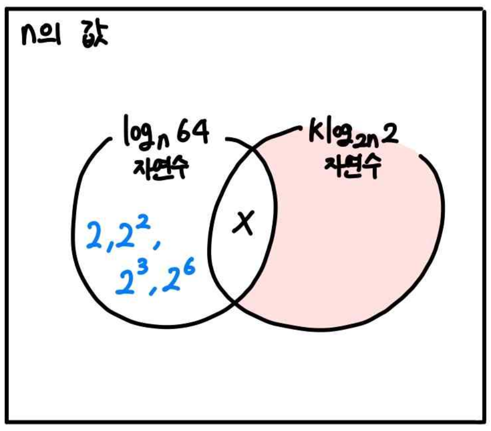
4) $n=2^6$인 경우

$k\log_{2n}2=\frac{k}{7}$이고, 이 값이 자연수이면 안 되므로 $k\neq(7$의 배수$)$이다.

따라서 $k\neq(2$의 배수$)$, $(3$의 배수$)$, $(4$의 배수$)$, $(7$의 배수$)$이고, 이를 만족시키는 20이하의 자연수 k는 1, 5, 11, 13, 17, 19이므로,

20 이하의 자연수 k의 값의 합은 $1+5+11+13+17+19=66$이다.

여담:



step2는 2, 2^2, 2^3, 2^6이 $k\log_{2n}2$가 자연수인 영역에 포함되지 않게 k를 조정해주는 과정이다.

22.

정답: 26

해설:

step1 (가) 조건 해석

$g(x)$가 $x=3$에서 좌우 극한값이 다르므로 $x=3$에서 불연속이고, $f'(3)=0$이다.

이때 모든 실수 x에 대해 $\{f(x)\}^2-2f(x)+2>0$이므로, ($\because$ 판별식)

모든 실수 x에 대해 $\{f(x)\}^2+2>2f(x)$이다.

따라서 $\lim_{x\to3-}g(x) < \lim_{x\to3+}g(x)$이므로,

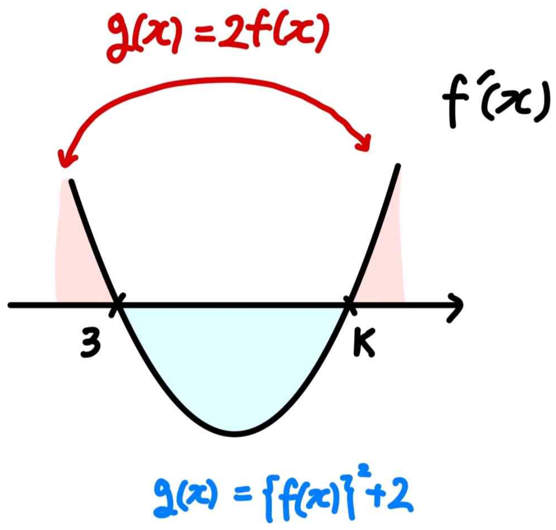
$x\to3-$일 때 $g(x)=2f(x)$이고 $f'(x)>0$이며,

$x\to3+$일 때 $g(x)=\{f(x)\}^2+2$이고 $f'(x)\le0$이다.

또한 $f'(x)=0$을 만족시키는 3이 아닌 x값을 k라 하자.

(단, $k>3$)

$f'(x)=6(x-3)(x-k)$, $g(x)=\begin{cases}\{f(x)\}^2+2 & (x\le3, x\ge k)\\ 2f(x) & (3<x<k)\end{cases}$이다.



step2 (나) 조건 해석

함수 $y=f(x)g(x)+\{g(x)\}^2$는 함수 $y=g(x)\{f(x)+g(x)\}$와 같다.

1) $x=3$인 경우

$\lim_{x\to3-}g(x)=2f(3)$, $\lim_{x\to3+}g(x)=\{f(3)\}^2+2$이다.

또한 $f(x)$는 다항함수이므로 $\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)$이다.

따라서

$\lim_{x\to 3-} g(x)\{f(x)+g(x)\}=2f(3)\times\{f(3)+2f(3)\}$

$\lim_{x\to 3+} g(x)\{f(x)+g(x)\}=[\{f(3)\}^2+2]\times[f(3)+\{f(3)\}^2+2]$이다.

이때 $y=g(x)\{f(x)+g(x)\}$는 연속함수이므로
$2f(3)\times\{f(3)+2f(3)\}=[\{f(3)\}^2+2]\times[f(3)+\{f(3)\}^2+2]$이고,
이를 만족시키는 $f(3)$의 값은 -1 또는 -2이다.

2) $x=k$일 경우

이 경우 역시 $x=k$에서 $g(x)$는 불연속이다.

($\because$ 모든 실수 x에 대해 $\{f(x)\}^2+2>2f(x)$)

$\lim_{x\to k-} g(x)=\{f(k)\}^2+2$, $\lim_{x\to k+} g(x)=2f(k)$이다.

또한 $f(x)$는 다항함수이므로 $\lim_{x\to k-} f(x)=\lim_{x\to k+} f(x)=f(k)$이다.

따라서

$\lim_{x\to k-} g(x)\{f(x)+g(x)\}=[\{f(k)\}^2+2]\times[f(k)+\{f(k)\}^2+2]$

$\lim_{x\to k+} g(x)\{f(x)+g(x)\}=2f(k)\times\{f(k)+2f(k)\}$이다.

이때 $y=g(x)\{f(x)+g(x)\}$는 연속함수이므로
$[\{f(k)\}^2+2]\times[f(k)+\{f(k)\}^2+2]=2f(k)\times\{f(k)+2f(k)\}$이고,
이를 만족시키는 $f(k)$의 값은 -1 또는 -2이다.

step3

$3<x<k$에서 $f'(x)<0$이므로, $f(3)>f(k)$이다.

따라서 $f(3)=-1$, $f(k)=-2$이고, $\int_3^k f'(x)dx=-1$이다.

이때 $f'(x)=6(x-3)(x-k)$이므로

$\int_3^k f'(x)dx=-\frac{6}{6}\times(k-3)^3=-1$이고, $k=4$이다.

그러므로 $f'(x)=6(x-3)(x-4)$이고, $f(3)=-1$이므로,

$f(x)=2(x-3)^2\left(x-\frac{9}{2}\right)-1$이다.

따라서 $f(6)=2\times 3^2\times\frac{3}{2}-1=26$이다.

여담:

모든 실수 x에 대해 $\{f(x)\}^2-2f(x)+2>0$이므로, $f'(x)=0$인 x에서 $g(x)$는 항상 불연속이다.

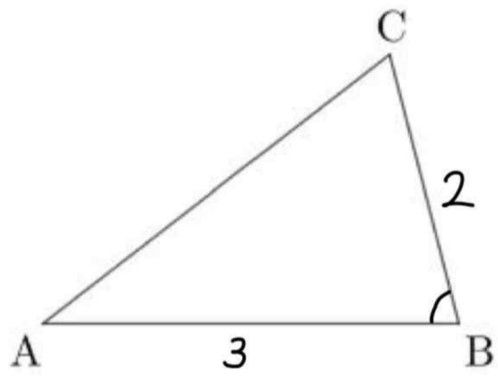
9회 정답

8	④	9	①	10	⑤	11	④	12	③
13	②	14	④	15	③	20	28	21	64
22	14								

8.

정답: ④

해설1: 코사인법칙을 사용하는 풀이



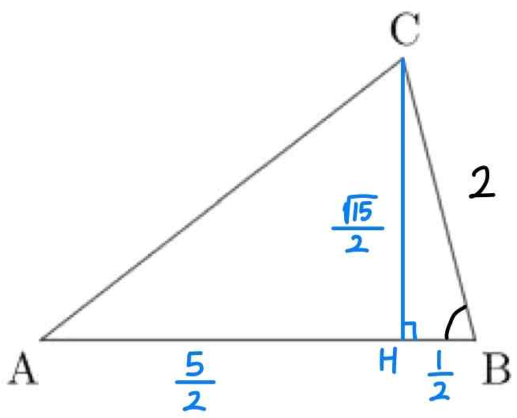
삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면,

$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2-2\times(\overline{AB})\times(\overline{BC})\times\cos B$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{4}=10$ 이므로

$\overline{AC}=\sqrt{10}$ 이다.

해설2: 피타고라스 정리를 사용하는 풀이



점 C에서 선분 AB에서 수선의 발을 내리고, 그 수선의 발을 점 H라 하자.

삼각형 BCH에서, $\cos B=\frac{1}{4}$이므로

$\overline{BH}=\overline{BC}\times\cos B=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$이다.

주어진 조건에 의해 선분 AB의 길이가 3이므로 선분 AH의 길이는 $\overline{AH}=\overline{AB}-\overline{BH}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이다.

또한 직각삼각형 BCH에서 피타고라스 정리를 사용하면,

$\overline{CH}=\sqrt{(\overline{BC})^2-(\overline{BH})^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$이고,

직각삼각형 ACH에서 피타고라스 정리를 사용하면,

$\overline{AC}=\sqrt{(\overline{AH})^2+(\overline{HC})^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\sqrt{10}$이다.

여담:

수능 수학에서는 코사인 법칙을 사용하는 게 의도된 풀이였겠지만, 피타고라스 정리 두 번 쓰는 것도 꽤 간단한 풀이이다. 취향대로 골라 풀기!

9.

정답: ①

해설:

$f'(1)=0$ 이므로 이차함수 $f(x)$는 $x=1$에 대해 대칭이고, $f(0)=f(2)$이다.

만약 $f(0)=f(2)\neq 2$라면, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-x}{x-f(0)}=\frac{f(2)-2}{2-f(0)}=-1\neq 1$이기 때문에 $f(0)=f(2)=2$이다.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-x}{x-f(0)}$의 분모와 분자를 각각 $(x-2)$로 나누면,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{f(x)-x}{x-2}}{\frac{x-f(0)}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{f(x)-x}{x-2}}{\frac{x-2}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(x)-(x-2)}{x-2}$$

$=f'(2)-1=1$ 이므로, $f'(2)=2$이다.

따라서 $f'(1)=0,\ f(0)=f(2)=2$이므로

$f(x)=a(x-1)^2+2-a$라 하면, (단, $a\neq 0$)

$f'(2)=2a=2$이므로 $a=1$이고,

$f(x)=(x-1)^2+1$이다.

그러므로 $f(3)=(3-1)^2+1=4+1=5$이다.

여담:

$f(x)$가 $x=1$기준 대칭이므로 $f(0)=f(2)$라는 점, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-x}{x-f(0)}$의 극한값이 -1이 아니라는 점에 주목하기.

10.

정답: ⑤

해설:

1) n이 짝수일 경우

729의 n제곱근 중 음수가 항상 존재하므로 (나) 조건을 항상 만족시킨다.

따라서 이 경우 가능한 30 이하의 자연수 n의 개수는 15개이다.

2) n이 홀수일 경우

729의 n제곱근은 항상 양수이므로, (나) 조건을 만족시키려면 $729^{\frac{1}{n}} < 3^{\frac{1}{2}}$를 만족시켜야 한다.

이때 $729^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{6}{n}}$이므로 $\frac{6}{n} < \frac{1}{2}$, 즉 $n > 12$여야 한다.

따라서 $12 < n \le 30$인 홀수 n의 개수는 9이므로, 이 경우 가능한 30 이하의 자연수 n의 개수는 9개이다.

그러므로 30 이하의 가능한 모든 자연수 n의 개수는 $15+9=24$이다.

여담:

n이 홀수일 때, 짝수일 때 나눠서 식 세우기.

짝수일 때는 무조건 (나) 조건을 만족하지만, 홀수일 때는 (나) 조건을 만족시키도록 n의 값을 조정해주어야 한다.

11.

정답: ④

해설:

step1

점 P의 위치함수를 $x_1(t)$, 점 Q의 위치함수를 $x_2(t)$라 하자.

$v_1(t) = 3t^2 + a$이고, $x_1(0) = 10$이므로 $x_1(t) = t^3 + at + 10$이다.

$v_2(t) = 4t$이고, $x_2(0) = 2$이므로 $x_2(t) = 2t^2 + 2$이다.

step2

점 P, Q가 만나는 시각을 $t = t_1$이라 하면,

두 점이 만나는 순간 두 점의 위치는 동일하므로
$x_1(t_1) = x_2(t_1)$이고,

따라서 $(t_1)^3 + at_1 + 10 = 2(t_1)^2 + 2$이다. ……ㄱ

또한 두 점이 만나는 순간 주어진 조건에 의해 두 점의 속도가 같으므로 $v_1(t_1) = v_2(t_1)$이고,

따라서 $3(t_1)^2 + a = 4t_1$이다. ……ㄴ

ㄴ에 의해 $a = -3(t_1)^2 + 4t_1$이고, 이를 ㄱ에 대입하면
$(t_1)^3 + t_1 \times \{-3(t_1)^2 + 4t_1\} + 10 = 2(t_1)^2 + 2$ 이므로

양수 t_1의 값은 $t_1 = 2$이고, $a = -3\times 2^2 + 4\times 2 = -4$이다.

step3

시각 $t = 3$에서 점 P의 위치는,

$x_1(3) = 3^3 - 4\times 3 + 10 = 25$이다.

여담:

주어진 $t = 0$에서의 위치와 속도함수를 통해 위치함수를 구할 수 있고, 이를 통해 적절히 연립하는 문제.

굳이 복잡하게 생각할 부분은 없는 듯하다.

12.

정답: ③

해설:

step1 각변환

$\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\pi x\right)=\sin^2\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\left(\pi x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$

이므로

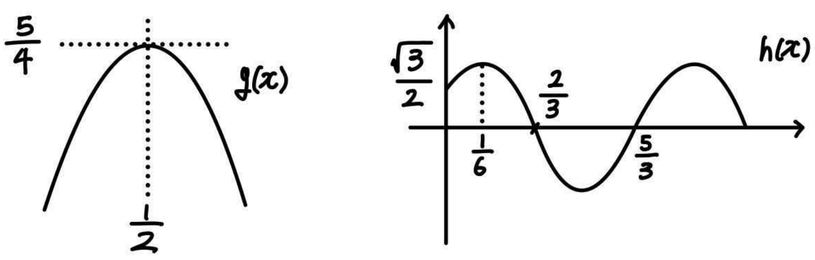
$f(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\pi x\right)+\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$

$\quad=-\sin^2\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ 이다.

step2

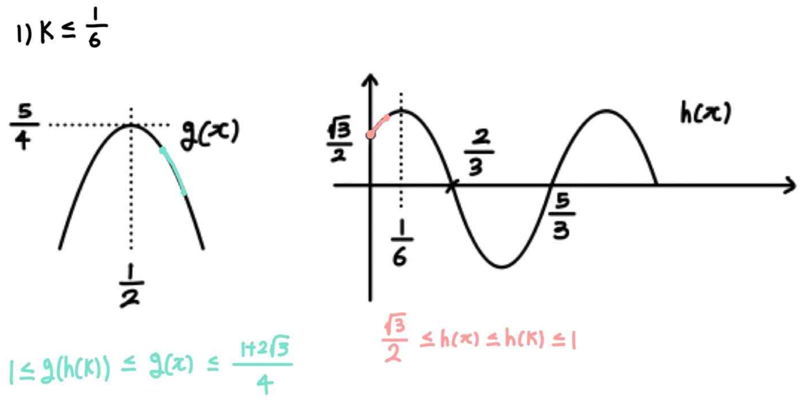
$g(x)=-x^2+x+1,\ h(x)=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$ 이라 하면,

$f(x)=g(h(x))$ 이다.



이때 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$이다.

1) $k\le\frac{1}{6}$일 경우



만약 $k\le\frac{1}{6}$이라면 구간 $[0,k]$에서 $h(0)\le h(x)\le h(k)\le h\left(\frac{1}{6}\right)$

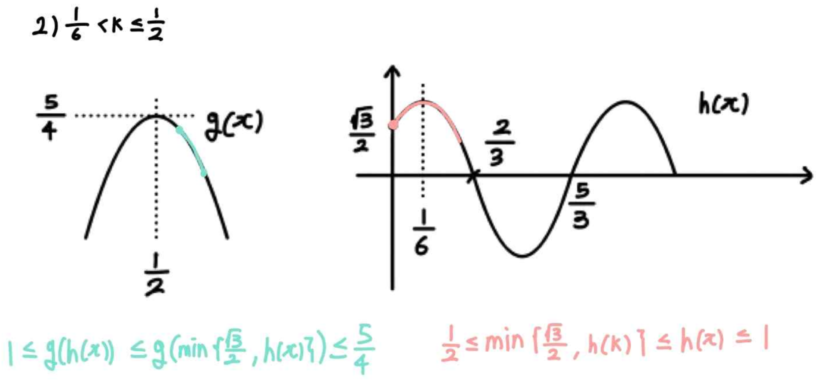
이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}\le h(x)\le h(k)\le 1$이다.

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1+2\sqrt{3}}{4}$이고,

최솟값은 $g(h(k))\ge 1$이다.

그러므로 (최댓값)+(최솟값)$\ge\frac{5+2\sqrt{3}}{4}>\frac{3}{2}$ 이므로 최댓값과 최솟값의 합이 $\frac{3}{2}$가 될 수 없기 때문에, $k>\frac{1}{6}$이다.

2) $\frac{1}{6}<k\le\frac{1}{2}$일 경우



만약 $\frac{1}{6}<k\le\frac{1}{2}$라면 구간 $[0,k]$에서 $h(x)\le h\left(\frac{1}{6}\right)$이므로 $h(x)\le 1$이다.

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $g(1)=1$이고,

(최솟값)+(최댓값)$=\frac{3}{2}$ 이므로 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

이 경우 구간 $[0,k]$에서 (최댓값)<(최솟값) 이므로 모순이다.

따라서 $k>\frac{1}{2}$이다.

3) $k>\frac{1}{2}$

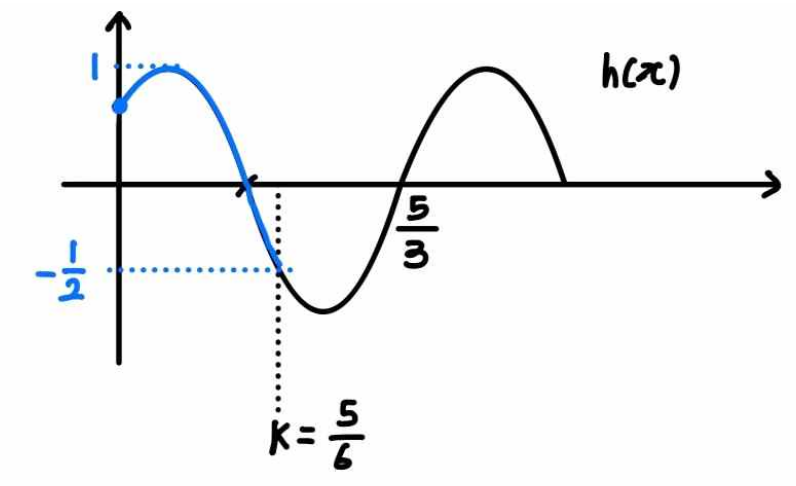
만약 $k>\frac{1}{2}$라면 구간 $[0,k]$에서 $f(x)$의 최댓값은 항상 $g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$이다.

이때 구간 $[0,k]$에서 최댓값과 최솟값의 합이 $\frac{3}{2}$이므로, 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

$g(x)=\frac{1}{4}$의 근은 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$이므로, $h(k)=-\frac{1}{2}$이고,

구간 $[0,k]$에서 $h(k)\ge-\frac{1}{2}$여야 한다.

따라서 $k=\frac{5}{6}$이다.



여담:

$f(x)$를 합성된 두 함수로 해석하면 이해하기 편하다.

다만 겉함수의 정의역과 속함수의 정의역 구분 조심하기!

13.

정답: ②

해설:

step1 수열 관찰하기

한 번 $|a_n| \geq 10$ 이면 n이 증가함에 따라 이후 $|a_n|$의 값이 유지된다.

이때 $a_3 \neq a_7$이므로 $|a_3| < 10$이다.

step2 a_3 구하기

$a_3 = k$라 하자. (단, $|k| < 10$)

$a_4 = a_3 + 3 = k+3$ 이다.

만약 $|a_4| = |k+3| \geq 10$ 이라면 $a_7 = -(k+3)$ 이다.

이 경우 $a_3 - a_7 = k-(-k-3) = 13$이기 때문에 $k=5$이고,
$|k+3| \geq 10$ 을 만족시키지 않으므로 $|k+3| < 10$, $a_5 = k+6$이다.

만약 $|a_5| = |k+6| \geq 10$ 이라면 $a_7 = k+6$ 이므로
$a_3 - a_7 = -6$이고, $a_3 - a_7 = 13$라는 조건을 만족시키지 않으므로
$|k+6| < 10$, $a_6 = k+9$이다.

만약 $|a_6| = |k+9| < 10$ 이라면 $a_7 = k+12$이므로
$a_3 - a_7 = -12$이고, $a_3 - a_7 = 13$라는 조건을 만족시키지 않으므로
$|k+9| \geq 10$, $a_7 = -(k+9)$이다.

따라서 $a_3 - a_7 = k-(-k-9) = 13$이므로 $k=2$이다.

step3

$a_6 = k+9 = 11$이고,

$a_3 = 2$이므로 $a_2 = a_3 - 3 = -1$, $a_1 = a_2 - 3 = -4$이다.

따라서 $a_1 + a_6 = -4 + 11 = 7$이다.

여담:

한 번 $|a_n| \geq 10$ 이면 이후 $|a_n|$의 값이 유지된다는 점에
주목하며, 범위 조심하며 케이스분류하기.

14.

정답: ④

해설:

step1

조건 (가)와 (나)를 통해 $g(x)$는 $x=2$에서 극소이자 최소라는 점을 알 수 있다.

주어진 등식 $g(x)=\int_0^x |f(t)|dt-\int_2^x f(t)dt$ 를 x에 대해 미분하면,

$$g'(x)=|f(x)|-f(x)=\begin{cases} 0 & (f(x)\ge 0) \\ -2f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$ 이므로,

x값이 증가함에 따라 $g(x)$는 함숫값이 유지되거나, 증가할 수밖에 없다. (감소할 수 없다.)

이때 $g(x)$는 $x=2$에서 극소이자 최소이고, $x<2$에서 $g(x)\ge g(2)$이므로 $x<2$에서 $g(x)$의 함숫값은 $g(2)$로 유지되어야 하며,

$x\ge 2$에서 $g(x)>g(2)$이므로 $x\ge 2$에서 $g(x)$의 함숫값은 증가하거나 유지되어야 한다.

$$g(x):\begin{cases} \text{유지} & (x<2) \\ \text{유지 or 증가} & (x>2) \end{cases}$$

step2

ㄱ.

$x<2$에서 $g(x)$의 함숫값은 유지되어야 하므로, $x<2$에서 $g'(x)=0$이고, $f(x)\ge 0$이다.

따라서 $x\to-\infty$일 때 $f(x)\ge 0$이므로 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.

그러므로 ㄱ은 거짓이다.

ㄴ.

$g(x)$는 $x=2$에서 극소이자 최소이고, 조건 (나)에 등호가 없으므로 $x\to2+$에서 $g(x)$는 증가해야한다.

따라서 $x\to2+$에서 $f(x)<0$이고, $x<2$에서 $f(x)\ge 0$이므로 $f(2)=0$, $f'(2)\ne 0$이다.

또한 (가) 조건에 의해 $x<2$에서 $g'(x)=0$이어야 하므로, $x<2$에서 $f(x)\ge 0$이고, 따라서 $f(-1)=0$일 때 $x=-1$ 주위에서 부호변화가 없어야 하므로 $f'(-1)=0$이다.

따라서 $f(x)=p(x-2)(x+1)^2$이라 한다면, (단, $p<0$)

$f'(1)=p\times(1+1)^2+p\times(-1)\times2\times(1+1)=0$이므로
$f'(1)=0$이다.

그러므로 ㄴ은 참이다.

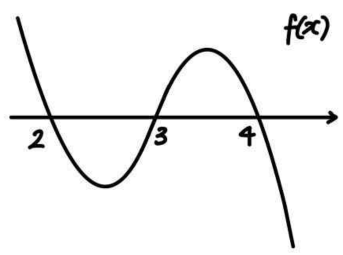
ㄷ.

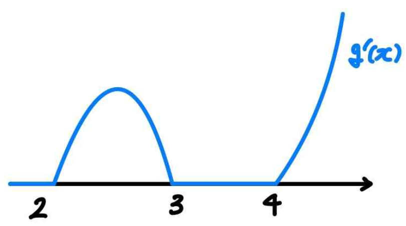
(가), (나) 조건을 모두 만족시키려면, $x\to2+$에서 $g(x)$는 증가해야하므로 $f(x)<0$이고, $x<2$에서 $g(x)$는 유지되어야 하므로 $f(x)\ge 0$이다. 따라서 $f(2)=0$, $f'(2)\ne 0$이다.

ㄷ에서 주어진 조건에 의해 $2<x<3$에서 $g(x)\ne g(3)$이므로 $x\to3-$일 때 $f(x)<0$이어야 한다. 또한 $3\le x\le 4$에서 $g(x)$의 값은 유지되므로 $3\le x\le 4$에서 $f(x)\ge 0$이다. 따라서 $f(3)=0$, $f'(3)\ne 0$이다.

$3\le x\le 4$에서 $g(x)$의 값은 유지되므로 $3\le x\le 4$에서 $f(x)\ge 0$이다. 또한 $x>4$에서 $g(x)$의 값이 바뀌어야 하므로, $x\to4+$일 때 $f(x)<0$이어야 한다. 따라서 $f(4)=0$, $f'(4)\ne 0$이다.

그러므로 $f(x)$와 $g'(x)$의 개형은 다음과 같다.





따라서 $f(x)=p(x-2)(x-3)(x-4)$라 한다면, (단, $p<0$)

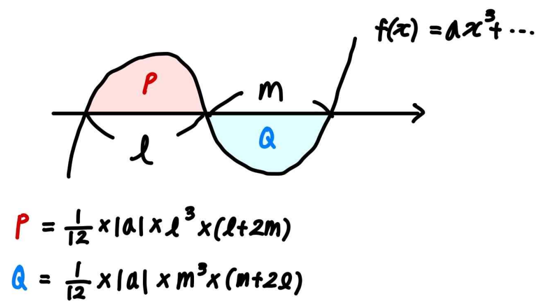
$g(3)=g(2)+1$이므로
$\int_2^3 g'(x)dx=\int_2^3 -2p(x-2)(x-3)(x-4)dx=-\frac{2p}{4}=1$이므로
$p=-2$이다.

따라서 $f(x)=-2(x-2)(x-3)(x-4)$이고,

$g(1)=g(2)-\int_1^2 g'(x)dx=g(2)=\int_0^2 |f(t)|dt=32$이다.

그러므로 ㄷ은 참이다.

여담:



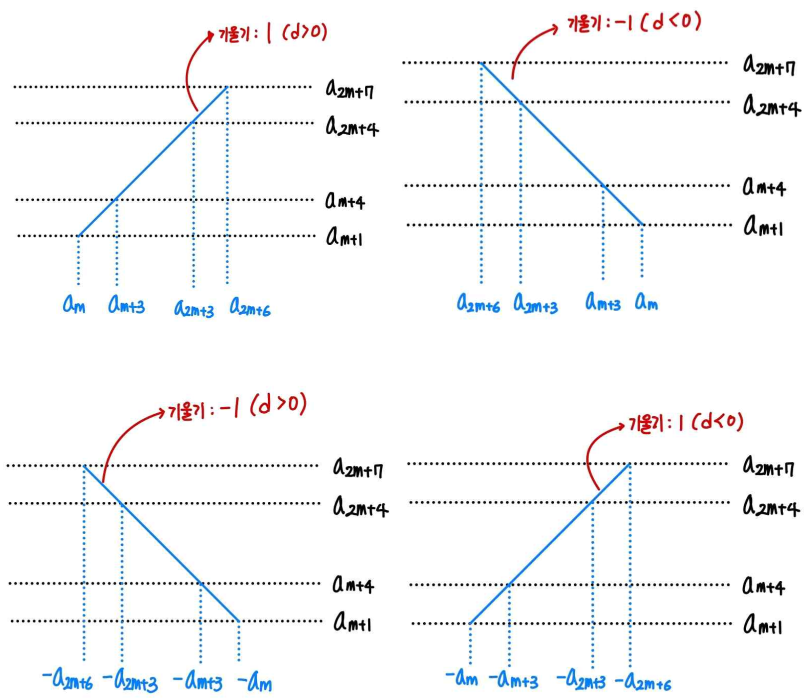
15.

정답: ③

해설:

step1

만약 a_m, a_{m+3}, a_{2m+3}의 부호가 같거나, a_{m+3}, a_{2m+3}, a_{2m+6}의 부호가 같다면, 이 세 점이 한 직선 위에 있게 된다.
($m<m+3<2m+3<2m+6$이므로 부호가 음수-양수-음수거나 양수-음수-양수인 경우는 불가능하다.)



(그림 참고: 세 점의 부호가 동일할 경우 한 직선 위에 있게 된다.)

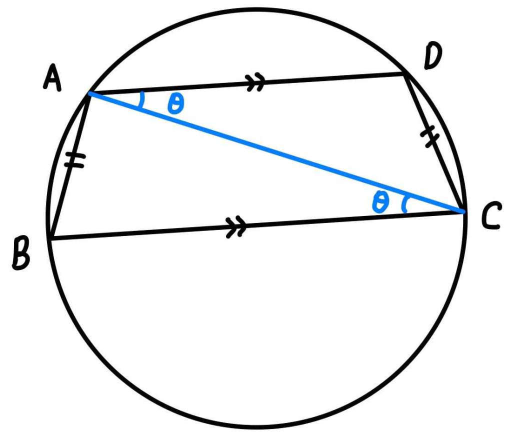
따라서 a_m과 a_{m+3}의 부호는 동일하며, a_{2m+3}과 a_{2m+6}의 부호는 동일하고, a_m과 a_{m+3}의 부호와 a_{2m+3}과 a_{2m+6}의 부호는 달라야 한다.

step2

m의 값과 상관없이,
$\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+3}}=\overline{\mathrm{A}_{2m+3}\mathrm{A}_{2m+6}}=\sqrt{|3d|^2+|3d|^2}=3\sqrt{2}d$이다.

원에 내접하는 사각형이 마주보는 두 변의 길이가 같다면 등변사다리꼴이기 때문에 $\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{2m+6}}//\overline{\mathrm{A}_{m+3}\mathrm{A}_{2m+3}}$이다.

(그림 참고-원에 내접하는 사각형이 마주보는 두 변의 길이가 같다면 등변사다리꼴인 이유



선분 AB와 선분 CD의 길이가 같으므로, $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{DAC}$이다.

이때 $\angle\mathrm{ACB}$와 $\angle\mathrm{DAC}$는 엇각이고, 엇각의 크기가 같으므로 선분 AD와 선분 BC는 평행하다.)

1) $\dfrac{a_{2m+7}-a_{m+1}}{|a_{2m+6}|-|a_m|}=\dfrac{a_{2m+4}-a_{m+4}}{|a_{2m+3}|-|a_{m+3}|}$인 경우

(단, $|a_{2m+6}|\neq|a_m|$, $|a_{2m+3}|\neq|a_{m+3}|$)

이때 a_{2m+6}과 a_{2m+3}의 부호가 같고, a_m의 부호와 a_{m+3}의 부호가 같으며, a_{2m+3}과 a_{2m+6}의 부호는 a_m과 a_{m+3}의 부호와 다르므로 위 등식은
$(m+6)d\times(a_{2m+3}+a_{m+3})=md\times(a_{2m+6}+a_m)$과 같다.

또한 $|a_{2m+6}|\neq|a_m|$, $|a_{2m+3}|\neq|a_{m+3}|$이고,
$a_{2m+3}+a_{m+3}=a_{2m+6}+a_m$이므로 위 등식이 성립하려면 $m+6=m$이어야 하는데, 이는 불가능하다.

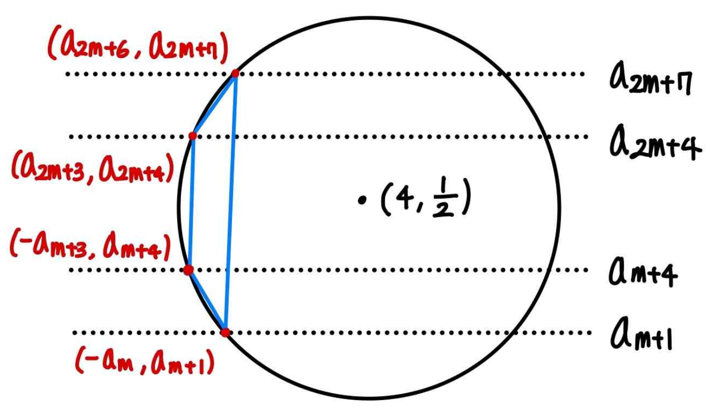
2) $|a_{2m+6}|=|a_m|$, $|a_{2m+3}|=|a_{m+3}|$인 경우

$a_{2m+6}+a_m=0$, $a_{2m+3}+a_{m+3}=0$ 이다.

또한 원의 중심의 y좌표를 통해, $a_{m+4}+a_{2m+4}=1$임을 알 수 있다.

따라서 $d=\dfrac{1}{2}$이고, $a_n=\dfrac{1}{2}\left(n-\dfrac{3}{2}m-3\right)$이다.

step3



원의 중심으로부터 $(-a_{m+3}, a_{m+4})$, $(-a_m, a_{m+1})$ 까지의 거리는

같기 때문에,

$$\sqrt{(4+a_{m+3})^2+\left(\frac{1}{2}-a_{m+4}\right)^2}=\sqrt{(4+a_m)^2+\left(\frac{1}{2}-a_{m+1}\right)^2}$$ 이다.

정리하면 $3d(7+a_m+a_{m+1}+a_{m+3}+a_{m+4})=0$이고,

$a_n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{3}{2}m-3\right)$이므로 $m=5$이다.

따라서 $a_n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{21}{2}\right)$이고,

$a_{18}=\frac{1}{2}\times\left(18-\frac{3}{2}\times5-3\right)=\frac{15}{4}$이므로, $\frac{a_{15}}{m}=\frac{3}{4}$이다.

여담:

사각형 $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+3}\mathrm{A}_{2m+3}\mathrm{A}_{2m+6}$가 등변사다리꼴을 파악하고 나서, 그냥 기울기가 똑같다로 해석하면 틀릴 수도 있다.

기울기를 구할 수 없는 경우, 즉 두 점의 x좌표가 동일한 경우도 꼭 포함해줘야 한다.

20.

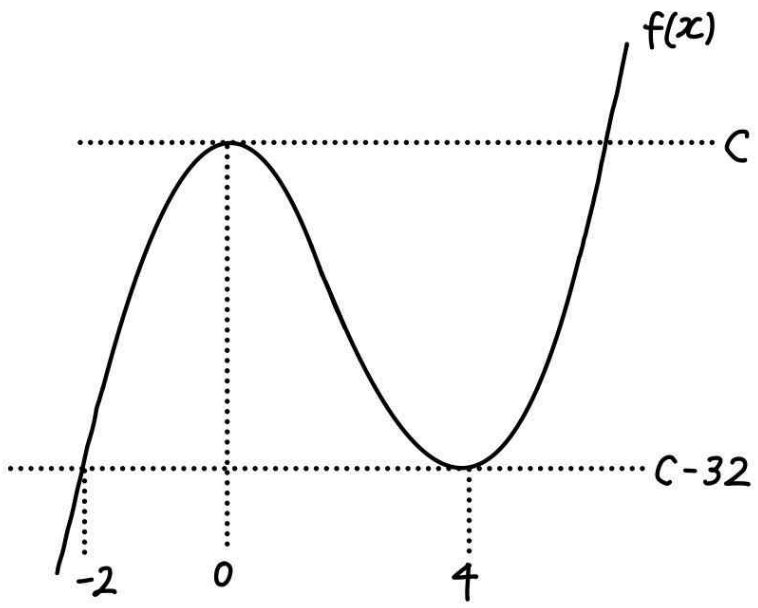
정답: 28

해설:

$f(x)=t$ 또는 $f(x)=\frac{t+2}{3}$을 만족시키는 x의 개수가 $g(t)$이다.

$f'(x)=3x^2-12x$이므로 $f(x)=x^3-6x^2+c$이다. (단, c는 상수)

이때 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=c$이고, $f(x)$의 극솟값은 $f(4)=c-32$이다.

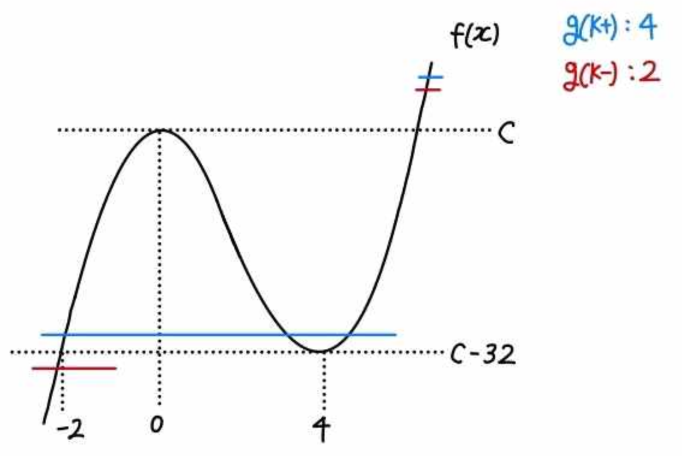


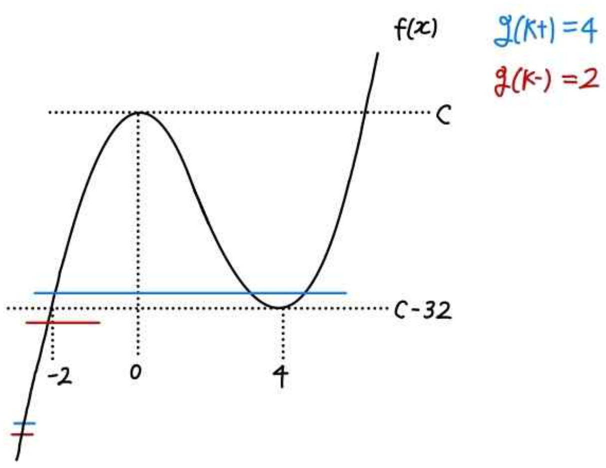
$g(t)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이 가능하다.

$\lim_{t\to k+}g(t)-\lim_{t\to k-}g(t)=4$를 만족시키려면 $\lim_{t\to k-}g(t)=1$ 또는 $\lim_{t\to k-}g(t)=2$여야 한다.

이를 만족시키려면 $f(x)$와 $t\to k-$일 때 $y=t$와의 교점이 1개, $f(x)$와 $t\to k-$일 때 $y=\frac{t+2}{3}$과의 교점이 1개인 경우거나, $k=\frac{k+2}{3}$인 경우 가능하다.

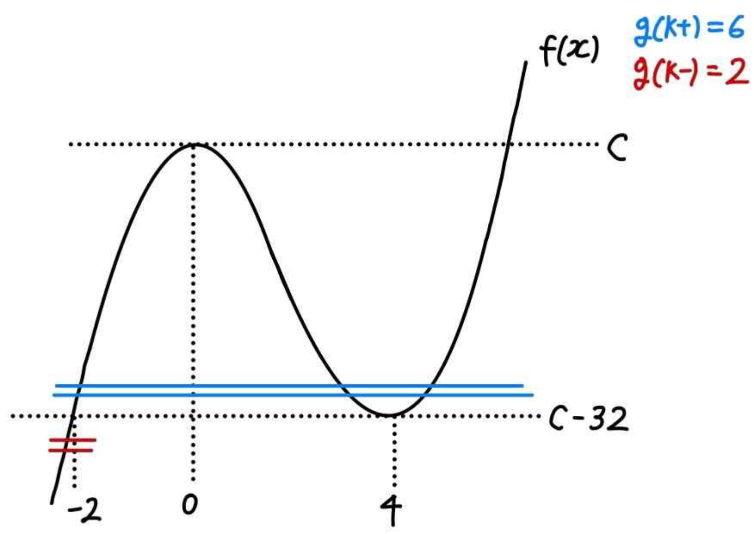
이때 $f(x)$와 $t\to k-$일 때 $y=t$와의 교점이 1개, $f(x)$와 $t\to k-$일 때 $y=\frac{t+2}{3}$과의 교점이 1개인 경우, $\lim_{t\to k+}g(t)>\lim_{t\to k-}g(t)$을 만족시키려면 $k=c-32$ 또는 $\frac{k+2}{3}=c-32$여야 하는데, 이 경우 $\lim_{t\to k+}g(t)-\lim_{t\to k-}g(t)=(1+3)-(1+1)=2$이므로 조건을 만족하지 않는다.



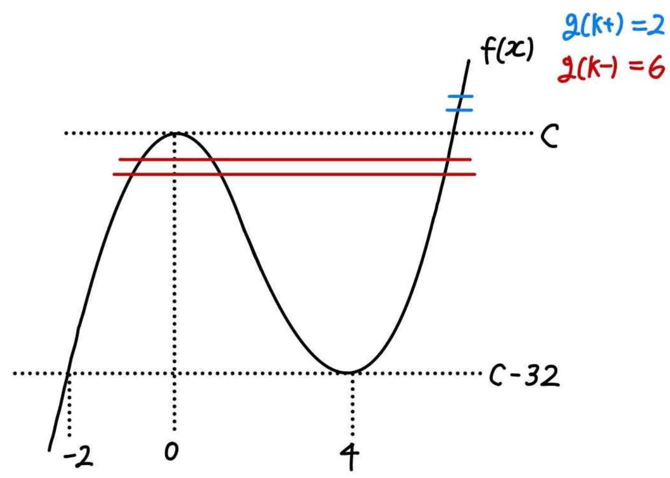


따라서 $k=\dfrac{k+2}{3}$이어야 하므로 $k=1$이다.

또한 $\lim\limits_{t\to k+}g(t)>\lim\limits_{t\to k-}g(t)$ 이므로 $k=\dfrac{k+2}{3}=c-32$여야 한다.



(만약 $k=\dfrac{k+2}{3}=c$이면 $\lim\limits_{t\to k+}g(t)<\lim\limits_{t\to k-}g(t)$이다.)



따라서 $c=33$이므로 $f(x)=x^3-6x^2+33$이고, $f(1)=28$이다.

($\lim\limits_{t\to k+}g(t)=3+3=6$, $\lim\limits_{t\to k-}g(t)=1+1=2$ 이다.)

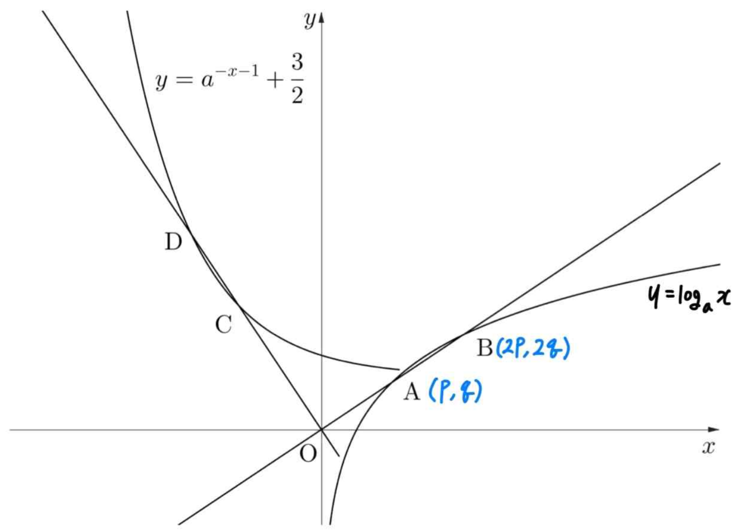
여담:

$k=\dfrac{k+2}{3}$이더라도 $t\to k+$이거나 $t\to k-$일 때 $f(x)=t$와 $f(x)=\dfrac{t+2}{3}$의 교점은 다르다는 점 파악하기.

21.

정답: 64

해설:



점 A는 선분 $\overline{\mathrm{OB}}$의 중점이므로, $\mathrm{A}(p,q)$, $\mathrm{B}(2p,2q)$라 하면,

점 A와 B는 $y=\log_a x$ 위의 두 점이므로 $a^q=p$, $a^{2q}=2p$이므로 $a^q=p=2$이고, 점 A와 B의 x좌표 차이가 2이다.

$y=\log_a x$를 90° 회전시킨 $y=a^{-x}$와, 직선 OB를 90° 회전시킨 직선 OD와의 두 교점 사이의 y좌표 차이는 2일 것인데,

(선분 AB의 x좌표 차이가 2이므로 90° 회전시킨 선분의 y좌표 차이는 2이다.)

$y=a^{-x-1}+\frac{3}{2}$와 직선 OD와의 두 교점 사이의 y좌표 차이도 2이기 때문에, $y=a^{-x}$를 $y=a^{-x-1}+\frac{3}{2}$로 평행이동 시킨 시행을 직선 OD에 대해 적용하면, 여전히 직선 OD가 나온다는 점을 알 수 있다.

따라서 직선 OD의 기울기인 $-\frac{p}{q}$는 $-\frac{q}{p}=-\frac{3}{2}$라는 것을 알 수 있다.

앞에서 $a^q=p=2$임을 구했으므로, $q=\frac{4}{3}$이고, $a^{\frac{4}{3}}=2$이다.

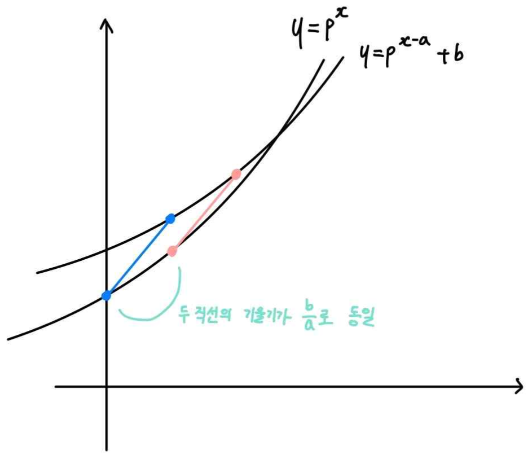
그러므로 $a^8=\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^6=2^6=64$이다.

여담:

지수 또는 로그함수 $f(x)$와 직선 l의 교점이 두 개이고, 교점의 x좌표 차이가 p, y좌표 차이가 q일 때, 평행이동된 지수 또는 로그함수 $f(x-a)+b$와 직선 l의 교점이 두 개이고, 교점의 x좌표 차이가 p이거나, y좌표 차이가 q라면, 직선 l의 기울기는 $\frac{b}{a}$이다.

아래 지수로그함수의 성질과 같은 의미이다.

지수로그함수를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 이동시킨 후, 이동되기 전의 점과 이동된 이후의 점을 이어보면 항상 기울기가 $\frac{b}{a}$ 이다.



(단, 평행이동 관계에 있는 두 점이 아니라 다른 점을 이은 경우 기울기가 $\frac{b}{a}$가 아니다.)

22.

정답: 14

해설:

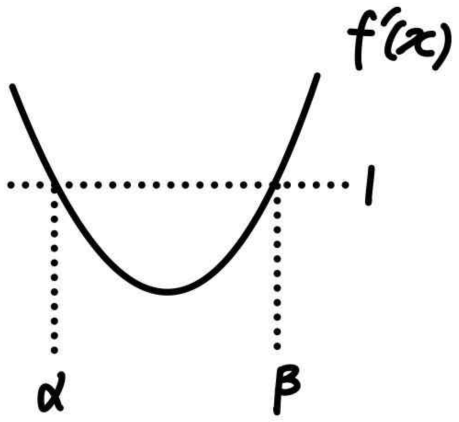
step1

$4 \le t \le 5$라는 구간에 주목하자.

1) $f(x)$의 최고차항 계수가 양수인 경우

모든 실수 x에 대해 $f'(x) \ge 1$인 경우 $f'(x)$의 최댓값이 1이 되는 것은 불가능하다.

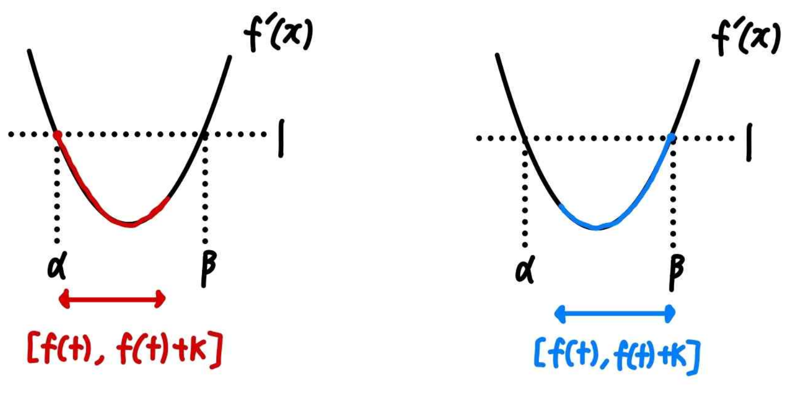
$f'(x)=1$을 만족시키는 서로 다른 두 실수를 α, β라 하자. (단, $\alpha < \beta$)



만약 $\beta-\alpha<k$라면 $f'(x)$의 최댓값이 1인 상황은 불가능하므로, $\beta-\alpha \ge k$이다.

이 경우 구간 $[f(t), f(t)+k]$에서 함수 $f'(x)$의 최댓값이 1이도록 하는 $f(t)$의 범위는 $f(t)=\alpha$, $f(t)=\beta-k$이다.

이때 $f(t)=\alpha$, $f(t)=\beta-k$를 만족하는 실수 t의 범위는 구간으로 나오지 않으므로, 조건을 만족시키지 않는다.

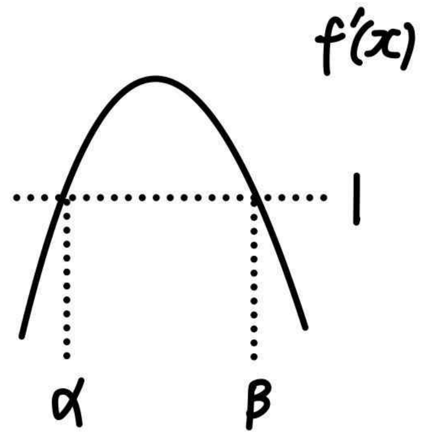


따라서 $f(x)$의 최고차항 계수는 음수이다.

2) $f(x)$의 최고차항 계수가 음수인 경우

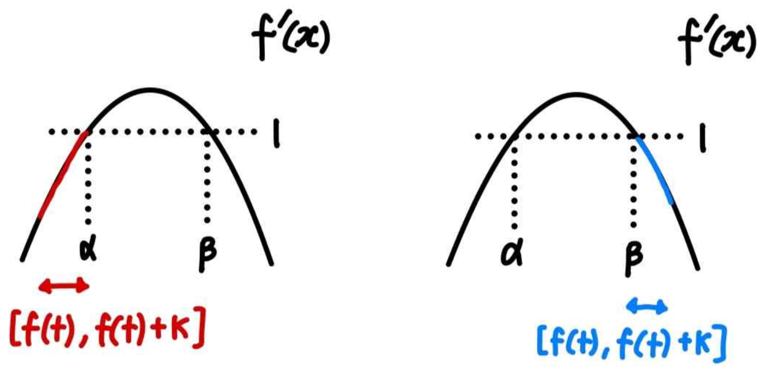
만약 $f'(x)$의 최댓값이 1이 아니라고 가정해보자.

$f'(x)=1$을 만족시키는 서로 다른 두 실수를 α, β라 하자. (단, $\alpha < \beta$)



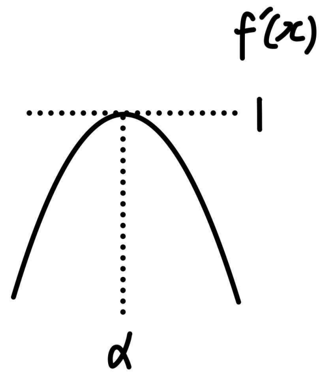
이 경우 구간 $[f(t), f(t)+k]$에서 함수 $f'(x)$의 최댓값이 1이도록 하는 $f(t)$의 범위는 $f(t)=\alpha-k$, $f(t)=\beta$이다.

이때 $f(t)=\alpha-k$, $f(t)=\beta$를 만족하는 실수 t의 범위는 구간으로 나오지 않으므로, 조건을 만족시키지 않는다.



따라서 $f'(x)$의 최댓값은 1이다.

step2

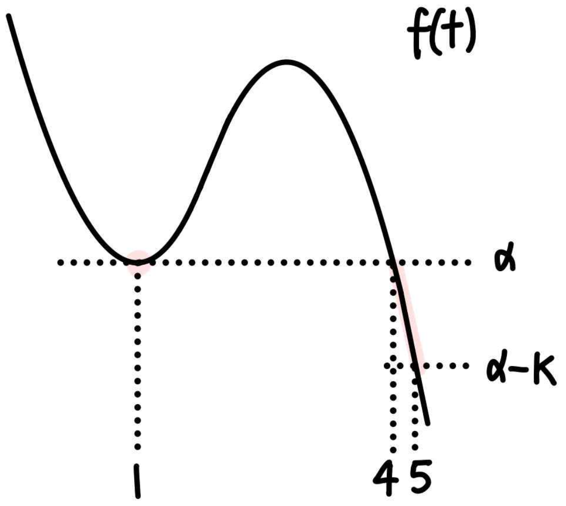


$f'(x)=1$을 만족시키는 실수 x의 값을 α라 하자.

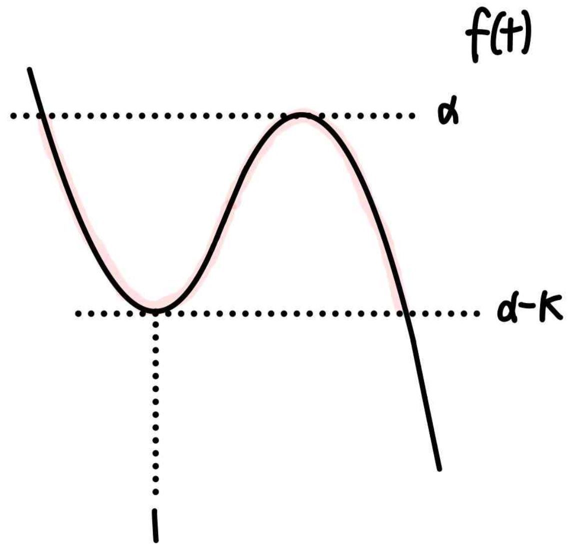
이 경우 구간 $[f(t), f(t)+k]$에서 함수 $f'(x)$의 최댓값이 1이도록 하는 $f(t)$의 범위는 $\alpha-k \le f(t) \le \alpha$이다.

즉, $\alpha-k \le f(t) \le \alpha$를 만족하는 t의 범위가 $t=1$ 또는 $4 \le t \le 5$인 것이다.

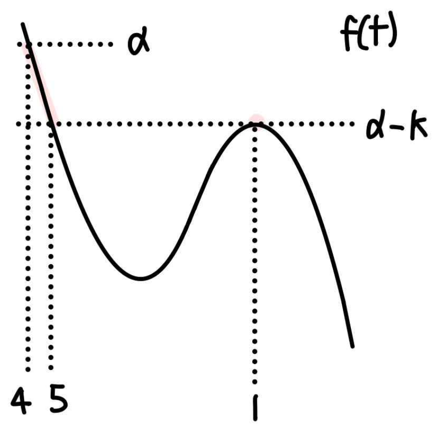
이때 $t=1$에서 $\alpha-k \le f(t) \le \alpha$를 만족하고, $x \to 1+$일 때와 $x \to 1-$일 때는 $\alpha-k \le f(t) \le \alpha$를 만족하지 않으므로, $f(t)$는 $t=1$에서 α라는 극솟값을 가짐을 알 수 있다.



만약 $f(t)$의 극솟값이 $\alpha-k$라면, $x\to1-$일 때와 $x\to1+$일 때도 $\alpha-k\le f(t)\le\alpha$를 만족한다.



$f(t)$의 극댓값이 $\alpha-k$라면, 5보다 1이 더 커야 하므로 불가능하다.



따라서 $f(x)=p(x-1)^2(x-4)+\alpha$라 하자. (단, $p<0$)

$f'(x)=3p(x-1)(x-3)$이고, 이때 $f'(x)$는 $x=\alpha$에 대해 대칭이므로 $\alpha=2$이다.

또한 $f'(x)$의 최댓값이 1이므로, $f'(2)=3p\times1\times(-1)=1$이고, 따라서 $p=-\frac{1}{3}$이다.

그러므로 $f(x)=-\frac{1}{3}(x-1)^2(x-4)+2$이다.

step3

$f(5)=-\frac{1}{3}\times4^2\times1+2=2-k$이므로 $k=\frac{16}{3}$이고,

$f(-1)=-\frac{1}{3}\times(-2)^2\times(-5)+2=\frac{26}{3}$이므로

$k+f(-1)=\frac{16}{3}+\frac{26}{3}=14$이다.

여담:

$4\le t\le5$가 구간으로 나온다는 점에 주목해 $f(x)$의 최고차항 계수의 부호를 찾아내고, $t=1$이라는 불연속적인 점이 $\alpha-k\le f(t)\le\alpha$을 만족시킨다는 점을 이용해 $t=1$에서 극솟값을 가지며, 그 극솟값이 α라는 점 파악하기.

10회 정답

8	③	9	③	10	①	11	③	12	③
13	②	14	⑤	15	③	20	19	21	130
22	44								

8.

정답: ③

해설:

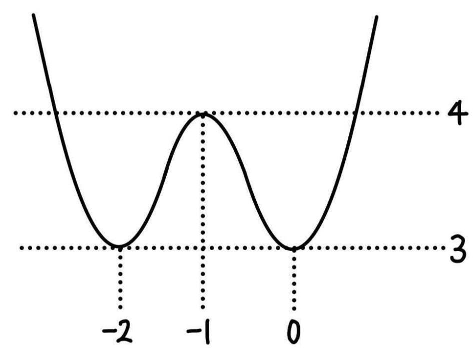
$y=x^4+5x^3+4x^2+3$와 $y=x^3+k$가 서로 다른 세 점에서 만나는 상황은,

$y=x^4+4x^3+4x^2+3$와 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나는 상황과 같다.

$y=x^4+4x^3+4x^2+3=x^2(x+2)^2+3$이므로,

$y=x^4+4x^3+4x^2+3$의 극댓값은 $f(-1)=4$이고,

$y=x^4+4x^3+4x^2+3$의 그래프는 아래와 같다.



따라서 $y=x^4+4x^3+4x^2+3$와 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 k의 값은 $k=4$이다.

여담:

$y=x^4+4x^3+4x^2+3$를 굳이 미분하지 말고, $y=x^2(x+2)^2+3$로 변형하는게 좀 더 그래프 그리기 수월하다.

9.

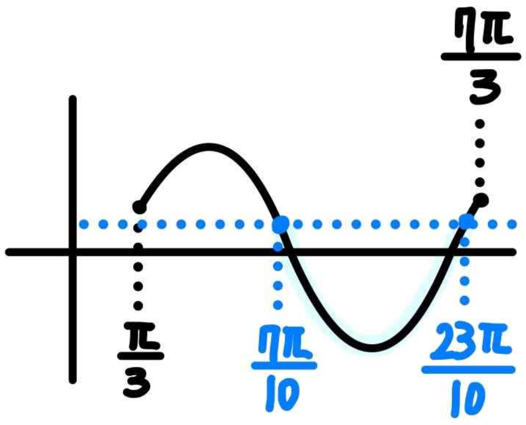
정답: ③

해설:

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(-\frac{3}{10}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3}{10}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{3}{10}\pi\right)$ 이므로

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leq\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$는 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leq\sin\left(\frac{3}{10}\pi\right)$와 같다.

$x+\frac{\pi}{3}=t$라고 치환해보자.



$\frac{\pi}{3}\leq t\leq\frac{7\pi}{3}$에서 $\sin t\leq\sin\left(\frac{3}{10}\pi\right)$의 해는 $\frac{7}{10}\pi\leq t\leq\frac{23}{10}\pi$이고,

$x=t-\frac{\pi}{3}$이므로

주어진 부등식을 만족시키는 x값의 범위는 $\frac{11}{30}\pi\leq x\leq\frac{59}{30}\pi$이다.

따라서 $\alpha=\frac{11}{30}\pi$, $\beta=\frac{59}{30}\pi$이고, $\alpha+2\beta=\frac{43}{10}\pi$이다.

여담:

$\alpha+2\beta$의 값을 구해야하므로 대칭성을 이용할 수 없고 α, β 각각의 값을 구해야한다.

기출 다시보기: 2024학년도 6월 모의평가 9번

9. $0\leq x\leq 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x\leq\sin\frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha\leq x\leq\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

정답: 3번

10.

정답: ①

해설:

step1

$f(x+a)=f(x)+a^2$에 $x=0$을 대입하면 $f(a)=f(0)+a^2$이다.

$f(x)$는 연속함수이므로 (나) 조건에 의해 $f(a)=4a^3-14a$, $f(0)=0$이고, 따라서 $4a^3-14a=0+a^2$이다.

그러므로 이를 만족시키는 양수 a의 값은 $a=2$이다.

step2

$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (4x^3-14x)dx=\left[x^4-7x^2\right]_1^2=-6$이고,

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (4x^3-14x)dx=\left[x^4-7x^2\right]_0^2=-12$이다.

또한

$\int_1^6 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^2 f(x+2)dx+\int_2^4 f(x+2)dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^2 \{f(x)+4\}dx+\int_2^4 \{f(x)+4\}dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+16+\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(x+2)dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+2\int_0^2 f(x)dx+24$ 이므로

$\int_1^6 f(x)dx=-6-24+24=-6$이다.

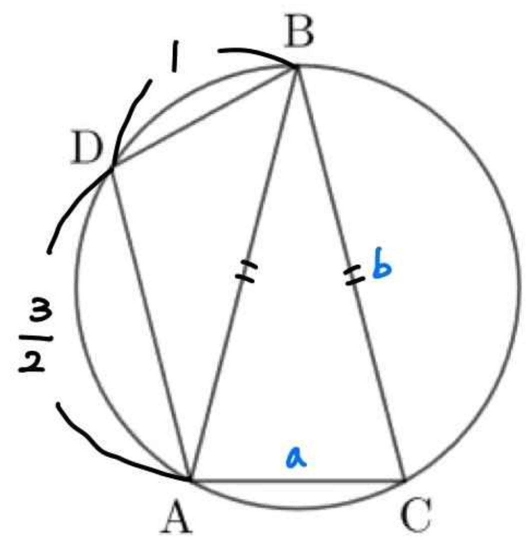
여담:

연속조건 이용하고 적절히 구간별로 식 변형하기.

11.

정답: ③

해설:



step1

$\overline{AC}=a$, $\overline{AB}=\overline{BC}=b$라 하자.

삼각형 ABC에서 $\cos B=\frac{7}{8}$이므로 코사인법칙을 적용하면

$\cos B=\frac{(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2-(\overline{AC})^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\frac{b^2+b^2-a^2}{2\times b\times b}=\frac{7}{8}$ 이므로

$b^2=4a^2$이고, 따라서 $b=2a$이다.

step2

사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이므로 $\angle C+\angle D=\pi$이고, 따라서 $\cos C+\cos D=0$이다.

이때 삼각형 ABC에서 cos법칙을 적용하면,

$\cos C=\frac{(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2-(\overline{AB})^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{BC}}=\frac{a^2+b^2-b^2}{2\times a\times b}$ 이고,

$b=2a$ 이므로 $\cos C=\frac{1}{4}$이다.

또한 삼각형 ABD에서 cos법칙을 적용하면,

$\cos D=\frac{(\overline{BD})^2+(\overline{AD})^2-(\overline{AB})^2}{2\times\overline{BD}\times\overline{AD}}=\frac{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-b^2}{2\times1\times\frac{3}{2}}$이다.

따라서 $\cos C+\cos D=0$ 이므로 $b=2$이고, $b=2a$이므로 $a=1$이다.

step3

원 C의 반지름의 길이를 r이라 하자.

$\cos B = \frac{7}{8}$이므로 $\sin B = \frac{\sqrt{15}}{8}$이다.

원 C는 삼각형 ABC의 외접원이므로, 삼각형 ABC에서
사인법칙을 적용하면,

$$r = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2\sin B} = \frac{a}{2\times\frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{1}{2\times\frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$$ 이고,

원 C의 넓이는 $\pi r^2 = \frac{16}{15}\pi$이다.

여담:

$\cos B$에서 $\angle B$가 나타내는 각이 $\angle$DBC가 아니라 $\angle$ABC라는 점 조심하기.

원에 내접하는 사각형의 마주보는 각의 크기의 합은 π이다.

길이를 구하기 위해 코사인법칙 사용하고, 원 C의 반지름의
길이를 구하기 위해 사인법칙 사용하기.

종종 코사인법칙을 쓸 때는 문자를 여러 개 써야 답이 쉽게
나오는 상황이 있으니, 괜히 한 문자로 통일시키기 위해 노력할
필요 없다.

12.

정답: ③

해설:

$\lim_{x\to1+} f(x)f(x-2) = f(1)\times f(-1) = \lim_{x\to1-} f(x)f(x-2)$이고,

$\lim_{x\to1+} f(x)f(x-2) = (1+b)\times(-a+1)$

$f(1)\times f(-1) = 2\times2 = 4$

$\lim_{x\to1-} f(x)f(x-2) = (a+1)\times(-1+b)$이다.

따라서 $(1+b)\times(-a+1) = 4 = (a+1)\times(-1+b)$이므로,

$-ab-a+b=3,\ ab-a+b=5$이고, $ab=1,\ a-b=-4$이다.

그러므로 $a^2+b^2 = (a-b)^2+2ab = (-4)^2+2 = 18$이다.

여담:

범위에 신경쓰며 연속이면 (좌극한)=(함숫값)=(우극한)임을
이용해 식 세우기.

a와 b의 값 각각을 구하지 않아도 곱셈공식으로 간단하게 처리
가능하다. (가끔 곱셈공식으로 답을 구해야 하는 문제들이
존재한다.)

13.

정답: ②

해설:

step1 S_n을 이차함수로 해석하기

$a_n = a+(n-1)d$라 할 때, (단, $d \neq 0$)

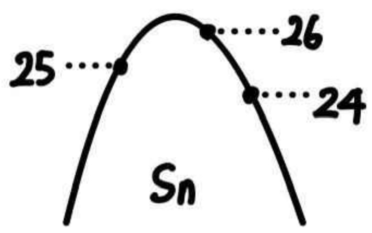
$S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a - \dfrac{d}{2}\right)n$이므로

S_n은 n에 대한 이차함수라고 생각할 수 있다.

1) $d > 0$인 경우

$n \to \infty$일 때 $S_n \to \infty$이므로 '큰 수'부터 크기 순으로 나열하는 것이 불가능하다. 따라서 a_n의 공차는 음수이고, S_n의 최고차항 계수도 음수이다.

2) $S_k = 25$, $S_{k+1} = 26$, $S_{k+2} = 24$인 자연수 k가 존재하는 경우



이 경우 $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k = 26 - 25 = 1$이고,
$a_{k+2} = S_{k+2} - S_{k+1} = 24 - 26 = -2$이다.

따라서 a_n의 공차는 $a_{k+2} - a_{k+1} = -3$이다.

S_n을 n에 대한 이차함수로 볼 경우 $S_0 = 0$이라 할 수 있다.

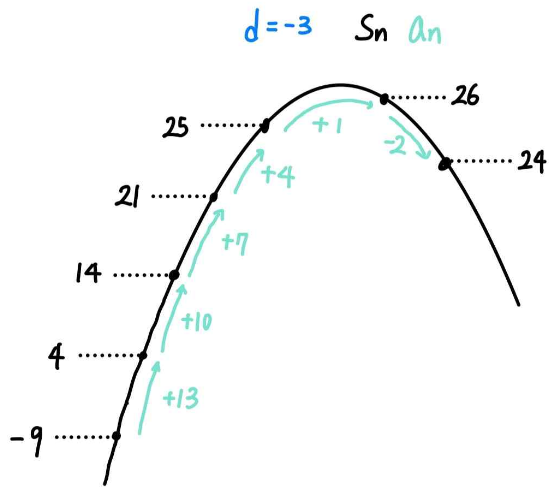
$a_{k+1} = 1$이고 $d = -3$이므로 $a_k = 4$이며,
$S_{k-1} = S_k - a_k = 25 - 4 = 21$이다.

$a_k = 4$이고 $d = -3$이므로 $a_{k-1} = 7$이며,
$S_{k-2} = S_{k-1} - a_{k-1} = 21 - 7 = 14$이다.

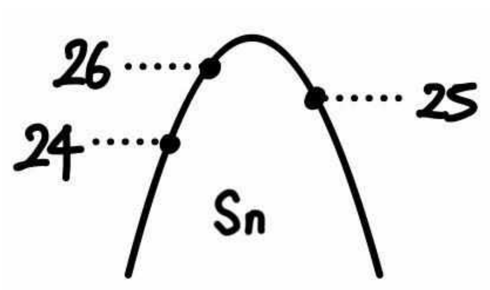
$a_{k-1} = 7$이고 $d = -3$이므로 $a_{k-2} = 10$이며,
$S_{k-3} = S_{k-2} - a_{k-2} = 14 - 10 = 4$이다.

$a_{k-2} = 10$이고 $d = -3$이므로 $a_{k-3} = 13$이며,
$S_{k-4} = S_{k-3} - a_{k-3} = 4 - 13 = -9$이다.

따라서 이 경우 $S_0 = 0$을 만족시키는 자연수 k가 존재하지 않는다.



3) $S_k = 24$, $S_{k+1} = 26$, $S_{k+2} = 25$인 자연수 k가 존재하는 경우



이 경우 $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k = 26 - 24 = 2$이고,
$a_{k+2} = S_{k+2} - S_{k+1} = 25 - 26 = -1$이다.

따라서 a_n의 공차는 $a_{k+2} - a_{k+1} = -3$이다.

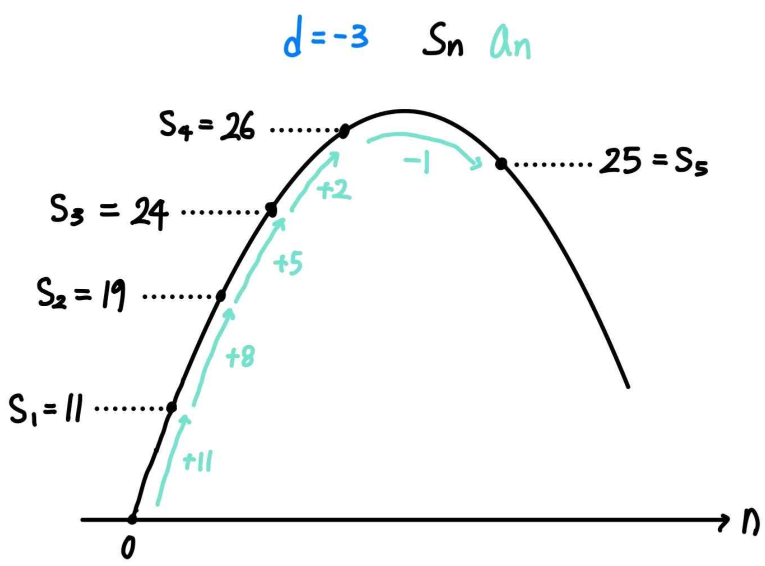
S_n을 n에 대한 이차함수로 볼 경우 $S_0 = 0$이라 할 수 있다.

$a_{k+1} = 2$이고 $d = -3$이므로 $a_k = 5$이며,
$S_{k-1} = S_k - a_k = 24 - 5 = 19$이다.

$a_k = 5$이고 $d = -3$이므로 $a_{k-1} = 8$이며,
$S_{k-2} = S_{k-1} - a_{k-1} = 19 - 8 = 11$이다.

$a_{k-1} = 8$이고 $d = -3$이므로 $a_{k-2} = 11$이며,
$S_{k-3} = S_{k-2} - a_{k-2} = 11 - 11 = 0$이다.

따라서 $S_{k-3} = S_0$이므로 $k = 3$이다.



step2

a_n의 공차는 -3이고, $a_1 = S_1 = 11$이므로,

$a_n = -3(n-1)+11,\ S_n = -\frac{3}{2}n^2 + \left(11+\frac{3}{2}\right)n$ 이다.

따라서 $S_9 = -\frac{3}{2}\times 9^2 + \left(11+\frac{3}{2}\right)\times 9 = -9$이므로,

$a_1 + S_9 = 11 + (-9) = 2$이다.

여담:

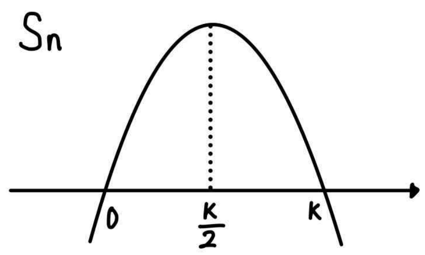
1. 물론 정수조건을 이용해 식으로 풀 수도 있지만, $S_0 = 0$을 이용해 노가다하며 그래프로 보는 것도 꽤 편하다.

2. $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$이므로 S_n은 n에 대한 이차함수로 볼 수 있다.

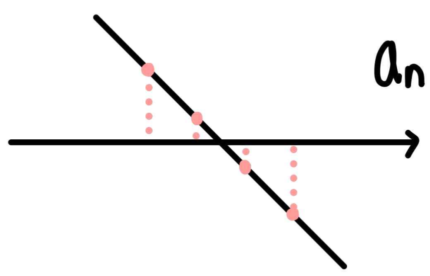
3. 등차수열 a_n, 그 합 S_n이 있을 때 $S_n = \frac{d}{2}n(n-k)$라 하자.

3-1) k가 짝수인 경우

이 경우 S_n의 최댓값 혹은 최솟값은 유일하게 존재하고, S_n의 최댓값 혹은 최솟값을 제외한 나머지 값은 모두 대칭이다. (S_n은 $n=\frac{k}{2}$에 대해 대칭이고, $\frac{k}{2}$는 정수이다.)

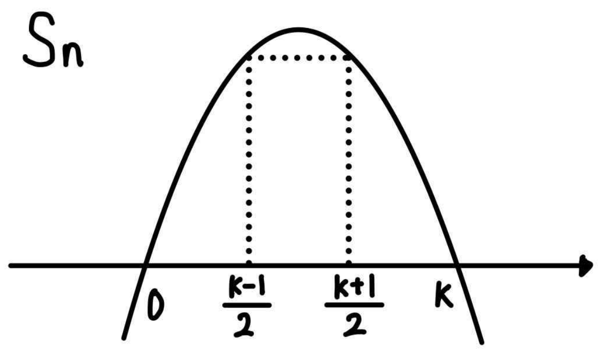


또한 a_n의 값은 부호가 반대고 절댓값이 동일한, 대칭인 형태로 나온다.



3-2) k가 홀수인 경우

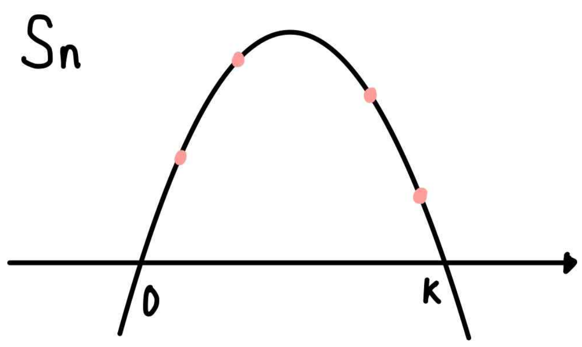
S_n의 최댓값 혹은 최솟값은 유일하지 않고, S_n의 값들은 대칭인 형태로 나온다. (S_n은 $n=\frac{k}{2}$에 대해 대칭이고, $\frac{k}{2}$는 정수가 아니다.)



또한 $a_n = 0$을 만족하는 자연수 n이 존재한다. ($n = \frac{k-1}{2}$)

3-3) k가 짝수, 홀수를 제외한 이상한 숫자인 경우

S_n은 대칭이 아니며, a_n의 값은 절댓값이 모두 다르다.



14.

정답: ⑤

해설:

step1

$h(x)=|f(x)|$라 하자.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)|-|x|}{x}$의 극한값이 존재하므로, $h(0)=f(0)=0$이다.

또한, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)|-|x|}{x}$의 좌우 극한값을 살펴보면,

$$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-0-(|x|-0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-0+x-0}{x}=h'(0-)+1$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-0-(|x|-0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-0-(x-0)}{x}=h'(0+)-1$$
$=f(2)$ 이다.

이때 $h(x)=|f(x)|$이므로 $|h'(0-)|=|h'(0+)|$이다.

따라서 $h'(0-)=-1$, $h'(0+)=1$, $f(2)=0$이고,

$f'(0)=-1$ 또는 $f'(0)=1$이다.

즉, $f(0)=f(2)=0$, $|f'(0)|=1$이다.

step2

ㄱ.

$f(-1)=f(0)=f(2)=0$이므로

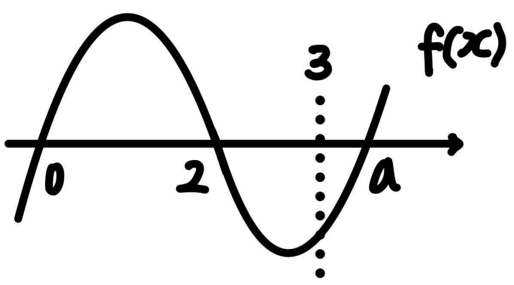
$f(x)=p(x+1)x(x-2)$라 하자. (단, $p>0$)

$|f'(0)|=2p=1$이므로 $p=\dfrac{1}{2}$이고, $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)x(x-2)$이다.

따라서 $f(3)=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times1=6$이므로, ㄱ은 참이다.

ㄴ.

$f(3)<0$이려면 $f(x)$의 개형이 아래와 같아야 한다.



$f(x)=px(x-2)(x-a)$라 한다면, (단, $p>0$, $a>3$)

$f'(0)=2pa=1$이므로 $a=\dfrac{1}{2p}$이고, $a>3$이므로 $0<p<\dfrac{1}{6}$이다.

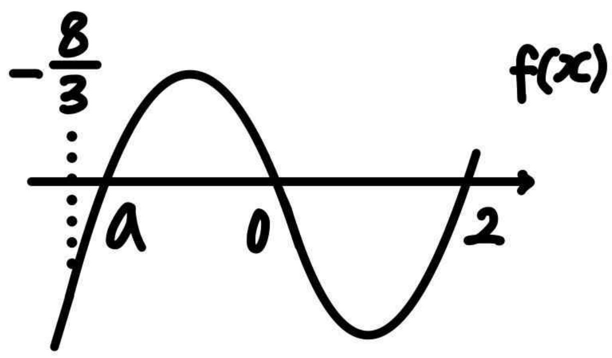
따라서 $f(1)=-p(1-a)=ap-p=\dfrac{1}{2}-p$이고, $0<p<\dfrac{1}{6}$이므로

$\dfrac{1}{3}<f(1)<\dfrac{1}{2}$이다.

그러므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ.

$f(x)$가 $f(-2)>1$이고 $f\left(-\dfrac{8}{3}\right)\le0$이려면 $f(x)$의 개형은 아래와 같아야 한다.



$f(x)=p(x-a)x(x-2)$라 하자. (단, $p>0$, $-\dfrac{8}{3}\le a<-2$)

$f'(0)=2pa=-1$이므로 $a=-\dfrac{1}{2p}$이다.

따라서 $f(x)=p\left(x+\dfrac{1}{2p}\right)x(x-2)$라 할 수 있다.

이때 $f(-2)>1$을 만족시키려면,

$f(-2)=p\times\left(-2+\dfrac{1}{2p}\right)\times(-2)\times(-4)=-16p+4>1$이므로

$0<p<\dfrac{3}{16}$이어야 한다.

또한 $f\left(-\dfrac{8}{3}\right)\le0$을 만족시키려면,

$f\left(-\dfrac{3}{8}\right)=p\times\left(-\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{2p}\right)\times\left(-\dfrac{8}{3}\right)\times\left(-\dfrac{14}{3}\right)=-\dfrac{8}{3}p+\dfrac{1}{2}\le0$이어야

하므로, $p\ge\dfrac{3}{16}$이다.

따라서 $f(-2)>1$과 $f\left(-\dfrac{8}{3}\right)\le0$을 동시에 만족시키는 $f(x)$는

존재하지 않으므로, ㄷ은 참이다.

여담:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)|-|x|}{x}=f(2)$을 해석해 $f(0)=f(2)=0$, $|f'(0)|=1$을

구해놓고,

ㄱ, ㄴ, ㄷ는 $f(x)$에 대한 식을 세워서 해결하기. (그래프로 개형 파악은 가능하나 정확한 값은 식을 세워야 풀 수 있음)

기출 다시보기: 2023학년도 9월 모의평가 14번

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_{t}^{t+1} f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

답: 5번

15.

정답: ③

해설:

step1 m 구하기

$\{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}\}=A\cup\{m\}=\{1,3,m\}$이므로, a_m과 a_{m+1}중 집합 A의 원소가 무조건 존재한다.

따라서 (가) 조건을 만족하므로, $a_{m+2}=2a_m-a_{m+1}$이다.

즉 $a_{m+1}+a_{m+2}=2a_m$인데, 이때 $1<3<m$이므로 a_m은 1 또는 m이 될 수 없다.

따라서 $a_m=3$이고, $a_{m+1}+a_{m+2}=2a_m$이므로 $1+m=2\times3$이며 $m=5$이다.

정리하면, $a_5=3$, $\{a_6, a_7\}=\{1, 5\}$이다.

step2

$a_n\in A$ 또는 $a_{n+1}\in A$이면 $a_n=\dfrac{a_{n+1}+a_{n+2}}{2}$이고,

$a_n\not\in A$ 이고 $a_{n+1}\not\in A$이면 $a_n=a_{n+2}-a_4$이다.

1) $a_6=1$인 경우

$n=4$일 때를 생각해보자.

$a_5\in A$이므로 $a_4=\dfrac{a_5+a_6}{2}=\dfrac{3+1}{2}=2$이다.

만약 $a_3\in A$이라면, $a_3=\dfrac{a_4+a_5}{2}=\dfrac{2+3}{2}=\dfrac{5}{2}$인데, 이 경우 $a_3\not\in A$이기 때문에 모순이다.

또한, $a_3\not\in A$인 경우, $a_3=a_5-a_4=3-2=1$이므로 $a_3\in A$이기 때문에 모순이다.

따라서 $a_6=1$인 경우 모순이 생기므로 $a_6=5$이다.

2) $a_6=5$인 경우

$a_5\in A$이므로 $a_4=\dfrac{a_5+a_6}{2}=\dfrac{3+5}{2}=4$이다.

만약 $a_3\in A$이라면, $a_3=\dfrac{a_4+a_5}{2}=\dfrac{4+3}{2}=\dfrac{7}{2}$인데, 이 경우 $a_3\not\in A$이기 때문에 모순이다.

따라서 $a_3\not\in A$이고, 이때 $a_3=a_5-a_4=3-4=-1$이다.

만약 $a_2 \in A$이라면, $a_2 = \frac{a_3+a_4}{2} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$인데, 이 경우 $a_2 \not\in A$이기 때문에 모순이다.

따라서 $a_2 \not\in A$이고, 이때 $a_2 = a_4 - a_4 = 0$이다.

만약 $a_1 \in A$이라면, $a_1 = \frac{a_2+a_3}{2} = \frac{0+(-1)}{2} = -\frac{1}{2}$인데, 이 경우 $a_1 \not\in A$이기 때문에 모순이다.

따라서 $a_1 \not\in A$이고, 이때 $a_1 = a_3 - a_4 = -1-4 = -5$이다.

step3

step1, 2에서 구했듯이 $a_1 = -5$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = 4$, $a_5 = 3$, $a_6 = 5$, $a_7 = 1$이다.

$a_8 = 2a_6 - a_7 = 2\times5-1 = 9$이고,

$a_9 = 2a_7 - a_8 = 2\times1-9 = -7$이며,

$a_{10} = a_8 + a_4 = 9+4 = 13$이다.

따라서 $m=5$이고,

$\sum_{k=1}^{10} a_k = -5+0+(-1)+4+3+5+1+9+(-7)+13 = 22$이므로

$m + \sum_{k=1}^{10} a_k = 5+22 = 27$이다.

여담:

a_m과 a_{m+1} 중 집합 A의 원소가 무조건 있을 수밖에 없다는 점에서 m을 구할 수 있음.

이후 범위 주의하며 역추적해, a_6의 값을 확정하기.

20.

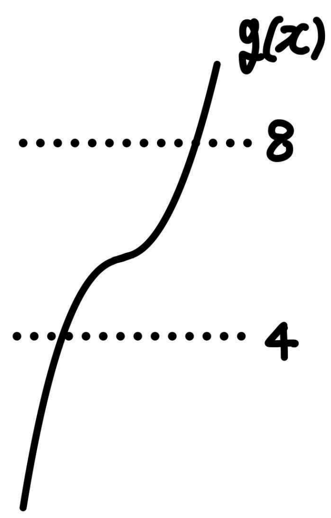
정답: 19

해설:

1) $f(x)$가 증가함수인 경우

모든 실수 x에 대해 $f'(x) \geq 0$이다.

따라서 $g(x) = \int_1^x f'(t)dt$이므로 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

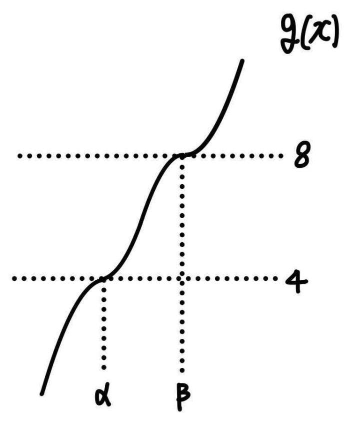


이때 함수 $|g(x)-4|+|g(x)-8|$은 최소 1개, 최대 2개의 점에서 미분불가능하므로 $f(x)$는 극대 극소를 모두 가지는 개형이어야 한다.

2) $f(x)$가 극대 극소를 모두 가지는 경우

$g(x) = \int_1^x |f'(t)|dt$에 $x=1$을 대입하면 $g(1)=0$이고,

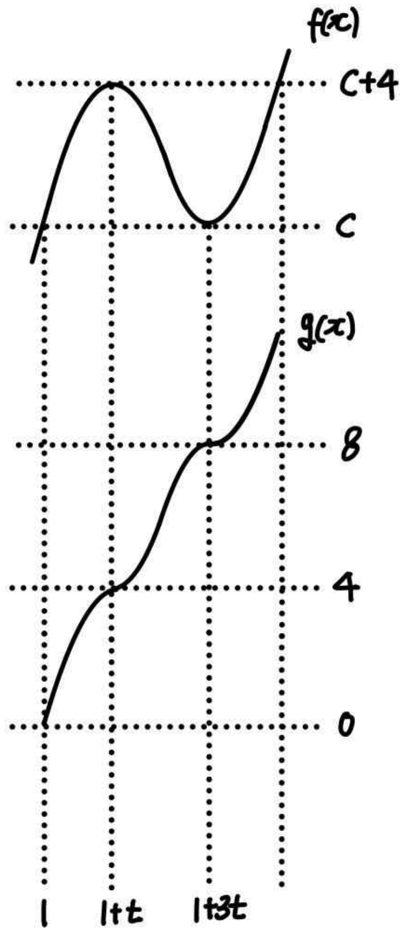
$g'(x) = |f'(x)|$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 감소하는 부분을 뒤집어 증가하는 연속함수가 되도록 만들어 놓은 것이다.



$f(x)$의 극댓값과 극솟값은 4 차이이다.

$g(\alpha)=4$를 만족시키는 α에 대해, $f(x)$는 $x=\alpha$에서부터 감소한다.

또한 $y=0$과 $y=8$이 $y=4$에 대해 대칭이고, $g(1)=0$이므로 $f(x)$의 극솟값과 $f(1)$은 같다.



삼차함수 비율관계에 의해 $f(x)=(x-1)(x-1-3t)^2+c$라 하자. (단, $t>0$)

$f(1+t)=t\times(-2t)^2+c=c+4$이므로 양수 t의 값은 $t=1$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-4)^2+c$이다.

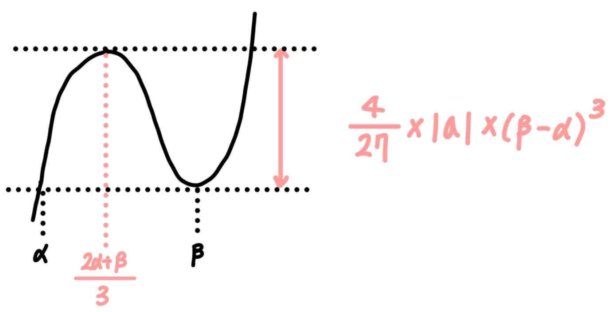
또한 주어진 조건에 의해 $f(0)=(-1)\times(-4)^2+c=3$이므로 $c=19$이다.

그러므로 $f(1)=c=19$이다.

여담:

삼차함수 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)^2$이라 한다면, $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차이는 $\frac{4}{27}\times|a|\times|\beta-\alpha|^3$이다.

(도함수의 넓이공식으로 유도가능)



21.

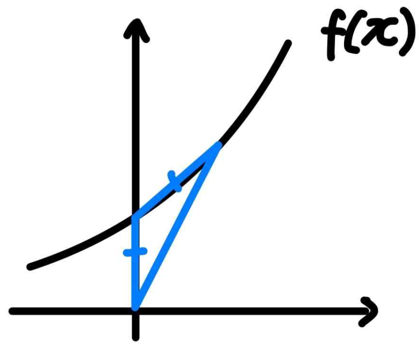
정답: 130

해설:

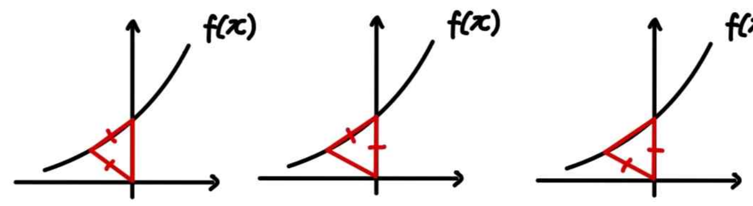
step1 가능한 삼각형 OAP 살펴보기

점 P의 x좌표를 p라 하고, 점 P_1의 x좌표를 p_1, 점 P_2의 x좌표를 p_2라 하자.

양수 p에 대해 삼각형 OAP가 이등변삼각형인 경우는 아래와 같은 한 상황만 존재한다.



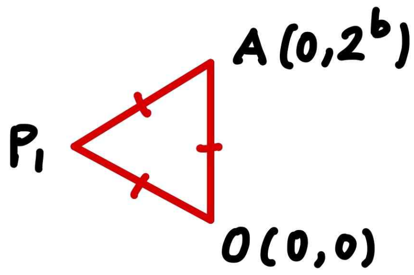
음수 p에 대해 삼각형 OAP가 이등변삼각형인 경우는 아래와 같은 세 상황이 존재한다.



이때 가능한 p는 p_1, p_2의 2개이므로, 위 그림에서 p가 음수인 세 상황은 동일한 상황이다.

즉, $p_1<0$인 상황에서, 삼각형 $\mathrm{OAP_1}$은 정삼각형이다.

step2

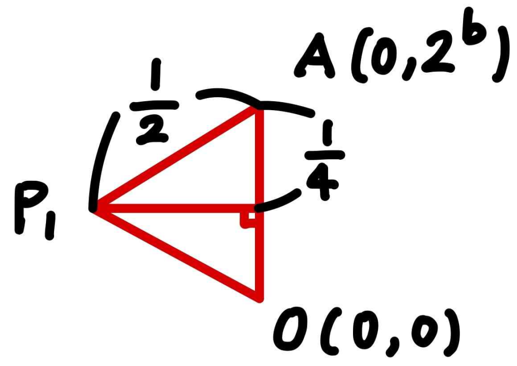


점 O의 좌표는 $(0,0)$, 점 A의 좌표는 $(0,2^b)$이다.

삼각형 $\mathrm{OAP_1}$은 정삼각형이고, 한 변의 길이가 2^b이므로,

$[\triangle \mathrm{OAP_1}]=\frac{1}{2}\times2^b\times2^b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{16}$이고,

따라서 $2^b=\frac{1}{2}$, $b=-1$이다.



또한 삼각형 OAP_1이 정삼각형임을 이용해 점 P_1의 좌표를 구하면 $P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$이다. (위 그림 참고)

이때 점 P_1도 $f(x)$ 위의 점이므로,

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=2^{-\frac{\sqrt{3}}{4}a-1}=\frac{1}{4}$이고,

따라서 $a=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$이다.

step3

$a=\frac{4}{3}\sqrt{3}$이므로 $a^2=\frac{16}{3}$이고, $b=-1$이므로

$30(a^2+b)=30\times\left(\frac{16}{3}-1\right)=130$이다.

여담:

점 P의 x좌표가 음수일 때, 삼각형 OAP가 정삼각형임을 놓치지 않도록 조심!

22.

정답: 44

해설:

step1

주어진 문제의 조건을 '문자를 구분해 가며' 다시 작성해보자.

$g(t)$는 부등식 $f(x)\le tx$를 만족시키는 x의 최댓값이며,

t에 대한 방정식 $g(t)=3-f'(0)$을 만족시키는 모든 실수 t의 집합은 $\{t|t<g(3)\}$이다.

step2

$y=tx$라는 직선의 기울기가 일정 값보다 작아지면,

($=t$의 값이 일정 값보다 작아지면)

$f(x)\le tx$를 만족시키는 가장 큰 x값이 변하지 않는다.

즉, $y=tx$라는 직선의 기울기가 일정 값보다 작을 때, $f(x)=tx$를 만족시키는 실수 x의 값 중 하나가 일정하다는 것을 알 수 있다.

이때 $y=tx$는 t값이 변해도 $(0,0)$이라는 점을 항상 지난다.

만약 $f(x)$가 $(0,0)$을 지나지 않는다면, $y=f(x)$와 $y=tx$의 교점은 계속 바뀔 것이다. (그림으로도 확인 가능)

$f(x)$가 $(0,0)$을 지나야 두 함수 $y=f(x)$와 $y=tx$가 '항상' 지나는 점이 겹치고, t값이 변함에도 $f(x)=tx$의 실근 중 하나가 일정해지게 된다.

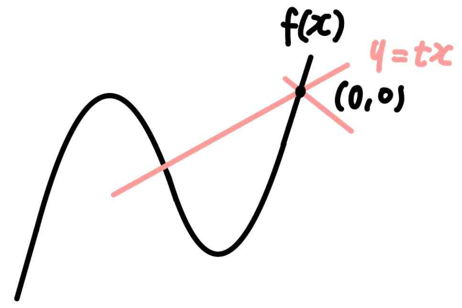
(설명을 위해 $f(x)-tx=x^3+ax^2+(b-t)x+c$라 하면, $f(x)-tx=0$의 실근은 $c\ne0$일 경우 계속 바뀌게 된다. $c=0$일 경우 t값이 바뀜에도 $x=0$이라는 실근을 계속 가지게 된다.)

따라서 $f(0)=0$이고, 유지되는 $g(t)$의 값은 0이므로 $0=3-f'(0)$이고 $f'(0)=3$이다.

step3

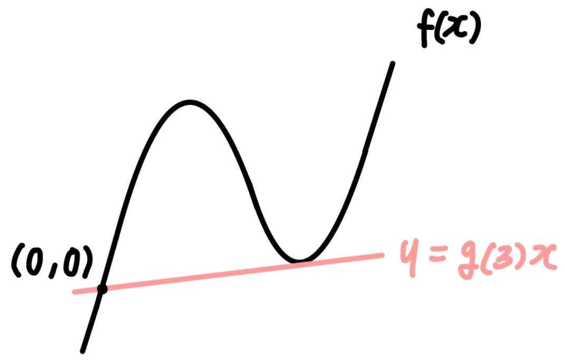
$f'(0)=3$이므로 $f(x)$의 개형은 $(0,0)$의 위치에 따라 대략 2가지가 가능하다. (개형을 따질 때, 극값을 안 가지더라도 $f(x)=tx$의 교점의 개수는 1개부터 3개까지 다 가능하기 때문에, 극대 극소의 유무는 중요하지 않다.)

1) $x=0$이 $f(x)$의 변곡점 오른쪽에 있는 경우(변곡점이라는 표현이 생소하면 그냥 직관적으로 오른쪽에 있는 경우라고 이해하면 된다.)



이 경우 t에 대한 방정식 $g(t)=3-f'(0)=0$을 만족시키는 모든 실수 t의 집합은 실수 전체의 집합이므로, 조건을 만족시키지 않는다.

2) $x=0$이 $f(x)$의 변곡점 왼쪽에 있는 경우(변곡점이라는 표현이 생소하면 그냥 직관적으로 왼쪽에 있는 경우라고 이해하면 된다.)

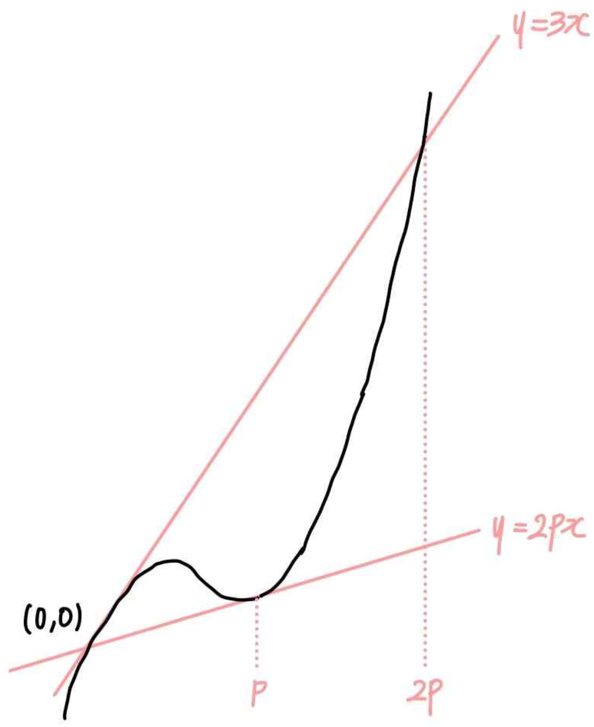


$f'(0)=3$을 이용해, 주어진 조건 $\{t|t<g(3)\}$에 있는 $g(3)$을 해석해보자.

x에 대한 방정식 $f(x)=g(3)x$의 0이 아닌 교점을 p라 하면, $f(x)=g(3)x$의 세 근의 합은 $0+p+p=2p$이다. (단, $p>0$)

이때 $f(x)=3x$의 세 근의 합 역시 $2p$이고, $y=f(x)$와 $y=f'(0)x=3x$는 $x=0$에서 접하므로, 함수 $y=f(x)$와 $y=3x$의 0이 아닌 교점의 x좌표는 $2p$이다.

따라서 $f(x)\le 3x$를 만족시키는 x의 최댓값은 $2p$이므로 $g(3)=2p$이다.



$f(x)=x(x-p)^2+2px$라 하면, $f'(0)=p^2+2p=3$이므로 양수 p의 값은 $p=1$이다.

그러므로 $f(x)=x(x-1)^2+2x$이고, $f(4)=4\times 3^2+2\times 4=44$이다.

여담:

주어진 조건에서는 $g(x)$에 관한 정보를 줬지만, 결국 $g(x)$는 t값이 변함에 따라 변하는 값임을 잊지 말자. 문자가 통일되어 헷갈리면 step1처럼 문자를 분리시키는 과정을 거쳐도 좋을 것 같다.

그림으로도 $f(x)$가 $(0,0)$을 지난다는 사실을 쉽게 확인 가능하다.

$f'(0)=3$을 이용해 $g(3)$에 대한 정보를 끌어내야 한다.

이때 삼차함수 $f(x)$에 대해, $f(x)=0$과 $f(x)-(px+q)=0$의 세 근의 합은 동일하다는 점이 유용하게 쓰인다.

여기까지 온 여러분, 벌써 2025 지인선 n제의 절반을 마무리했습니다!

수고많으셨어요!

다시 한 번 힘내서 끝까지 파이팅하시기 바랍니다!

11회 정답

8	②	9	③	10	②	11	②	12	③
13	④	14	④	15	④	20	315	21	25
22	169								

8.

정답: ②

해설:

step1

$\frac{f(3)}{5}=f'(3)$이므로 $f'(3)=a$, $f(3)=5a$라 하자.

$f(x)=(x-3)^3+b(x-3)^2+a(x-3)+5a$라 할 수 있다.

또한

$f(-2)=(-5)^3+b\times(-5)^2+a\times(-5)+5a=-125+25b=0$이므로

$b=5$이다.

따라서 $f(x)=(x-3)^3+5(x-3)^2+a(x-3)+5a$이다.

step2

$f(x)$의 역함수가 존재하려면 모든 실수 x에 대해
$f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 모든 실수 x에 대해 $f'(x)\geq 0$이면 $f'(x+3)\geq 0$이고,

$f'(x)=3(x-3)^2+10(x-3)+a$이므로
$f'(x+3)=3x^2+10x+a$이다.

따라서 $f'(x+3)$의 판별식이 항상 0 이하여야 하므로,
$10^2-4\times3\times a\leq 0$이고, $a\geq\frac{25}{3}$이어야한다.

그러므로
$f(1)=(-2)^3+5\times(-2)^2+a\times(-2)+5a=12+3a\geq 37$이므로
$f(1)$의 최솟값은 37이다.

여담:

최고차항의 계수가 p인 삼차함수 $f(x)$에 대해, $f''(a)=q$,
$f'(a)=r$, $f(a)=s$라면
$f(x)=p(x-a)^3+q(x-a)^2+r(x-a)+s$라 할 수 있다.

9.

정답: ③

해설:

$\sum_{k=1}^{10} a_k = S$라 하자.

$21a_n = n + \sum_{k=1}^{10} a_k$에 $n=1$부터 $n=10$까지 대입해주면,

$21a_1 = 1+S$

$21a_2 = 2+S$

…

$21a_{10} = 10+S$ 이고,

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 차례로 더해주면

$21(a_1+a_2+\cdots+a_{10}) = 1+2+\cdots+10+10S$이다.

따라서 위 식을 정리하면 $21S = 55+10S$이므로 $S=5$이다.

그러므로 $a_{23} = \frac{1}{21}(23+S) = \frac{1}{21}(23+5) = \frac{4}{3}$이다.

여담:

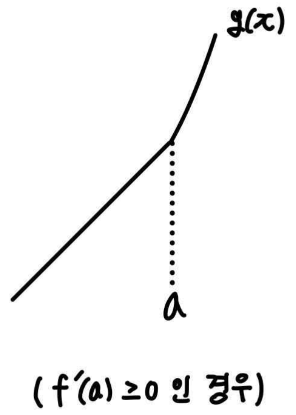
$\sum_{k=1}^{10} a_k$은 n값이 변해도 값이 일정한 상수이다.

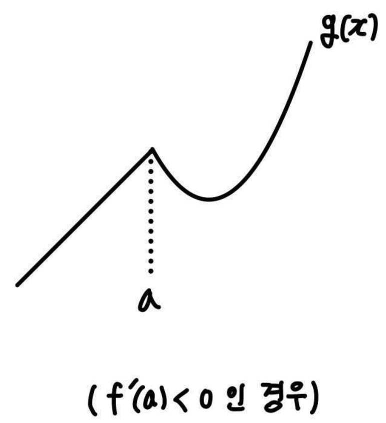
10.

정답: ②

해설:

만약 $f'(a) \geq 0$이라면 $g(x)$는 극값을 가지지 않는 증가함수이므로, $f'(a) < 0$이다.





$g(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$의 극댓값은 $g(a) = a+1 = f(a) = 5$이다.

따라서 $a=4$이고, $f(a) = f(4) = 5$이다

$f(x) = (x-4)(x-b)+5$라 하면,

(단, $f'(a) = f'(4) < 0$이므로 $b > 4$)

$g(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{4+b}{2}\right) = -\frac{(b-4)^2}{4}+5 = 1$이므로 $b>4$를 만족하는 b의 값은 $b=8$이다.

그러므로 $f(x) = (x-4)(x-8)+5$이므로

$f(3) = -1 \times (-5) + 5 = 10$이고,

$a + f(3) = 4 + 10 = 14$이다.

여담:

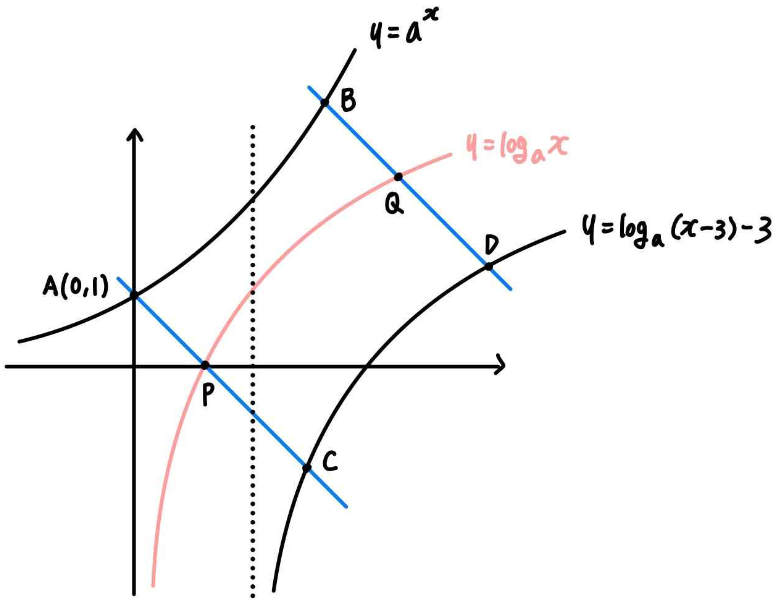
$g(x)$의 그래프를 통해 극대, 극소를 모두 가지는 개형을 파악하자.

$f(x)$가 이차함수로 극값을 1개만 가지기 때문에, 극댓값과 극솟값 중 하나는 함수가 바뀌는 지점, 즉 $x=a$에서 생길 수밖에 없고, 다른 하나는 $f(x)$의 원래 극값이다.

11.

정답: ②

해설:



step1

선분 AC와 곡선 $y=\log_a x$의 교점을 점 P,

선분 BD와 곡선 $y=\log_a x$의 교점을 점 Q라 하자.

직선 AC의 기울기가 -1, 점 A의 좌표가 $(0, 1)$이므로 직선 AC의 방정식은 $y=-x+1$이고,

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 0)$이다.

그러므로 선분 AP의 길이는 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$이다.

또한 $y=\log_a x$를 x축으로 $+3$만큼, y축으로 -3만큼 평행이동 시키면 $y=\log_a(x-3)-3$이 되고, 직선 CP의 기울기는 -1이므로 점 P를 동일한 방법으로 평행이동시키면 점 C가 된다.

그러므로 점 C의 좌표는 $(1+3, 0-3)=(4, -3)$이고,

선분 CP의 길이는 $\sqrt{(4-1)^2+(-3-0)^2}=3\sqrt{2}$이다.

사각형 ABDC는 직사각형이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고, 주어진 조건에 의해 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BD}}$이므로 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이다.

선분 AC의 길이는 선분 AP의 길이와 선분 CP의 길이의 합과 같으므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$이고, $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이다.

step2

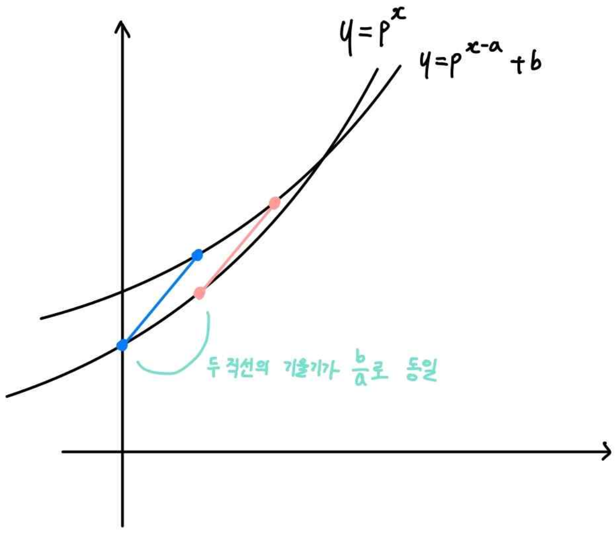
사각형 ABDC는 직사각형이므로 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이고, 직선 AC의 기울기가 -1이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.

또한 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이고 점 A의 좌표가 $(0, 1)$이므로, 점 B의 좌표는 $(2, 3)$이다.

따라서 $b=2$, $a^b=3$이므로 $a=\sqrt{3}$이고,
$a^2\times b^2=(\sqrt{3})^2\times 2^2=12$이다.

여담:

지수로그함수를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 이동시킨 후, 이동되기 전의 점과 이동된 이후의 점을 이어보면 항상 기울기가 $\dfrac{b}{a}$ 이다.



(단, 평행이동 관계에 있는 두 점이 아니라 다른 점을 이은 경우 기울기가 $\dfrac{b}{a}$가 아니다.)

7회 13번 참고.

12.

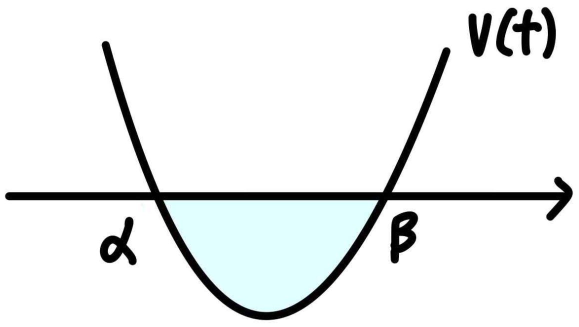
정답: ③

해설:

step1

점 P의 속도를 $v(t)$라 하고, $v(t)=3(t-\alpha)(t-\beta)$라 하자.

(단, $\alpha<\beta$)



이때 $v(0)=x'(0)=2k>0$이므로 $\beta>\alpha>0$이다.

$(v(2)=x'(2)=2(2-k)$이고, $v(k)=x'(k)=k(k-2)$이므로 양의 상수 k에 대해 $v(2)\times v(k)\le 0$인데, 만약 $\alpha<\beta<0$이라면 $v(2)\times v(k)>0$이므로 모순이다.)

α가 양수이므로, 점 P가 음의 방향으로 움직인 거리는, $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 $\frac{1}{6}\times 3\times(\beta-\alpha)^3=\frac{28}{27}\sqrt{7}$이므로 $\beta-\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{3}$이다.

step2

$v(t)=3t^2-3(\alpha+\beta)t+3\alpha\beta=3t^2-(2k+4)t+2k$이므로,
$3(\alpha+\beta)=3\alpha\beta+4$이다.

또한 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2$이므로
$(\alpha+\beta)^2-4\times\left\{(\alpha+\beta)-\frac{4}{3}\right\}=\frac{28}{9}$이고,

따라서 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}$ 또는 $\frac{10}{3}$이다.

이때 $k=\frac{3}{2}(\alpha+\beta)-2>0$이므로 $\alpha+\beta=\frac{10}{3}$이고,
$3(\alpha+\beta)=3\alpha\beta+4$이므로 $\alpha\beta=2$이다.

그러므로 $v(t)=3t^2-10t+6$이므로 $v(4)=14$이다.

여담:

$v(t)$를 바로 주어진 $x(t)$의 식을 미분해서 작성해도 되지만, $v(t)$의 근을 따로 α, β라 설정해 식을 세우는 것이 근과 계수와의 관계를 사용해 계산하기에도 편하다.

13.

정답: ④

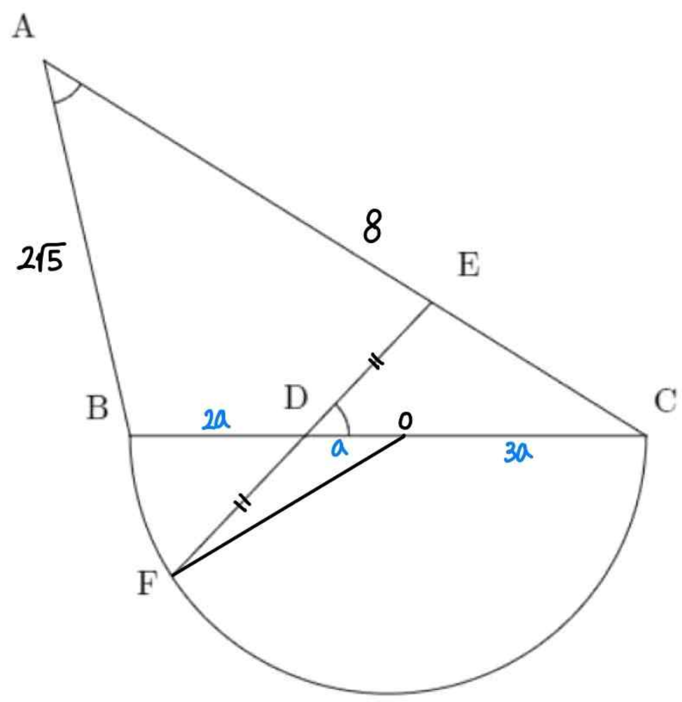
해설:

step1

선분 BC의 중점을 점 O라 하고,

$\overline{CD}=2\overline{BD}$이고, $\overline{OB}=\overline{OC}=$(반원의 반지름) 이므로

$\overline{BD}=2a$, $\overline{OD}=a$, $\overline{OC}=3a$라 하자. (단, $a>0$)



삼각형 ABC와 삼각형 DEC는 AA닮음이므로,

$\overline{AC}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{DE}$이다.

주어진 조건에 의해 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$, $\overline{AC}=8$ 이고, $\overline{CD}=4a$이므로
$\overline{DE}=\sqrt{5}a$이다.

step2

삼각형 ODF에서 코사인법칙을 적용하면,

$\overline{DF}=\overline{DE}=\sqrt{5}a$, $\overline{DO}=a$, $\overline{OF}=$(반지름)$=3a$이므로

$\cos\angle FDO=\frac{(\overline{DF})^2+(\overline{DO})^2-(\overline{OF})^2}{2\times\overline{DF}\times\overline{DO}}=\frac{(\sqrt{5}a)^2+a^2-(3a)^2}{2\times\sqrt{5}a\times a}$
$=-\frac{3}{2\sqrt{5}}$이다.

이때 $\angle FDO+\angle CDE=\pi$이고, $\angle CDE=\angle BAC$이므로
$\cos\angle BAC=\frac{3}{2\sqrt{5}}$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면,

$(\overline{BC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2-2\times(\overline{AB})\times(\overline{AC})\times\cos\angle BAC$이므로,

$(6a)^2 = (2\sqrt{5})^2 + 8^2 - 2\times 2\sqrt{5}\times 8\times \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ 이고,

이를 만족하는 양수 a의 값은 $a=1$이다.

따라서 $\overline{BD}=2$, $\overline{OD}=1$, $\overline{OC}=\overline{OF}=3$, $\overline{DE}=\overline{DF}=\sqrt{5}$이다.

step3

삼각형 DOF에서 코사인법칙을 적용하면,

$$\cos\angle DOF = \frac{(\overline{DO})^2+(\overline{OF})^2-(\overline{DF})^2}{2\times\overline{DO}\times\overline{OF}} = \frac{1^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\times1\times3} = \frac{5}{6}$$ 이다.

이때 $\angle DOF + \angle FOC = \pi$이므로 $\cos\angle FOC = -\dfrac{5}{6}$이다.

따라서 삼각형 OFC에서 코사인법칙을 적용하면,

$$\begin{aligned}(\overline{CF})^2 &= (\overline{OF})^2+(\overline{OC})^2-2\times(\overline{OF})\times(\overline{OC})\times\cos\angle FOC\\ &= 3^2+3^2-2\times3\times3\times\left(-\frac{5}{6}\right)=33\end{aligned}$$ 이므로,

$\overline{CF}=\sqrt{33}$이다.

여담:

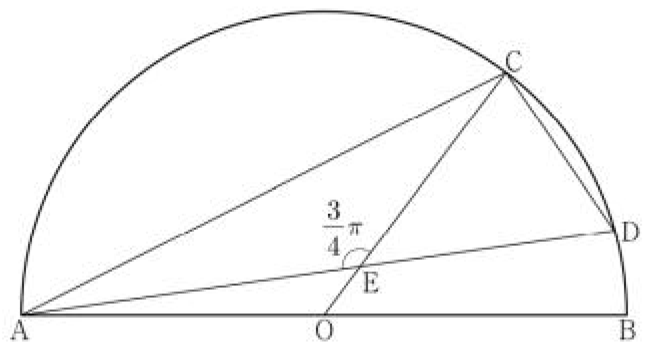
최대한 주어진 괴랄한 모양을 사용할 수 있는 모양들로 쪼개기 위해, 주어진 반원의 중심과 여러 점을 잇는 보조선을 그리는 일은 꼭 생각했어야 함.

기출 다시보기: 2023학년도 9월 모의평가 13번

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

정답: 5번

14.

정답: ④

해설:

step1 조건 파악

방정식 $x^2-3x+2=0$의 근은 $x=1$과 $x=2$이기 때문에,

$\dfrac{a_{2n}}{a_n}=1$이면 $a_{2n+1}-a_n=2$이고,

$\dfrac{a_{2n}}{a_n}=2$이면 $a_{2n+1}-a_n=1$이다.

따라서 $(a_{2n},a_{2n+1})=\begin{cases}(a_n,a_n+2) & \cdots ㄱ \\ (2a_n,a_n+1) & \cdots ㄴ\end{cases}$ 이다.

a_{2n}과 a_{2n+1} 중 하나가 확정되면 다른 하나도 확정되고,

모든 n에 대해 일괄적으로 ㄱ 또는 ㄴ이 적용되는 것이 아니라, 각각의 n에 대해 ㄱ 또는 ㄴ이 적용된다.

step2

초항이 양수이기 때문에, n이 증가함에 따라 a_n의 값은 유지되거나 증가한다.

즉, $a_1=a_8$이려면, $a_1=a_2=a_4=a_8$이어야 한다.

따라서 $a_1=a$라 하면,

$(a_2,a_3)=(a,a+2)$, $(a_4,a_5)=(a,a+2)$, $(a_8,a_9)=(a,a+2)$이다.

step3

1) $(a_6,a_7)=(a+2,a+4)$인 경우

$a_{12}=a+2$ 또는 $a_{12}=2a+4$이다.

주어진 조건에 의해 $a_{12}=3a_7+1$이므로,

$a_{12}=a+2$인 경우 $a+2=3(a+4)+1$이고, 이때 $a=-\dfrac{11}{2}$이므로 초항이 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a_{12}=2a+4$인 경우 $2a+4=3(a+4)+1$이고, 이때 $a=-9$이므로 초항이 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

2) $(a_6,a_7)=(2a+4,a+3)$인 경우

$a_{12}=2a+4$ 또는 $a_{12}=4a+8$이다.

주어진 조건에 의해 $a_{12}=3a_7+1$이므로,

$a_{12}=2a+4$인 경우 $2a+4=3(a+3)+1$이고, 이때 $a=-6$이므로 초항이 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

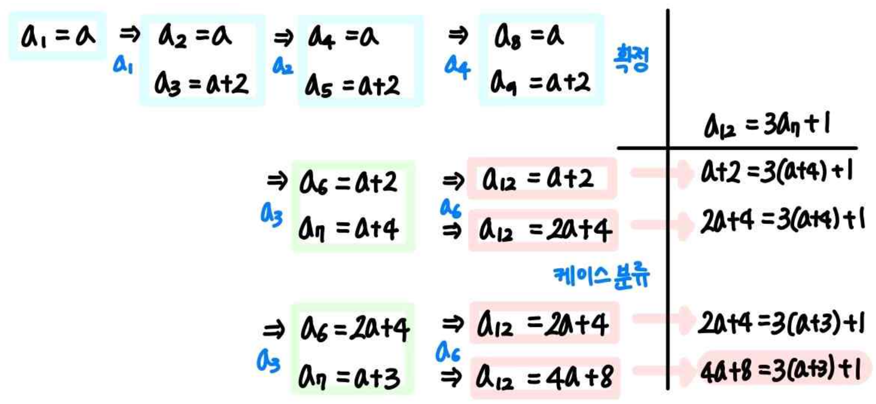
$a_{12}=4a+8$인 경우 $4a+8=3(a+3)+1$이고, 이때 $a=2$이다.

따라서, 양수 a의 값은 $a=2$이다.

그러므로

$\sum_{k=1}^{9}a_k=a+\{a+(a+2)\}+\{a+(a+2)\}+\{(2a+4)+(a+3)\}+\{a+(a+2)\}$

$=10a+13=33$이다.



여담:

만약 모든 n에 대해 ㄱ 또는 ㄴ의 규칙 중 한 가지만 적용된다고 생각했다면 반성하자.

또한 a_{2n}이 결정될 때 a_{2n+1}도 함께 결정된다는 점이 이 문제의 포인트였다.

15.

정답: ④

해설:

step1 $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{|x-f(2)|}=f(n)$에 $n=2$ **대입**

$\lim_{x\to 2}\frac{f(2)}{|x-f(2)|}=f(2)$이다. $f(2)\neq 0$이므로 $|2-f(2)|=1$이고,

따라서 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=3$이다.

step2

1) $f(2)=1$인 경우

$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{|x-f(2)|}=f(n)$에 $n=1$을 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{|x-1|}=f(1)$이고,

이 극한의 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 $f(1)=0$이다.

또한 $\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f(1)=0$이므로

$f'(1)=0$이다.

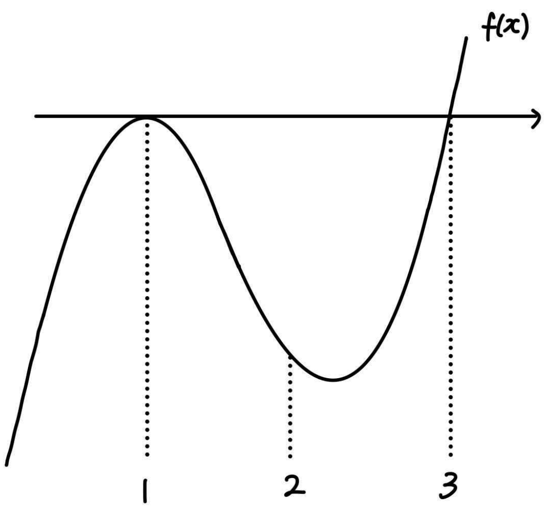
$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{|x-f(2)|}=f(n)$에 $n=3$을 대입하면

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{|x-1|}=f(3)$이므로 $\frac{f(3)}{2}=f(3)$이고, $f(3)=0$이다.

따라서 $f(x)=p(x-1)^2(x-3)$이라 할 수 있는데, (단, $p>0$)

이 경우 $f(2)=-p<0$이기 때문에 $f(2)=1$을 만족하지 않는다.

그러므로 $f(2)=3$이다.



2) $f(2)=3$인 경우

$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{|x-f(2)|}=f(n)$에 $n=3$을 대입하면

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{|x-3|}=f(3)$이고,

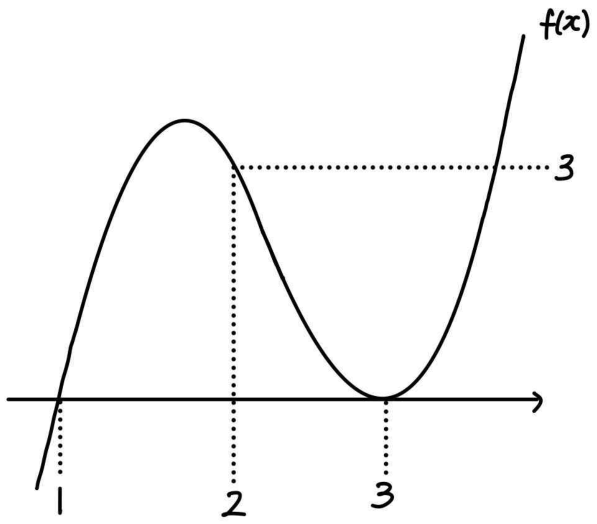
이 극한의 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 $f(3)=0$이다.

또한 $\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{-(x-3)}=\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f(3)=0$이므로

$f'(3)=0$이다.

$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{|x-f(2)|}=f(n)$에 $n=1$을 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{|x-3|}=f(1)$이므로 $\frac{f(1)}{2}=f(1)$이고, $f(1)=0$이다.



따라서 $f(x)=p(x-1)(x-3)^2$이라 할 수 있는데, (단, $p>0$)

이 경우 $f(2)=p=3$이다.

그러므로 $f(x)=3(x-1)(x-3)^2$이고, $f(5)=3\times 4\times 2^2=48$이다.

여담:

$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{|x-f(2)|}=f(n)$에 $f(2)$가 들어있다는 점을 고려해 $n=2$인 상황부터 출발하기.

20.

정답: 315

해설:

step1 식 변형

정수 k에 대해

$\log_2\sqrt{n}-\log_4(\sqrt{n+1}+1)=k$를 만족시킨다고 하자.

$\log_4 n-\log_4(\sqrt{n+1}+1)=\log_4\dfrac{n}{\sqrt{n+1}+1}=k$이므로,

$\dfrac{n}{\sqrt{n+1}+1}=4^k$이고, $\left(\dfrac{n}{4^k}\right)=\sqrt{n+1}+1$이다.

$\left(\dfrac{n}{4^k}\right)-1=\sqrt{n+1}$이므로 양변을 제곱해주면,

$\left(\dfrac{n}{4^k}\right)^2-2\times\left(\dfrac{n}{4^k}\right)+1=n+1$이므로 $\left(\dfrac{n}{4^k}\right)^2-2\times\left(\dfrac{n}{4^k}\right)=n$이고,

이 식을 자연수 n으로 나누어주면 $\dfrac{n}{16^k}=\dfrac{2}{4^k}+1$이므로

$n=2\times4^k+16^k$이다.

step2

$n=2\times4^k+16^k$이므로,

$k=0$이면 $n=2\times4^0+16^0=3$,

$k=1$이면 $n=2\times4^1+16^1=24$,

$k=2$이면 $n=2\times4^2+16^2=288$

$k=3$이면 $n=2\times4^3+16^3>1000$이다.

따라서 가능한 1000이하의 자연수 n값의 합은
$3+24+288=315$이다.

여담:

'할 수 있는 것'을 하며 식 변형을 하다 보면, $n=$(k에 관한 식)으로 변형 가능하다.

기출 다시보기: 2023학년도 6월 모의평가 21번

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

정답: 426

21.

정답: 25

해설:

step1

x에 대한 방정식 $\sin(ax+b)=t$을 만족시키는 가장 작은 양수 x를 $f(t)$라 했으므로, $\sin(af(t)+b)=t$이다.

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2f(1)=p$라 하면, (단, $f(t)$는 양수이므로 $p>0$)

$\sin\left(\dfrac{1}{2}ap+b\right)=1$, $\sin(ap+b)=-\dfrac{1}{2}$이다.

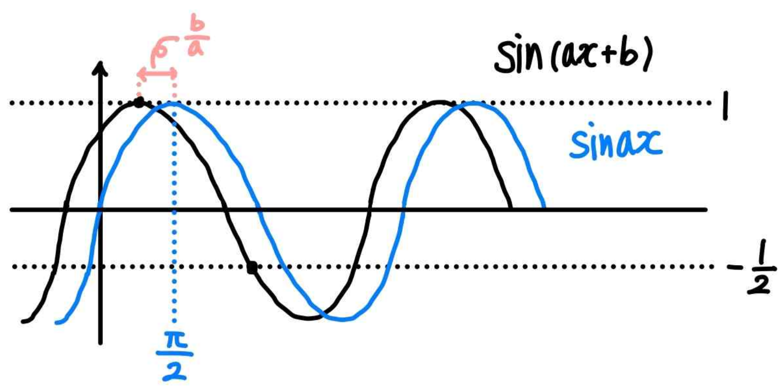
즉, $\sin(ax+b)=1$을 만족하는 가장 작은 양수 x가,

$\sin(ax+b)=-\dfrac{1}{2}$을 만족하는 가장 작은 양수 x보다 작으므로,

$0+2n\pi<\dfrac{b}{a}<\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ 또는 $\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi<\dfrac{b}{a}<2\pi+2n\pi$이다.

($y=\sin\left(a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right)$는 $y=\sin ax$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼 평행이동 시킨 것이고, 평행이동된 간격이 $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ (단, n은 0 이상의 정수)보다 커지게 되면 $\sin(ax+b)=1$을 만족하는 가장 작은 양수 x가 $\sin(ax+b)=-\dfrac{1}{2}$을 만족하는 가장 작은 양수 x보다 커지므로 평행이동된 간격인 $\dfrac{b}{a}$는

$0+2n\pi<\dfrac{b}{a}<\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$여야 한다.



또한 조금 더 평행이동을 시켜서, 평행이동된 간격이 $\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi<\dfrac{b}{a}<2\pi+2n\pi$인 경우도 주어진 조건을 만족시킨다.)

즉, 주어진 조건을 정리하면,

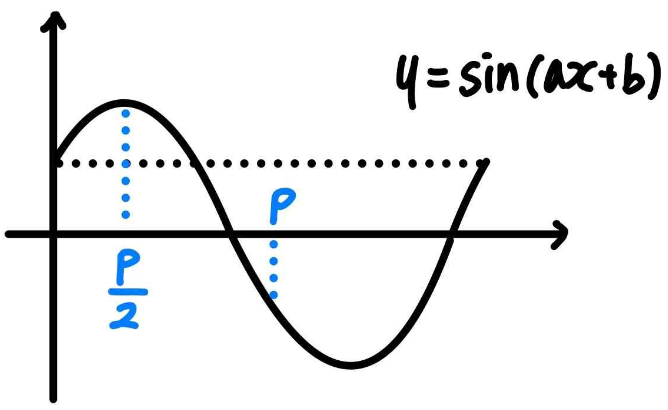
ㄱ) $2n\pi<\dfrac{b}{a}<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi<\dfrac{b}{a}<2\pi+2n\pi$(단, n은 0

이상의 정수)

ㄴ) $\sin\left(\frac{1}{2}ap+b\right)=1$, $\sin(ap+b)=-\frac{1}{2}$

ㄷ) $\sin(2a+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

step2 ㄴ 조건 해석



만약 $a\times\frac{p}{2}+b=\frac{\pi}{2}$, $ap+b=\frac{7\pi}{6}$라면, $b=-\frac{\pi}{6}$이므로 $0<b<2\pi$ 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $0<b<2\pi$를 만족시키는 b에 대해

$a\times\frac{p}{2}+b=\frac{5\pi}{2}$, $a\times p+b=\frac{19\pi}{6}$이고, $b=\frac{11\pi}{6}$, $ap=\frac{4\pi}{3}$이다.

step3 ㄷ 조건 해석

1) 만약 $2a+b=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2\pi}{3}$라면, a는 음수이기 때문에 $a>0$ 조건을 만족시키지 않는다.

2) 만약 $2a+b=\frac{7\pi}{3}$라면, $a=\frac{\pi}{4}$, $p=\frac{16}{3}$이었을 것이다.

이때의 a값은 ㄱ 조건을 만족시킨다.

3) 만약 $2a+b=\frac{8\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$, $\cdots$ 라면 $\sin(ax+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}$를 만족시키는 가장 작은 양수가 2가 아니므로, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\neq 2$이기 때문에 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a=\frac{\pi}{4}$, $p=\frac{16}{3}$이다.

step4

$a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{11\pi}{6}$이므로 $\frac{12(a+b)}{\pi}=25$이다.

여담:

$f(t)$는 단순히 x에 대한 방정식 $\sin(ax+b)=t$의 근이 아니라, '가장 작은' 근이므로 a, b, p가 이 조건을 만족하는지도 확인해야한다.

22.

정답: 169

해설:

step1 $g(x)$에 대한 식 세우기

$f'(x)<0$에서 $f(x)=\int_0^x g(t)dt$이고, 이 식을 미분해보면

$f'(x)=g(x)$이다.

따라서 $g(x)=\begin{cases} f'(x) & (f'(x)<0) \\ f(x) & (f'(x)\geq 0) \end{cases}$ 이다.

step2 $f'(3)=0,\ g(3)=9$ 해석

$g(3)=f'(3)$ 또는 $f(3)$인데,

이때 $f'(3)=0$이므로 $g(3)=f(3)=9$이다.

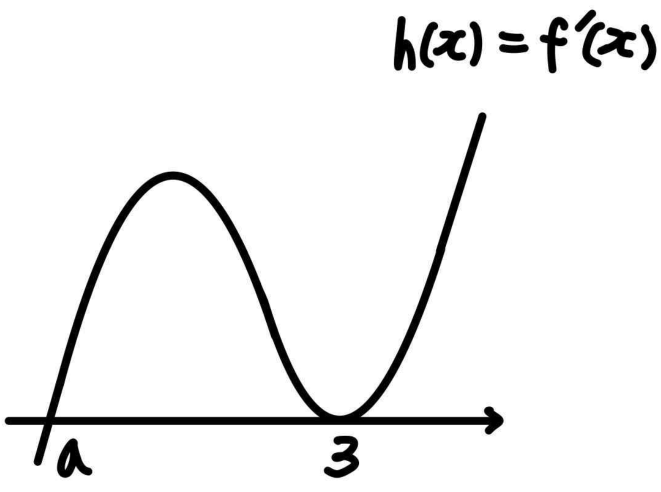
또한 $g(x)$는 연속함수인데 $x=3$ 주위에서 식이 바뀔 경우 불연속이 되기 때문에($f'(3)=0,\ f(3)=9,\ f(x)$는 다항함수), $x=3$ 주위에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f'(x)=h(x)$라 한다면,

$h(x)$는 삼차함수이고, $h(3)=0$이며 $x=3$ 주위에서 $h(x)\geq 0$이어야 하므로 $h'(3)=0$이다.

$h(x)$의 3이 아닌 근을 a라 할 때,

$h(x)=4p(x-a)(x-3)^2$이라 할 수 있다. (단, $p>0$이고, $a\geq 3$일 경우 $x=3$ 주위에서 $h(x)\leq 0$이므로 $a<3$)



따라서 $g(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ f(x) & (x\geq a) \end{cases}$ 이고,

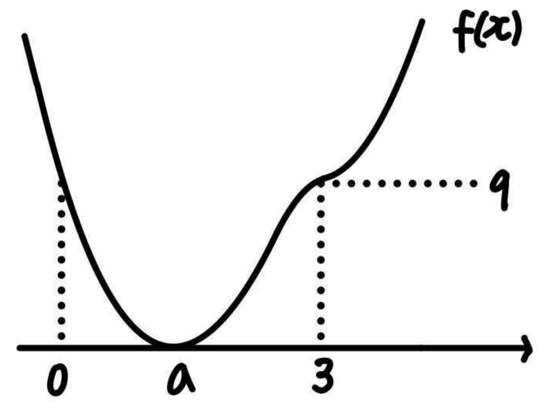
$h(x)=f'(x)=4p(x-a)(x-3)^2$이다.

step3 a 구하기

1) $a>0$인 경우

$g(x)$는 $x=a$에서 연속이어야 하므로 $f'(a)=f(a)$이다.

이때 $f'(a)=0$이므로 $f(a)=0$이고, $f(x)$의 개형은 아래와 같다.



또한 $a>0$이고 $f'(0)<0$이므로, $f(0)=\int_0^0 g(t)dx=0$이다.

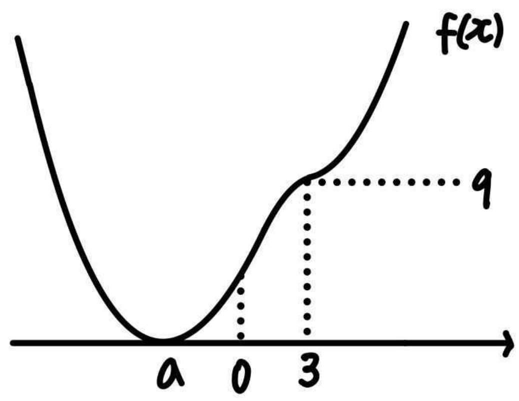
이때 위 그림에서 확인할 수 있듯이 $f(x)$는 $x=a$에서만 0이므로, $f(0)=0$은 불가능하다.

그러므로 $a\leq 0$이다.

2) $a<0$인 경우

$g(x)$는 $x=a$에서 연속이어야 하므로 $f'(a)=f(a)$이다.

이때 $f'(a)=0$이므로 $f(a)=0$이고, $f(x)$의 개형은 아래와 같다.



또한 $f(x)$는 다항함수이므로 $x=a$에서 연속이고, $\int_0^a g(t)dt=g(a)$이다.

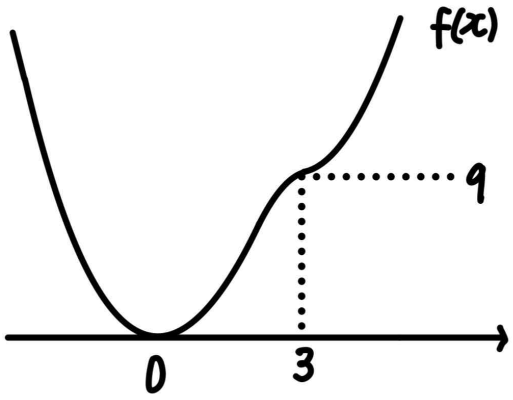
이때 $a<x<0$에서 $g(x)=f'(x)$이고, $g(a)=f(a)=0$이므로

$\int_0^a f'(x)dx=0$이어야 하는데, 위 그림에서도 알 수 있듯이

$f(a)\neq f(0)$이므로 $\int_0^a f'(x)dx\neq 0$이다.

따라서 $a=0$이다.

3) $a=0$인 경우



$f'(x)=4px(x-3)^2$, $f(x)=p(x+1)(x-3)^3+c$이다.

이때 $f(0)=0$, $f(3)=9$이므로 $c=9$이고, $p=\frac{1}{3}$이다.

또한 $g(x)=\begin{cases} \frac{4}{3}x(x-3)^2 & (x<0) \\ \frac{1}{3}(x+1)(x-3)^3+9 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이므로,

$g(5)=25$, $g(-3)=-144$이고, $g(5)-g(-3)=169$이다.

여담:

$g(x)$에 관한 식으로 해석하면 편하다.

단, $g(x)$에 대한 식으로 변형하며 $f(x)=\int_0^x g(t)dt$ $(f'(x)<0)$의 정보가 하나 사라진다는 점 놓치지 말기!

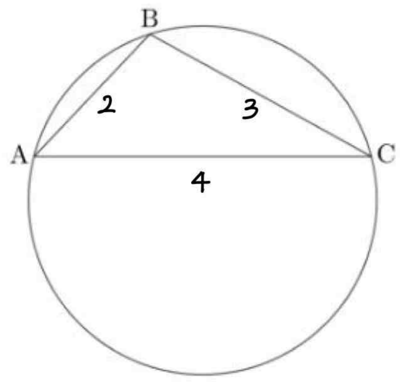
12회 정답

8	③	9	③	10	③	11	④	12	④
13	③	14	⑤	15	②	20	324	21	36
22	93								

8.

정답: ③

해설:



삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면,

$\cos B = \dfrac{(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 - (\overline{AC})^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}} = \dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3} = -\dfrac{1}{4}$ 이므로

$\sin B = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면

$r = \dfrac{\overline{AC}}{2\sin B} = \dfrac{4}{2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{8}{\sqrt{15}} = \dfrac{8\sqrt{15}}{15}$ 이다.

여담:

코사인법칙으로 한 각의 cos값을 구하고, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용해 sin값을 구한 다음, 사인법칙으로 외접원의 반지름 길이 구하기.

보통 세 변의 길이를 알고 코사인법칙을 적용할 때, 가장 긴 변의 대각에 대해 코사인법칙을 적용하는 게 계산이 편한 경우가 많다. (별 다른 이용할만한 정보가 없다면.)

9.

정답: ③

해설:

(가) 조건에 의해 $S_1=a_1=1$이고,

2이상의 자연수 n에 대해 $S_n=S_{n-1}+a_n$이다.

$$\sum_{k=1}^{8}S_k=S_1+(S_1+a_2)+S_3+(S_3+a_4)+S_5+(S_5+a_6)+S_7+(S_7+a_8)$$
$$=2(S_1+S_3+S_5+S_7)+a_2+a_4+a_6+a_8$$
$$=2\times(1^2+2^2+3^2+4^2)+(a_1+1)+(a_2+1)+(a_3+1)+(a_4+1)$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4+64=S_4+64=(S_3+a_4)+64=(2^2+a_2+1)+64$$
$$=a_2+69=(a_1+1)+69=71$$

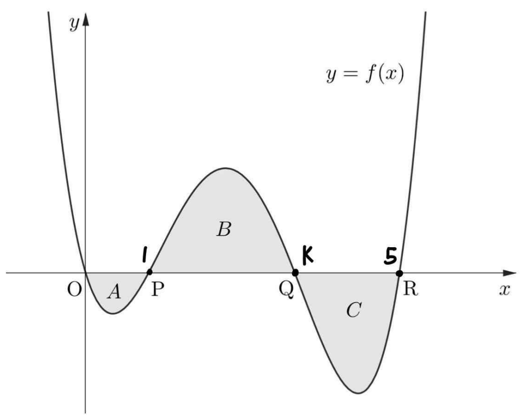
여담:

식 변형에 집중하기. 주어진 조건과는 상관없이 2이상의 자연수 n에 대해 $S_n=S_{n-1}+a_n$이 항상 성립한다는 점 이용하기.

10.

정답: ③

해설:



(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)이므로 $\int_0^5 f(x)dx=0$이다.

$$\int_0^5 x(x-1)(x-k)(x-5)dx$$

$$=\int_0^5 x(x-5)\{x^2-(k+1)x+k\}dx$$

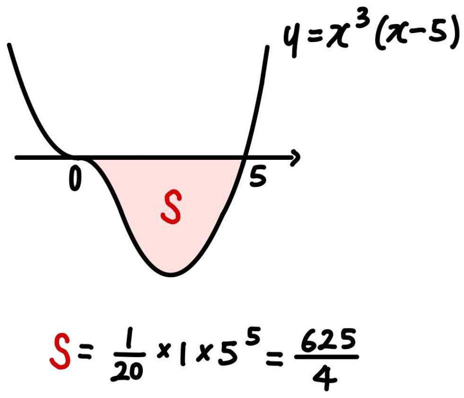
$$=\int_0^5 x^3(x-5)dx+\int_0^5 -(k+1)x^2(x-5)dx+\int_0^5 kx(x-5)dx$$

$$=-\frac{1}{20}\times5^5+(k+1)\times\frac{1}{12}\times5^4-k\times\frac{1}{6}\times5^3$$

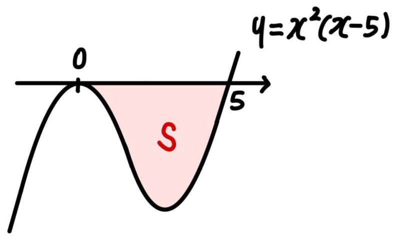
$$=-\frac{625}{4}+(k+1)\times\frac{625}{12}-k\times\frac{125}{6}=0$$ 이므로 $k=\frac{10}{3}$이다.

(넓이공식으로 적분 계산 줄이기

$$\int_0^5 x^3(x-5)dx=-\frac{625}{4}$$

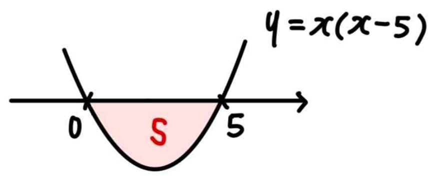


$$\int_0^5 x^2(x-5)dx=-\frac{625}{12}$$



$S=\frac{1}{12}\times1\times5^4=\frac{625}{12}$

$\int_0^5 x(x-5)dx=-\frac{125}{6}$



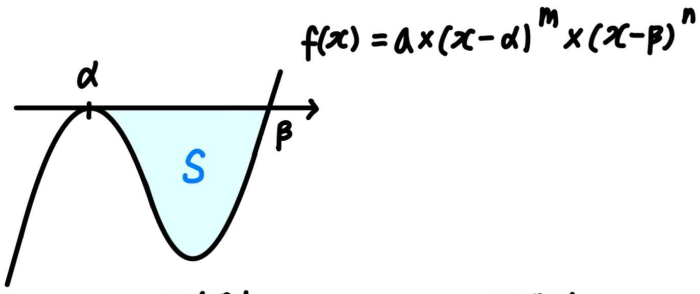
$S=\frac{1}{6}\times1\times5^3=\frac{125}{6}$

이때 부호에 신경써야한다.)

여담:

$f(x)=a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n$일 때, x축과 곡선 $f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\frac{m!\times n!}{(m+n+1)!}\times|a|\times(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ 이다. (단, $\alpha<\beta$)

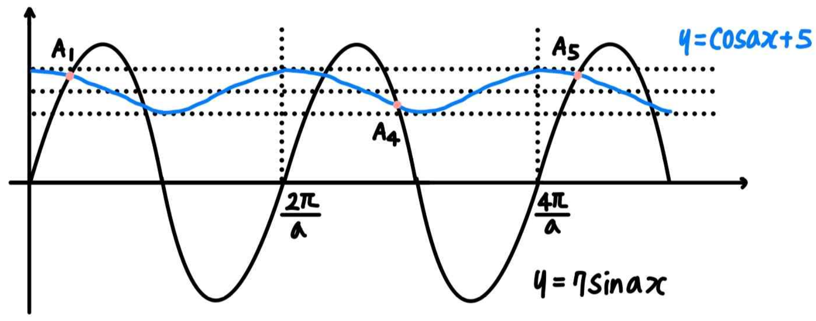


$S=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\times|a|\times(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

11.

정답: ④

해설:



step1 교점의 y좌표 구하기

두 곡선의 교점의 y좌표는 양수이다.

두 곡선의 교점의 x좌표는

등식 $7\sin ax=7\sqrt{1-\cos^2 ax}=\cos ax+5$를 만족시킨다.

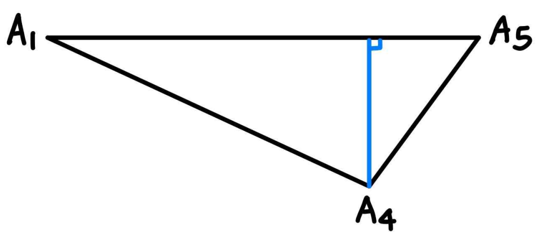
$49-49\cos^2 ax=\cos^2 ax+10\cos ax+25$이고,

위 식을 만족시키는 $\cos ax$의 값은 $-\frac{4}{5}$ 또는 $\frac{3}{5}$이다.

따라서 교점의 y좌표 중 하나는 $\cos ax+5=-\frac{4}{5}+5=\frac{21}{5}$,

다른 하나는 $\cos ax+5=\frac{3}{5}+5=\frac{28}{5}$이다.

step2



$\overline{A_1A_5}$=(주기)$\times2=\frac{2\pi}{a}\times2=\frac{4\pi}{a}$이고,

삼각형 $A_1A_4A_5$에서 $\overline{A_1A_5}$를 밑변으로 할 때

높이는 교점의 y좌표의 차이인 $\frac{28}{5}-\frac{21}{5}=\frac{7}{5}$이다.

따라서 삼각형 $A_1A_4A_5$의 넓이는,

$\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{a}\times\frac{7}{5}=7\pi$이므로, $a=\frac{2}{5}$이다.

여담:

그래프로 A_1, A_4, A_5의 위치를 대략적으로 파악해, A_1과 A_5가 두 주기만큼 차이난다는 점 파악하기.

즉, 각 점의 y좌표는 방정식을 통해 구한 $\cos ax$의 값으로 구해야 하지만, x좌표는 직접 구할 필요가 없는 것이다.

12.

정답: ④

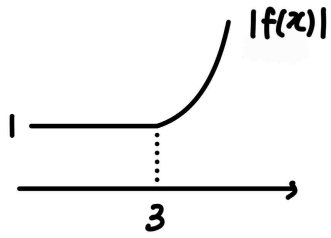
해설:

step1 최솟값 존재 유무로 $f(x)$의 식 구하기

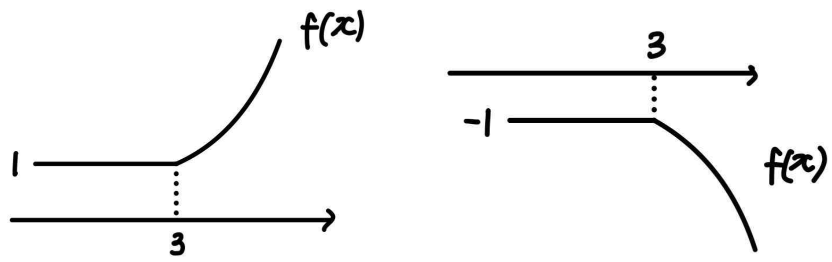
$f(x)$가 연속함수이기 때문에 $|f(x)|$도 연속함수이다.

따라서 $(k-2)^2=1$이고, $k=1$ 또는 $k=3$이다.

1) $k=3$인 경우



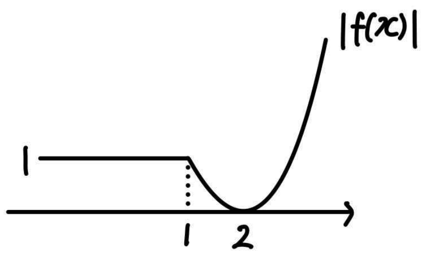
이 경우 $|f(x)|>0$이므로, 연속함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이거나 $f(x)<0$이다.



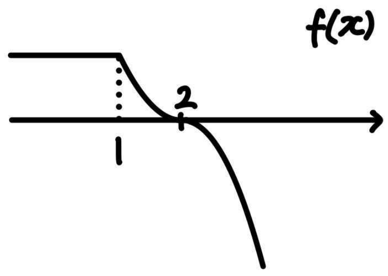
따라서 $F(x)$는 증가함수거나 감소함수이고, 최솟값이 존재하지 않는다.

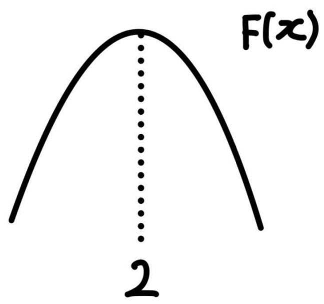
그러므로 $k=1$이다.

2) $k=1$인 경우

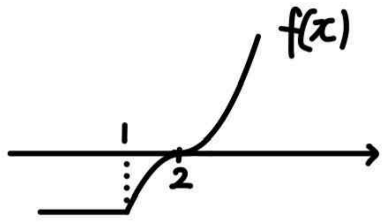


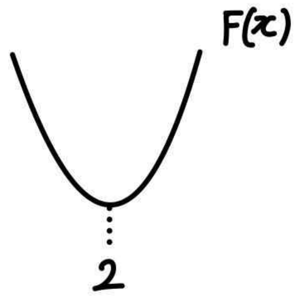
$F(x)$가 최솟값이 존재하려면, $f(x)$의 부호가 바뀌는 순간이 존재해야한다. (그렇지 않으면 1과 같은 이유로 $F(x)$는 증가함수 또는 감소함수가 되어 $F(x)$의 최솟값이 존재하지 않게 된다.)





만약 $f(x)$가 $x<2$에서 $f(x)>0$, $x>2$에서 $f(x)<0$이라면,
$F(x)$는 극댓값이자 최댓값을 가지고, 최솟값을 가지지 않는다.





따라서 $f(x)$는 $x<2$에서 $f(x)<0$, $x>2$에서 $f(x)>0$이다.

step2

$F(x)$의 최솟값은 $F(2)=0$이다.

$$F(-2)=F(2)-\int_{-2}^{2}f(x)dx$$

$$=0-\left\{\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx\right\}$$

$$=-\int_{-2}^{1}(-1)dx-\int_{1}^{2}-(x-2)^2dx$$

$$=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$ 이고,

$$F(5)=F(2)+\int_{2}^{5}f(x)dx$$

$$=0+\int_{2}^{5}(x-2)^2dx=9$$ 이므로

$$F(-2)+F(5)=\frac{10}{3}+9=\frac{37}{3}$$ 이다.

여담:

$f(x)$가 연속함수이기 때문에 $|f(x)|$도 연속함수라는 점
주목하기

$F(x)$가 최솟값을 가지려면 도함수인 $f(x)$의 부호가 바뀌는 점이
존재해야한다.

13.

정답: ③

해설:

step1 $n=7$인 **상황 관찰**

$a_n=a+(n-1)d$라 하자.

$$\sum_{k=1}^{7}(-1)^k\times a_k=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7$$

$$=3d-a_7=3d-(a+6d)=16$$

따라서 $a+3d=-16$, 즉 $a_4=-16$이다.

step2

1)

$a_m=a_4+(m-4)d=-16+(m-4)d=8$이므로 $(m-4)d=24$이다.

2)

m이 홀수일 경우 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\times a_k=\frac{m-1}{2}d-a_m=16$이므로
$(m-1)d=48$인데, 이 경우 $(m-4)d=24$을 이용하면
$m=7$이므로 $m\neq 7$이라는 조건을 만족하지 않는다.

따라서 m은 짝수이고, $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\times a_k=\frac{m}{2}\times d=16$이다.

1과 2에 의해 $(m-4)d=24$, $md=32$이므로 $m=16$, $d=2$이다.

step3

$a_4=a+3d=a+3\times 2=-16$이므로 $a=a_1=-22$이고,

따라서 $m-a_1=38$이다.

여담:

m이 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\times a_k=16$을 만족하는걸 해석할 때 $m\neq 7$
이용하기.

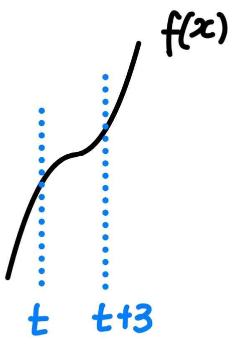
14.

정답: ⑤

해설:

ㄱ.

$k \leq 0$일 때 모든 실수 x에 대해 $f'(x)=3x^2-k \geq 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.



따라서 $[t, t+3]$에서 $f(x)$의 최댓값은 항상 $f(t+3)$이므로, $g(t)=f(t+3)$이다.

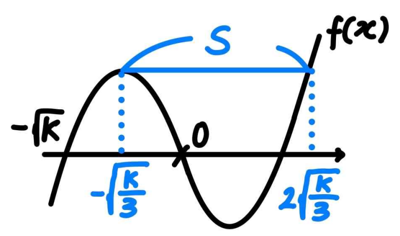
그러므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ.

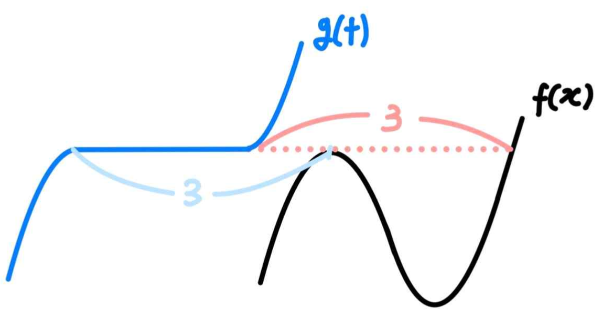
$\{g(t_1)-g(t_2)\} \times (t_1-t_2) < 0$은 $t_1 < t_2$일 때 $g(t_1) > g(t_2)$, $t_1 > t_2$일 때 $g(t_1) < g(t_2)$라는 의미이므로,

ㄴ에서 물어보는 것은 $k > 3$일 때 $g(t)$가 감소하는 구간이 존재하는지를 물어본 것이다.

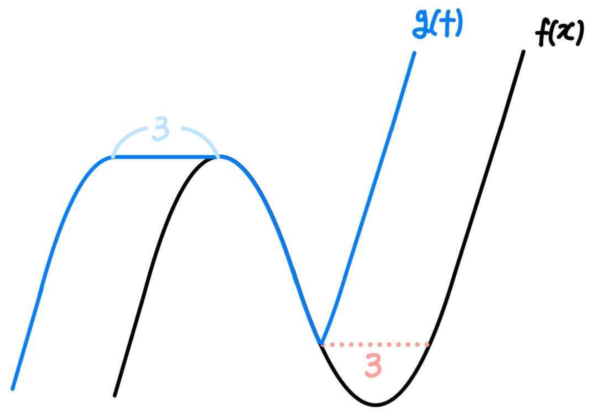
$S=2\sqrt{\frac{k}{3}}-\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ 이라 하자.



만약 $0 < S \leq 3$이라면, $g(t)$의 그래프에 감소하는 구간이 존재하지 않는다.



$S > 3$인 경우, $g(t)$의 그래프에 감소하는 구간이 존재한다.



따라서 ㄴ 조건을 만족하려면 $g(t)$의 그래프에 감소하는 구간이 존재해야 하므로 $S > 3$이어야 하고,

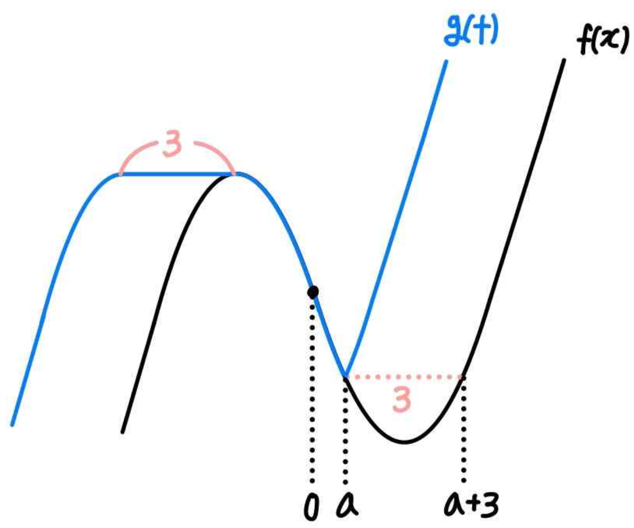
이때 $S=2\sqrt{\frac{k}{3}}-\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)=\sqrt{3k}$이므로

$k > 3$일 때 $S=\sqrt{3k} > 3$이다.

그러므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ.

$g(t) < -20$이려면 $S > 3$, 즉 $k > 3$이어야 한다.



1)

$f(a)=f(a+3)$이므로 $a^3-ka=(a+3)^3-k(a+3)$이고, 정리하면 $k=3a^2+9a+9$이다.

2)

$g(a)=f(a) < -20$이므로 $a^3-ka=a^3-a(3a^2+9a+9) < -20$이고,

정리하면 $2a^3+9a^2+9a-20=(a-1)(2a^2+11a+20) > 0$이다.

따라서 조건 2를 만족시키는 a의 범위는 $a > 1$이므로, $k=3a^2+9a+9 > 21$이다.

그러므로 자연수 k의 최솟값은 22이고, ㄷ은 참이다.

여담:

$g(t)$의 그래프 그리는 방법이 헷갈리는 사람은 지인선 n제 1회 21번을 참고하세요!

15.

정답: ②

해설:

1) n이 짝수인 경우

a의 값과 상관없이 $a^n \geq 0$이므로, $\log_{\left(\frac{n}{20}+\frac{1}{3}\right)}\frac{n}{10} \geq 0$이다.

또한 $a^n = \log_{\left(\frac{n}{20}+\frac{1}{3}\right)}\frac{n}{10}$을 만족시키는 모든 a의 값이 1보다 작으므로, $\log_{\left(\frac{n}{20}+\frac{1}{3}\right)}\frac{n}{10} < 1$이어야 한다.

즉, $0 \leq \log_{\left(\frac{n}{20}+\frac{1}{3}\right)}\frac{n}{10} < 1$을 만족해야한다.

1-1) $\frac{n}{20}+\frac{1}{3} > 1$인 경우 ($n > \frac{40}{3}$인 경우)

$0 \leq \log_{\left(\frac{n}{20}+\frac{1}{3}\right)}\frac{n}{10} < 1$이므로 $1 \leq \frac{n}{10} < \frac{n}{20}+\frac{1}{3}$이고,

정리하면 $10 \leq n < \frac{20}{3}$이다.

이를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

1-2) $0 < \frac{n}{20}+\frac{1}{3} < 1$인 경우 ($-\frac{20}{3} < n < \frac{40}{3}$인 경우)

$0 \leq \log_{\left(\frac{n}{20}+\frac{1}{3}\right)}\frac{n}{10} < 1$이므로 $\frac{n}{20}+\frac{1}{3} < \frac{n}{10} \leq 1$이고,

정리하면 $\frac{20}{3} < n \leq 20$이다.

따라서 $-\frac{20}{3} < n < \frac{40}{3}$과 $\frac{20}{3} < n \leq 20$을 동시에 만족하는 n의 범위는 $\frac{20}{3} < n < \frac{40}{3}$이고, 이를 만족하는 짝수인 n은 8과 10이다.

2) n이 홀수인 경우

a의 값에 따라 a^n의 값이 음수, 0, 양수가 모두 가능하므로 $\log_{\left(\frac{n}{20}+\frac{1}{3}\right)}\frac{n}{10} < 1$만 만족하면 된다.

2-1) $\frac{n}{20}+\frac{1}{3} > 1$인 경우 ($n > \frac{40}{3}$인 경우)

$\log_{\left(\frac{n}{20}+\frac{1}{3}\right)}\frac{n}{10} < 1$이므로 $\frac{n}{10} < \frac{n}{20}+\frac{1}{3}$이고,

정리하면 $n<\frac{20}{3}$이다.

이때 $n>\frac{40}{3}$과 $n<\frac{20}{3}$을 동시에 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

2-2) $0<\frac{n}{20}+\frac{1}{3}<1$인 경우 ($-\frac{20}{3}<n<\frac{40}{3}$인 경우)

$\log_{\left(\frac{n}{20}+\frac{1}{3}\right)}\frac{n}{10}<1$이므로 $\frac{n}{10}>\frac{n}{20}+\frac{1}{3}$이고,

정리하면 $n>\frac{20}{3}$이다.

따라서 $-\frac{20}{3}<n<\frac{40}{3}$과 $n>\frac{20}{3}$을 동시에 만족하는 n의 범위는 $\frac{20}{3}<n<\frac{40}{3}$이고, 이를 만족하는 홀수인 n은 7, 9, 11, 13이다.

따라서 가능한 모든 n의 값의 합은
$8+10+7+9+11+13=58$이다.

여담:

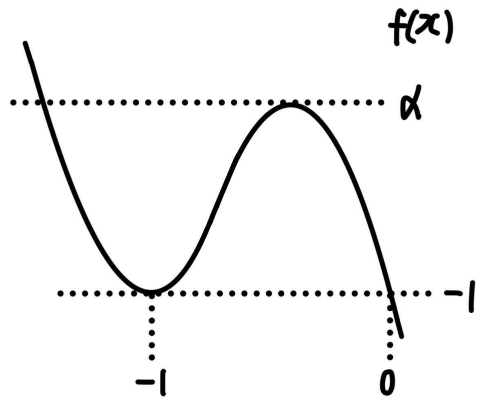
$\frac{n}{20}+\frac{1}{3}$, 즉 로그의 밑의 값의 범위에 따른 케이스분류가 필요하다. 네 이연님.

20.

정답: 324

해설:

1) $f(x)$의 최고차항 계수가 음수인 경우



$f(x)$의 극댓값을 α라 하자.

이때 $g(t)$의 식은 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<-1, t>\alpha)\\ 2 & (t=-1, t=\alpha)\\ 3 & (-1<t<\alpha)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)}{x+g(x)}=\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)}{x+1}=f(0) \qquad \cdots\cdots ㄱ$$

$$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)}{x+g(x)}=\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)}{x+3}=f(0) \qquad \cdots\cdots ㄴ$$

ㄱ에 의해 $f(-1)=0$이며, $f'(-1)=f(0)$이다.

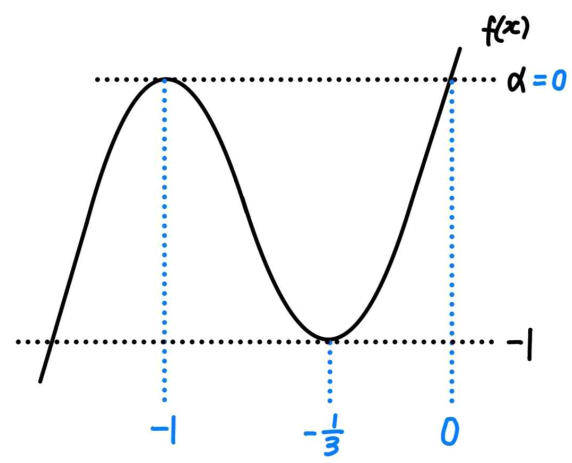
ㄴ에 의해 $\frac{f(-1)}{2}=f(0)$이다.

따라서 $f(-1)=f(0)=f'(-1)=0$이고,

$f(x)=px(x+1)^2$라 하면, (단, $p<0$)

$f(x)$의 극솟값은 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

2) $f(x)$의 최고차항 계수가 양수인 경우



$f(x)$의 극댓값을 α라 하자.

이때 $g(t)$의 식은 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<-1,\ t>\alpha)\\ 2 & (t=-1,\ t=\alpha)\\ 3 & (-1<t<\alpha)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)}{x+g(x)}=\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)}{x+1}=f(0) \qquad \cdots\cdots ㄷ$$

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)}{x+g(x)}=\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)}{x+3}=f(0) \qquad \cdots\cdots ㄹ$$

ㄷ에 의해 $f(-1)=0$이며, $f'(-1)=f(0)$이다.

ㄹ에 의해 $\frac{f(-1)}{2}=f(0)$이다.

따라서 $f(-1)=f(0)=f'(-1)=0$이고,

$f(x)=px(x+1)^2$라 하면, (단, $p>0$)

$f(x)$의 극솟값은 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{27}p=-1$이므로 $p=\frac{27}{4}$이다.

그러므로 $f(x)=\frac{27}{4}x(x+1)^2$이고, $f(3)=324$이다.

여담:

사실 $f(x)$의 최고차항 계수와 상관없이 $g(t)$의 식은 일정하므로, 어느 경우든 $f(x)$의 식은 $f(x)=px(x+1)^2$으로 정해진다.

(단, $p\neq 0$)

이 중 $f(x)$의 극솟값이 -1이 되게 하는 p는 $\frac{27}{4}$의 하나뿐이다.

21.

정답: 36

해설:

step1 (가) 조건 해석

$5\times3^{x-1}\le n\le 5\times3^{x+2}$을 x에 관한 정보로 바꿔보자.

$\log_3 5+(x-1)\le log_3 n\le log_3 5+(x+2)$

$-2+\log_3\frac{n}{5}\le x\le 1+\log_3\frac{n}{5}$

이때 $-2+\log_3\frac{n}{5}$와 $1+\log_3\frac{n}{5}$는 n의 값에 상관없이 항상 3만큼 차이난다.

부등식의 양 끝 간격이 3으로 유지되므로, m의 값은 n의 크기에는 영향을 받지 않고, $\log_3\frac{n}{5}$의 정수 여부에만 영향을 받는다.

$$m=\begin{cases}4 & (\log_3\frac{n}{5}\text{: 정수})\\ 3 & (\log_3\frac{n}{5}\text{: 정수}\times)\end{cases}$$

step2 (나) 조건 해석

1) $m=4$인 경우 ($\log_3\frac{n}{5}$가 정수인 경우)

mn의 값은 항상 짝수이므로, $mn\le 200$과 $\log_3\frac{n}{5}$이 정수임을 만족시키면 된다.

이 경우 $n=5\times3^k$ (단, k는 정수) 형태이며 n은 $n\le 50$인 자연수여야 한다.

이를 만족시키는 n의 값은 5×3^0, 5×3^1, 5×3^2 이다.

2) $m=3$인 경우 ($\log_3\frac{n}{5}$가 정수가 아닌 경우)

n은 짝수이며, $mn\le 200$, $\log_3\frac{n}{5}$가 정수가 아님을 만족시키면 된다.

이 경우 $n\neq 5\times3^k$ (단, k는 정수) 여야 하는데, 이는 n이 짝수 조건을 만족시키면 자연스럽게 만족되는 조건이다.

따라서 n은 $n\le\frac{200}{3}$인 짝수이다.

이를 만족시키는 n의 값은 2, 4, 6, 8, $\cdots$, 66이다.

step3

가능한 (m, n)의 개수는, $m=3$일 때는 3개, $m=4$일 때는 33개이므로 총 36개이다.

여담:

$$-2+\log_3\frac{n}{5} \le x \le 1+\log_3\frac{n}{5}$$

이 부등식의 양 끝 간격이 항상 3으로 일정하므로, 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 항상 3 또는 4이다.

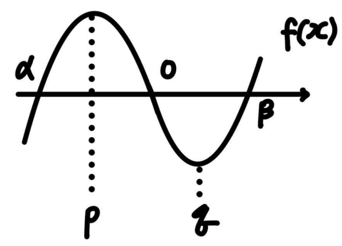
22.

정답: 93

해설:

step1 $h(t)$ 해석하기

$f(0)=0$, $f'(0)<0$이므로 $f(x)=0$의 서로 다른 실근은 무조건 3개 존재한다.

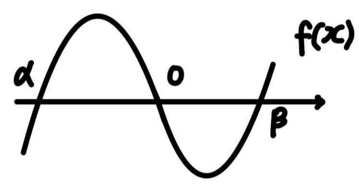


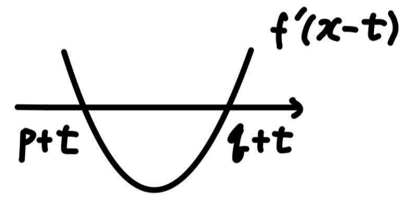
$f(x)=(x-\alpha)x(x-\beta)$, $f'(x)=3(x-p)(x-q)$라 하자.

(단, $\alpha<p<0<q<\beta$)

$g(x)=|f(x)f'(x-t)|=|3(x-\alpha)x(x-\beta)(x-p-t)(x-q-t)|$이므로,

$$h(t)=\begin{cases}\max\{\beta, q+t\} & (\beta \ne q+t) \\ \max\{0, p+t\} & (\beta=q+t\text{이고 } 0 \ne p+t) \\ \alpha & (\beta=q+t\text{이고 } 0=p+t)\end{cases}\text{ 이다.}$$





($\alpha<0<\beta$이고 $p+t<q+t$이므로, $x=\beta$ 또는 $x=q+t$에서 $g(x)$가 미분가능하지 않다면 어차피 $x=\alpha$, $x=0$ 또는 $x=p+t$가 $h(t)$가 될 수 없다.

β와 $q+t$가 겹치지 않을 때에는 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 최댓값이 무조건 β 또는 $q+t$이다. 이때 $p+t$와 α가 겹치든, $p+t$와 0이 겹치든 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 최댓값이 아니므로 신경쓸 필요 없다.

β와 $q+t$가 겹치는 경우, $g(x)$는 $x=\beta=q+t$에서 미분가능하다.

따라서 β와 $q+t$가 겹치고, 0과 $p+t$가 겹치지 않는 경우 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 최댓값은 무조건 0 또는 $p+t$이다.

β와 $q+t$가 겹치고, 0과 $p+t$가 겹치는 경우 $g(x)$는 $x=\beta=q+t$와 $x=0=p+t$에서 미분가능하다.

그러므로 β와 $q+t$가 겹치고, 0과 $p+t$가 겹치는 경우 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 최댓값은 α이다.)

step2 (가)/(나) 조건 해석하기

$$h(t)=\begin{cases}\max\{\beta, q+t\} & (\beta \neq q+t) \\ \max\{0, p+t\} & (\beta = q+t \text{ 이고 } 0 \neq p+t) \\ \alpha & (\beta = q+t \text{ 이고 } 0 = p+t)\end{cases} \text{ 이고}$$

$h(3)=6$이므로, $\beta=6$ 또는 $q+3=6$ 또는 $p+3=6$이다.

이때 $p<0$이므로 $p+3=6$은 불가능하다.

1) $\beta=6$일 경우

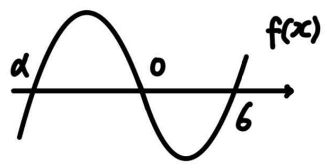
$h(3)=\max\{\beta, q+3\}=\max\{6, q+3\}=6$이므로 $q+3 \leq 6$이고,

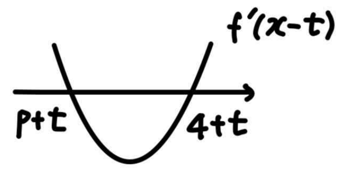
$\beta \neq q+3$이므로 $q<3$이다.

$h(t)$의 불연속점은 $\beta=q+t$인 순간 $h(t)$의 식이 바뀌며 생긴다.

(가) 조건에 의해 $h(t)$는 $t=2$에서 불연속이므로 $\beta=q+2$이다.

이때 $\beta=6$이므로 $q=4$이다.





따라서 $q \leq 3$을 만족하지 않으므로, $\beta \neq 6$이고, $q+3=6$이다.

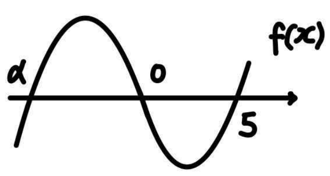
2) $q+3=6$인 경우 ($q=3$인 경우)

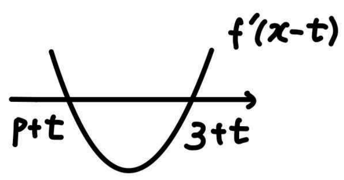
$h(3)=\max\{\beta, q+3\}=\max\{\beta, 6\}=6$이므로 $\beta \leq 6$이고,
$\beta \neq q+3$이므로 $\beta<6$이다.

$h(t)$의 불연속점은 $\beta=q+t$인 순간 $h(t)$의 식이 바뀌며 생긴다.

(가) 조건에 의해 $h(t)$는 $t=2$에서 불연속이므로 $\beta=q+2$이다.

이때 $q=3$이므로 $\beta=5$이다.





step3

$f(x)=(x-\alpha)x(x-5)$이고, $f'(q)=f'(3)=0$이므로
$f'(3)=(3-\alpha)\times 3+(3-\alpha)\times(3-5)+3\times(3-5)=-\alpha-3=0$이고,
$\alpha=-3$이다.

따라서 $f(x)=(x+3)x(x-5)$이다.

$$h(t)=\begin{cases}\max\{5, 3+t\} & (5 \neq 3+t) \\ \max\left\{0, -\dfrac{5}{3}+t\right\} & \left(5=3+t \text{ 이고 } 0 \neq -\dfrac{5}{3}+t\right) \\ \alpha & \left(5=3+t \text{ 이고 } 0=-\dfrac{5}{3}+t\right)\end{cases} \text{ 이고,}$$

$t=2$와 $t=\dfrac{5}{3}$은 동시에 만족 불가하므로 $h(t)$의 식은 정리하면 아래와 같다.

$$h(t)=\begin{cases}\max\{5, t+3\} & (t \neq 2) \\ \max\left\{0, t-\dfrac{5}{3}\right\} & (t=2)\end{cases}$$

그러므로

$h(-2)=\max\{5, 1\}=5$이고,

$h(2)=\max\left\{0, 2-\dfrac{5}{3}\right\}=\dfrac{1}{3}$이며

$f(8)=11\times 8\times 3=264$이므로

$h(-2)+h(2)\times f(8)=5+\dfrac{1}{3}\times 264=93$이다.

여담:

$h(t)$의 식 세우는 논리 잘 살펴보기.

'가장 오른쪽에 있는 미분 불가능점' 을 찾는다 생각하면 $h(t)$의 식을 세우기 무난할 것이다.

13회 정답

8	⑤	*9*	⑤	*10*	①	*11*	②	*12*	④
13	④	*14*	③	*15*	⑤	*20*	114	*21*	89
22	62								

8.

정답: ⑤

해설:

점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각을 시각 t_1이라 할 때,

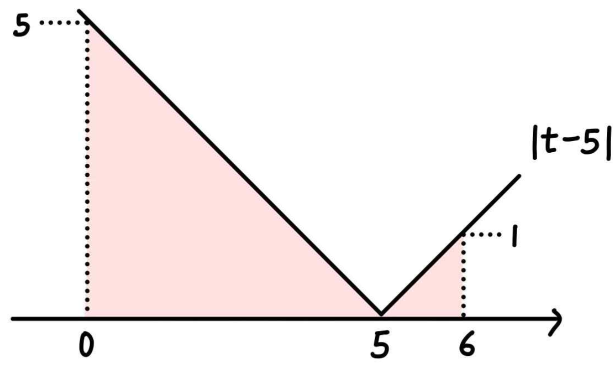
$t=0$일 때와 $t=t_1$일 때 점 P의 위치가 똑같으므로,

$\int_0^{t_1}(3-t)dt=0$이고 $t_1=6$이다.

따라서 $t=0$부터 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

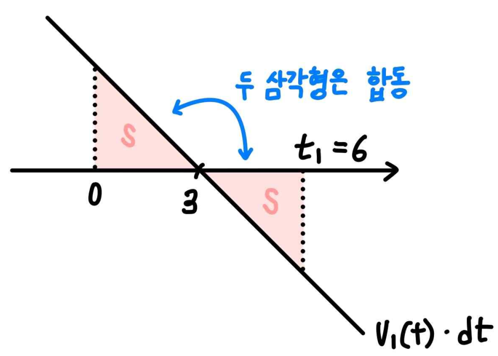
$\int_0^6|t-5|dt=\int_0^5(5-t)dt+\int_5^6(t-5)dt$

$=\frac{1}{2}\times5\times5+\frac{1}{2}\times1\times1=13$이다.



여담:

$\int_0^{t_1}(3-t)dt=0$을 생각할 때 넓이로 생각하면 쉽다.



직선의 적분 생각할 때 넓이로 해석하기.

9.

정답: ⑤

해설:

$a_n = A+(n-1)a$, $b_n = B+(n-1)b$라 하자.

$a_2 = b_3$, $a_5 = b_8$이므로 $a_5 - a_2 = b_8 - b_3$이고, 정리하면 $3a = 5b$이다.

$a = 5d$, $b = 3d$라 하자.

$a_6 = a_2 + 4a = b_3 + 20d$이고, $b_{10} = b_3 + 7b = b_3 + 21d$이므로,

$a_6 = b_{10} - 2$는 $b_3 + 20d = b_3 + 21d - 2$으로 바꿔쓸 수 있다.

따라서 $d = 2$이고, $a = 5d = 10$, $b = 3d = 6$이므로

$\{a_n\}$의 공차와 $\{b_n\}$의 공차의 합은 $a+b$와 같고,

$a+b = 16$이다.

여담:

$a_2 = b_3$, $a_5 = b_8$을 이용해 a_n과 b_n의 공차를 한 문자로 표현할 수 있다.

10.

정답: ①

해설:

step1

등식 $\int_1^x f(t)dt = \begin{cases} x^3 + bx^2 - 4x & (x < a) \\ x^4 - x^3 + c & (x \geq a) \end{cases}$ 의 좌변에 $x = 1$을 대입하면 0이 나온다.

만약 $a \leq 1$이라면 $0 = 1^4 - 1^3 + c$이므로 양수 c에 대해 위 등식이 성립하지 않는다.

따라서 $a > 1$이고, $0 = 1^3 + b \times 1^2 - 4 \times 1$이므로 $b = 3$이다.

step2

$x = a$에서 함수 $\int_1^x f(t)dt$는 연속이고 미분가능하다.

연속 조건을 사용하면 $a^3 + 3a^2 - 4a = a^4 - a^3 + c$이고, ……ㄱ

미분가능 조건을 이용하면 $3a^2 + 6a - 4 = 4a^3 - 3a^2$이다. ……ㄴ

ㄴ을 만족시키는 $a > 1$인 a의 값은 $a = 2$이고, 이를 ㄱ 식에 대입하면 $c = 4$이다.

따라서 $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$이므로 $a+b+c = 9$이다.

여담:

연속함수 $f(x)$에 대해, 함수 $\int_a^x f(t)dt$는 연속이고 미분가능하다.

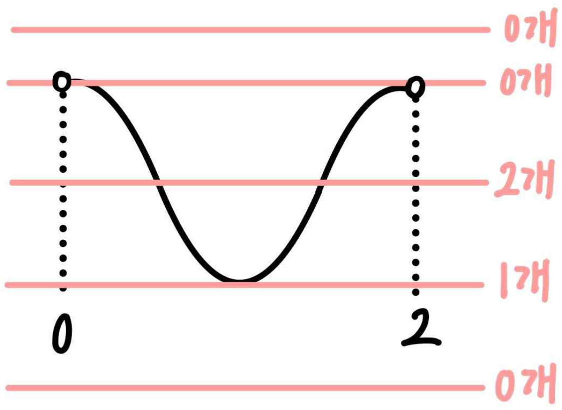
11.

정답: ②

해설:

step1

$\cos x = t$로 치환하자.



1) t에 대한 방정식 $2t^2+k^2t-k=0$의 서로 다른 실근이 0개인 경우

$0<x<2\pi$에서 $2\cos^2x+k^2\cos x-k=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

2) t에 대한 방정식 $2t^2+k^2t-k=0$의 서로 다른 실근이 1개인 경우

$0<x<2\pi$에서 $2\cos^2x+k^2\cos x-k=0$을 만족시키는 가능한 실수 x의 개수는 0개, 1개, 2개이다.

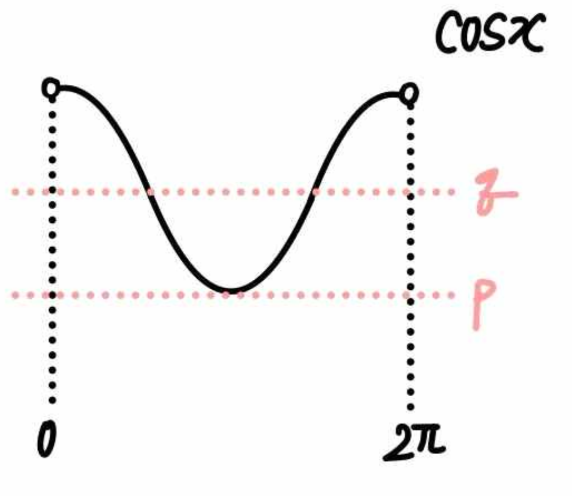
3) t에 대한 방정식 $2t^2+k^2t-k=0$의 서로 다른 실근이 2개인 경우

$0<x<2\pi$에서 $2\cos^2x+k^2\cos x-k=0$을 만족시키는 가능한 실수 x의 개수는 0개, 1개, 2개, 3개, 4개이다.

따라서 $0<x<2\pi$에서 $2\cos^2x+k^2\cos x-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3개이므로, $2t^2+k^2t-k=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

step2

$2t^2+k^2t-k=0$의 서로 다른 두 실근을 p, q라 하자. (단, $p<q$)



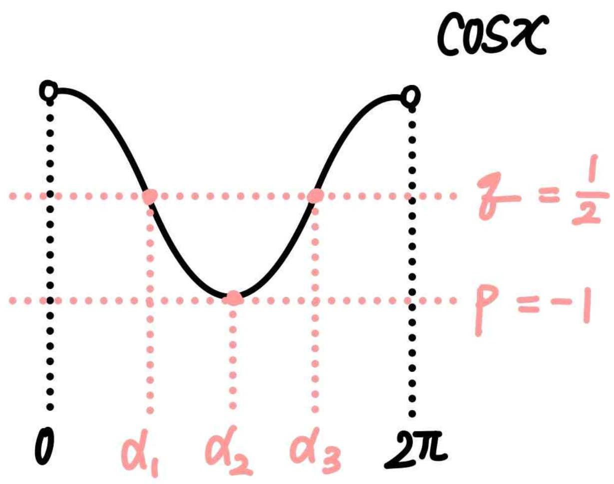
$2\cos^2x+k^2\cos x-k=0$을 만족시키는 실수 x의 개수가 3개이려면, $p=-1$이어야 한다.

따라서 t에 대한 방정식 $2t^2+k^2t-k=0$의 한 실근이 $t=p=-1$이므로, $2\times(-1)^2+k^2\times(-1)-k=0$이고, $k=-2$ 또는 $k=1$이다.

만약 $k=-2$라면, t에 대한 방정식 $2t^2+k^2t-k=2t^2+4t+2=0$의 서로 다른 실근은 2개여야 하는데 1개뿐이기 때문에 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $k=1$이고, t에 대한 방정식 $2t^2+k^2t-k=2t^2+t-1=0$의 -1이 아닌 실근 q는 $q=\frac{1}{2}$이다.

step3



$\cos\alpha_1=\cos\alpha_3=q=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha_3=\frac{5}{3}\pi$이고,

따라서 $\alpha_3\times\cos\alpha_1=\frac{5}{3}\pi\times\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\pi$이다.

여담:

합성함수로 해석하기.

$\cos x=t$라 하고, $2t^2+k^2t-k=0$의 실근을 p, q라 하자. (단, p와 q는 동일한 값일수도 있고, 존재하지 않을 수도 있다.)

$0<x<2\pi$에서 $2\cos^2 x+k^2\cos x-k=0$을 만족시키는 가능한 실수 x는, $0<x<2\pi$에서 $\cos x=p$와 $\cos x=q$의 서로 다른 모든 실근과 같다.

그러므로 $\cos x=t$로 치환해, 주어진 구간에서 근이 3개인 경우를 찾자.

12.

정답: ④

해설:

step1

접점의 좌표를 $-a$, a라 하자. (단, $a>0$)

$f'(x)=3x^2+1$이므로 $3a^2+1=t$이다.

점 $(a, f(a))$에서 곡선 $f(x)$에 접하는 접선의 방정식은

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$이고, 정리하면

$y=(3a^2+1)(x-a)+f(a)=(3a^2+1)(x-a)+a^3+a$이다.

이 직선과 $(-a, f(-a))$ 사이의 거리는

$\dfrac{|(3a^2+1)\times(-a-a)+(a^3+a)+(a^3+a)|}{\sqrt{(3a^2+1)^2+(-1)^2}}=g(t)$이다.

즉, $t=3a^2+1$이고, $g(t)=\dfrac{4a^3}{\sqrt{(3a^2+1)^2+1}}$이다.

step2

$t\to\infty$일 때 $a\to\infty$이고,

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\{g(t)\}^2}{t}=\lim_{a\to\infty}\frac{16a^6}{(3a^2+1)\{(3a^2+1)^2+1\}}=\frac{16}{27}$이다.

$t\to1+$일 때 $a\to0+$이고,

$\displaystyle\lim_{t\to1+}\frac{\{g(t)\}^2}{(t-1)^3}=\lim_{a\to0+}\frac{16a^6}{(3a^2)^3\{(3a^2+1)^2+1\}}=\frac{8}{27}$이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\{g(t)\}^2}{t}+\lim_{t\to1+}\frac{\{g(t)\}^2}{(t-1)^3}=\frac{16}{27}+\frac{8}{27}=\frac{8}{9}$이다.

여담:

접점의 좌표를 a, $-a$라 할 때,

주어진 t에 대한 극한을 a에 대한 극한으로 바꿔서 해석하기.

13.

정답: ④

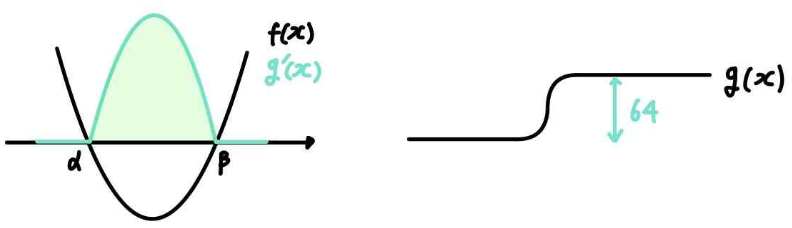
해설:

step1

$g'(x)=|f(x)|-f(x)=\begin{cases}0 & (f(x)>0)\\ -2f(x) & (f(x)\le 0)\end{cases}$ 이므로,

만약 모든 실수 x에 대해 $f(x)\ge 0$이라면 $g(x)$는 최댓값과 최솟값이 동일한 상수함수가 된다.

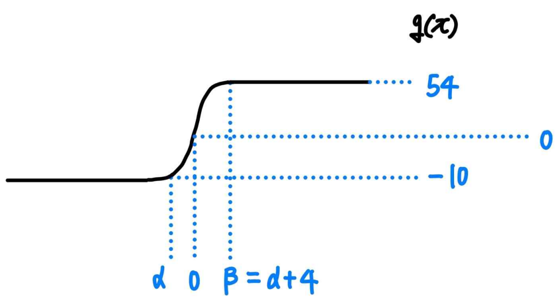
따라서 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 그 두 실근을 α, β라 하자. (단, $\alpha<\beta$)



$g(x)$의 최댓값과 최솟값의 차이는 $g'(x)$의 그래프에서 곡선 $g'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로,

$64=\frac{1}{6}\times|-2\times3|\times(\beta-\alpha)^3$이고 정리하면 $\beta-\alpha=4$이다.

step2



$f(x)=3(x-\alpha)(x-\alpha-4)$라 하자.

이때 $g(\alpha)=-10$, $g(0)=0$이므로 $\alpha<0$이고,

$g(0)-g(\alpha)=\int_\alpha^0 g'(x)dx=\int_\alpha^0 -2f(x)dx$

$=\int_0^\alpha 6(x-\alpha)(x-\alpha-4)dx=\int_0^\alpha 6(x-\alpha)^2dx-24\int_0^\alpha(x-\alpha)dx$

$=2\alpha^3+12\alpha^2=10$이므로

$\alpha<0$을 만족시키는 α의 값은 $\alpha=-1$이다.

따라서 $f(x)=3(x+1)(x-3)$이고, $f(5)=36$이다.

여담:

1. $g'(x)=|f(x)|-f(x)=\begin{cases}0 & (f(x)>0)\\ -2f(x) & (f(x)\le 0)\end{cases}$ 이므로 $g(x)$는 x값이 증가함에 따라 유지하거나 증가한다.

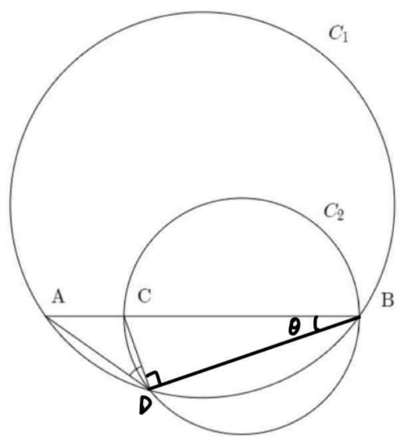
따라서 최댓값과 최솟값이 존재하려면 $f(x)$의 실근이 2개여야 한다.

2. $\int_0^\alpha 6(x-\alpha)(x-\alpha-4)dx$ 적분 계산 과정을 줄이기 위해, $(x-\alpha)(x-\alpha-4)$를 $(x-\alpha)^2-4(x-\alpha)$라는 $x-\alpha$에 관한 식으로 분리해 계산하자. (적분 구간에 α가 포함되어 있기 때문에 $x-\alpha$에 관한 식으로 분해)

14.

정답: ③

해설:



선분 BC는 원 C_2의 지름이므로 $\angle \mathrm{BDC} = \frac{\pi}{2}$이다.

주어진 조건에 의해 $\cos(\angle \mathrm{ADC}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$이므로

$\sin(\angle \mathrm{ADC}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

$\sin(\angle \mathrm{ADB}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \angle \mathrm{ADC}\right) = \cos(\angle \mathrm{ADC})$이므로

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의해

원 C_1의 반지름의 길이는

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\sin(\angle \mathrm{ADB})} = \frac{4}{2 \times cos(\angle \mathrm{ADC})} = \frac{4}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{6}$이다.

따라서 $p = \sqrt{6}$이다.

$\angle \mathrm{CBD} = \theta \ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$이라 하면,

$\angle \mathrm{BDC} = \frac{\pi}{2}$로부터 $\overline{\mathrm{BD}} = 3\cos\theta$이고

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{AD}} = 2 \times \sqrt{6} \times \sin\theta$이다.

$\cos(\angle \mathrm{ADB}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \angle \mathrm{ADC}\right) = -\sin(\angle \mathrm{ADC})$이고,

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$(\overline{\mathrm{AB}})^2 = (\overline{\mathrm{AD}})^2 + (\overline{\mathrm{BD}})^2 - 2 \times (\overline{\mathrm{AD}}) \times (\overline{\mathrm{BD}}) \times \cos(\angle \mathrm{ADB})$이다.

$4^2 = (2\sqrt{6}\sin\theta)^2 + (3\cos\theta)^2 - 2 \times (2\sqrt{6}\sin\theta) \times (3\cos\theta) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

이고,

$16 = 16\sin^2\theta + 16\cos^2\theta$이므로 위 식을 정리하면

$8\sin^2\theta + 12\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta - 7\cos^2\theta$

$= (2\sqrt{2}\sin\theta + 7\cos\theta)(2\sqrt{2}\sin\theta - \cos\theta) = 0$ 이다.

이때 $\theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}}{4}$이고, $\sin\theta = \frac{1}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{AD}} = 2\sqrt{6}\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3}$이다.

따라서 $q = \frac{\sqrt{2}}{4}$이고, $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$이다.

그러므로 $p \times q^2 \times r^3 = \sqrt{6} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \times \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}$이다.

여담:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$임을 역으로 이용해 $16 = 16\sin^2\theta + \cos^2\theta$로 분해하기.

위 방식을 이용해 방정식을 해결하는 부분 빼고는 주어진 박스의 흐름을 따라가면 무난하게 해결되는 문제이다.

15.

정답: ⑤

해설:

step1

$f(x)$의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로, $g(t)=-tf'(t)+f(t)$이다.

따라서 $\frac{g(t)}{f(t)}=\frac{-tf'(t)+f(t)}{f(t)}=1-\frac{tf'(t)}{f(t)}$이다.

즉,
$\left\{\lim_{t\to\infty}-\frac{tf'(t)}{f(t)}+1 , \lim_{t\to 0}-\frac{tf'(t)}{f(t)}+1 , \lim_{t\to 1}-\frac{tf'(t)}{f(t)}+1\right\}$
$=\{-2,\ -1,\ 2\}$이고,

$\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)} , \lim_{t\to 0}\frac{tf'(t)}{f(t)} , \lim_{t\to 1}\frac{tf'(t)}{f(t)}\right\}=\{-1, 2, 3\}$ 이다.

각 극한의 의미를 생각해보자.

$f(x)$의 최고차항의 차수를 n이라 하면, (단, n은 자연수)

$\lim_{t\to\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{t\times nt^{n-1}}{t^n}=n$이다.

즉, $\lim_{t\to\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)}$의 극한값은 다항함수 $f(x)$의 최고차항의 차수를 의미한다.

또한, $\lim_{t\to 0}\frac{tf'(t)}{f(t)}$의 극한값은 $f(x)$가 x를 인수로 최대 몇 개 가지고 있는지를 의미한다.

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)}$와 $\lim_{t\to 0}\frac{tf'(t)}{f(t)}$의 극한값은 -1이 될 수 없으므로, $\lim_{t\to 1}\frac{tf'(t)}{f(t)}=-1$이다.

만약 $\lim_{t\to\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)}=2$이고 $\lim_{t\to 0}\frac{tf'(t)}{f(t)}=3$이라면, $f(x)$는 이차함수이며 x를 인수로 3개 가지고 있어야 하는데,
다항함수에서 이는 불가능하다.

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)}=3$이고 $\lim_{t\to 0}\frac{tf'(t)}{f(t)}=2$이므로, $f(x)$는 삼차함수이고 x를 인수로 2개 가지고 있다.

step2

$f(x)=x^2(x-\alpha)$라 하자. (단, $\alpha\neq 0$)

$\lim_{t\to 1}\frac{tf'(t)}{f(t)}=-1$이므로,

$\lim_{t\to 1}\frac{tf'(t)}{f(t)}=\lim_{t\to 1}\frac{t(3t^2-2\alpha t)}{t^2(t-\alpha)}=\lim_{t\to 1}\frac{3t-2\alpha}{t-\alpha}=\frac{3-2\alpha}{1-\alpha}=-1$이므로
$\alpha=\frac{4}{3}$이다.

그러므로 $f(x)=x^2\left(x-\frac{4}{3}\right)$이고, $f(6)=6^2\left(6-\frac{4}{3}\right)=168$이다.

여담:

(다항함수에 한해서)

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}$의 극한값은 $f(x)$의 최고차항의 차수를 의미한다.

$f(x)$의 최고차항의 차수를 n이라 하면,

(단, n은 $n\geq 1$인 자연수)

$\lim_{x\to\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\times nx^{n-1}}{x^n}=n$이기 때문에

$\lim_{x\to\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}$의 극한값은 $f(x)$의 최고차항의 차수를 의미한다.

2. $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$의 극한값은 $f(x)$가 $(x-a)$를 인수로 최대 몇 개 가지고 있는지를 의미한다.

다항함수 $f(x)$가 있을 때, $f(x)=(x-a)^n\times Q(x)$라 하자.

(단, $Q(a)\neq 0$, n은 0 이상의 정수)

2-1) $n=0$일 때, $f(x)=Q(x)$이고, $Q(a)\neq 0$이므로

$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)Q'(x)}{Q(x)}=0$이다.

따라서 $n=0$일 때 $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=n=0$이 성립한다.

2-2) n이 자연수일 때, $f(x)=(x-a)^n\times Q(x)$이고
$Q(a)\neq 0$이므로

$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\{n(x-a)^{n-1}Q(x)+(x-a)^nQ'(x)\}}{(x-a)^nQ(x)}$
$=\lim_{x\to a}\left\{n+\frac{(x-a)Q'(x)}{Q(x)}\right\}=n$이다.

따라서 n이 자연수일 때 $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=n$이 성립한다.

그러므로 $f(x)$가 다항함수일 때 $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$의 극한값은 $f(x)$가 $(x-a)$를 인수로 최대 몇 개 가지고 있는지를 의미한다.

20.

정답: 114

해설 1: 전부 다 나열...

n	규칙	a_n	S_n
1	(가)	1	$S_1=1$
2	(가)	$\frac{1}{2}$	$S_2=1+\frac{1}{2}$
3	(나)	$\frac{3}{64}$	$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{3}{64}$
4	(가)	$\frac{1}{4}$	$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{19}{64}$
$5\sim7$	(나)	$\frac{3}{64}$	$S_7=1+\frac{15}{16}$
8	(가)	$\frac{1}{8}$	$S_8=2+\frac{1}{16}$
$9\sim15$	(나)	$\frac{3}{64}$	$S_{15}=2+\frac{25}{64}$
16	(가)	$\frac{1}{16}$	$S_{16}=2+\frac{29}{64}$
$17\sim31$	(나)	$\frac{3}{64}$	$S_{31}=3+\frac{5}{64}$
32	(가)	$\frac{1}{32}$	$S_{32}=3+\frac{3}{16}$
$33\sim63$	(나)	$\frac{3}{64}$	$S_{63}=4+\frac{41}{64}$
64	(가)	$\frac{1}{64}$	$S_{64}=4+\frac{21}{32}$

따라서 $n=65$부터 $n=127$까지 $a_n=\frac{3}{64}$이므로

$\sum_{k=1}^{m}a_k=(m-64)\times\frac{3}{64}+4+\frac{21}{32}=7$이고, $m=114$이다.

해설 2: 수식으로 해결하기

만약 (가) 조건을 따라 $a_n\le\frac{1}{128}$인 항이 나온다면,

$\sum_{k=1}^{m}a_k$의 값이 자연수가 될 수 없다.

($n\ge128$인 경우를 생각해보자.

$n\ge128$ 이후 (가) 조건을 충족한 가장 큰 n의 값을 p라 하자. ($n\ge128$이므로 $p\ge7$)

$n\ge128$ 이후 (가) 조건을 충족한 항들을 모두 더한다면,

$\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^p}=\dfrac{\frac{1}{2^p}\times(2^{p-6}-1)}{2-1}=\frac{2^{p-6}-1}{2^p}$인데, $p\ge7$이므로

$\frac{2^{p-6}-1}{2^p}$의 값은 자연수가 될 수 없다.

따라서 여기에 $\frac{3}{64}$를 아무리 많이 더하더라도 $n\ge128$인 경우 $\sum_{k=1}^{m}a_k$의 값이 자연수가 될 수 없다.)

따라서 m 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge\frac{1}{64}$이고,

$m\le127$이다.

또한

$\sum_{k=1}^{64}a_k=\frac{3}{64}\times64+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64})-\frac{3}{64}\times7$

$=\frac{149}{32}<7$이므로 $m>64$이다.

따라서 $64<m\le127$일 때

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{3}{64}\times m+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64})-\frac{3}{64}\times7=7$이므로 $m=114$이고, $64<m\le127$을 만족한다.

그러므로 $m=114$이다.

여담:

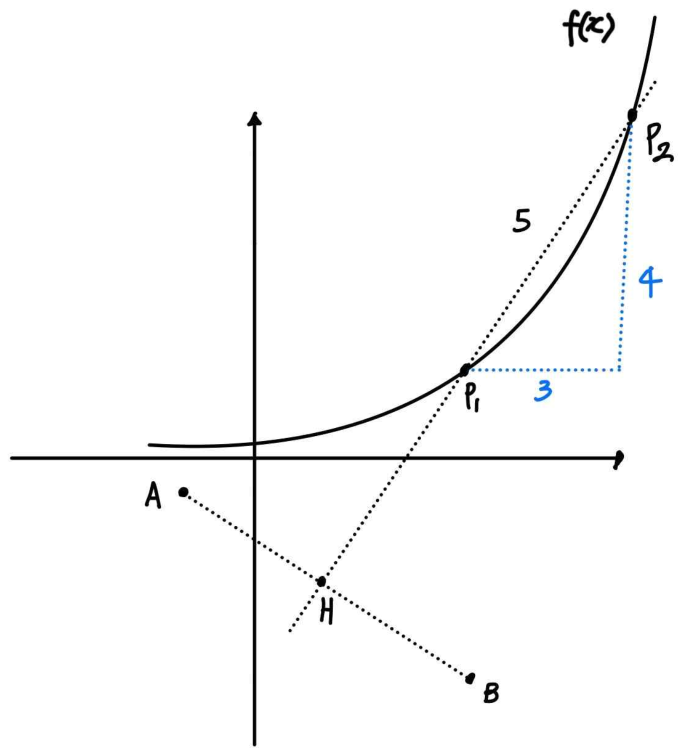
모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이기 때문에 n이 증가함에 따라 S_n도 증가하고, 따라서 $S_n=S_k$을 만족하는 k가 아닌 자연수 n은 존재하지 않는다.

21.

정답: 89

해설:

(점 P_1의 y좌표)<(점 P_2의 y좌표)라 하자.



step1

점 P_1과 P_2는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있다.

선분 AB의 중점을 점 H라 할 때,

$[\triangle ABP_2]-[\triangle ABP_1]=\dfrac{25}{2}$이므로,

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{HP_2}-\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{HP_1}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times(\overline{HP_2}-\overline{HP_1})=\dfrac{25}{2}$이다.

이때 선분 AB의 길이는,

$\overline{AB}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\left\{\left(-\dfrac{7}{2}\right)-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2}=5$이므로

$\overline{HP_2}-\overline{HP_1}=5$이고, $\overline{P_1P_2}=5$이다.

또한 선분 AB의 기울기가 $\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\left(-\dfrac{7}{2}\right)}{(-1)-3}=-\dfrac{3}{4}$이므로, 그 수직이등분선인 직선 HP_2의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이다.

따라서 점 P_1과 P_2의 x좌표 차이를 $3t$, y좌표 차이는 $4t$라 하면,

$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(3t)^2+(4t)^2}=5t=5$이므로 $t=1$이고,

점 P_1과 P_2의 x좌표 차이는 3, y좌표 차이는 4이다.

step2

점 P_1의 좌표를 (a, b)라 하면, 점 P_2의 좌표는 $(a+3, b+4)$이다.

점 P_1과 점 P_2는 함수 $f(x)$ 위의 점이므로,

$b=3^{\frac{1}{3}a-k}$ 이고, $b+4=3^{\frac{1}{3}(a+3)-k}$ 이다.

따라서 $\dfrac{b}{b+4}=\dfrac{3^{\frac{1}{3}a-k}}{3^{\frac{1}{3}(a+3)-k}}$이므로 $\dfrac{b}{b+4}=\dfrac{1}{3}$이고

$b=3^{\frac{1}{3}a-k}=2$이다.

또한 직선 HP_2의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이고, 점 H의 좌표는

$\left(\dfrac{(-1)+3}{2}, \dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{7}{2}\right)}{2}\right)=(1, -2)$이므로,

직선 HP_2의 방정식은 $y=\dfrac{4}{3}(x-1)-2$이다.

이때 직선 HP_2위에 점 P_1이 있으므로, $b=2=\dfrac{4}{3}(a-1)-2$이다.

따라서 $a=4$이다.

그러므로 $3^{\frac{1}{3}a-k}=3^{\frac{4}{3}-k}=2$이므로 $3^{4-3k}=8$이고

$3^{3k}=27^k=\dfrac{81}{8}$이므로 $p=8$, $q=81$이고, $p+q=8+81=89$이다.

여담:

선분 P_1P_2의 길이와 기울기를 이용해, 점 P_1과 점 P_2의 x좌표 차와 y좌표 차를 구할 수 있다.

22.

정답: 62

해설:

step1

$\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 근은,

$f(g(x))=g(x)$의 근 또는 $f(x)=x$의 근이다.

$f(x)=x$의 근을 $x_1,\cdots,\ x_n$이라 하자. (단, n은 3이하의 자연수)

$f(g(x))=g(x)$에서 $g(x)=s$로 치환해주면, $f(s)=s$이고, 이때 $f(s)=s$의 모든 실근은 $x_1,\cdots,\ x_n$이다.

따라서 $f(g(x))=g(x)$의 모든 실근은 $g(x)=x_1,\ \cdots,\ x_n$의 모든 실근과 같다.

즉, $\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 서로 다른 모든 실근은,

$f(x)=x$의 모든 실근 $x_1,\cdots,\ x_n$이거나, $g(x)=x_1,\cdots,\ x_n$의 서로 다른 모든 실근이다.

step2

만약 삼차함수 $f'(x)$가 증가함수였다면, 모든 실수 t에 대해 $g(t)=1$이다.

이때 $\alpha_2=1$이 $f(x)=x$의 실근이었다면,

$g(x)=1$의 모든 실근은 실수 전체 x이고,

이는 $\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 실근이기 때문에

$\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 실근의 개수는 유한하지 않다.

또한 $\alpha_2=1$이 $g(x)=x_1,\cdots,\ x_n$의 실근이었다면,

$g(\alpha_2)=g(1)=x_k=1$인데(단, k는 $1\le k\le n$인 자연수),

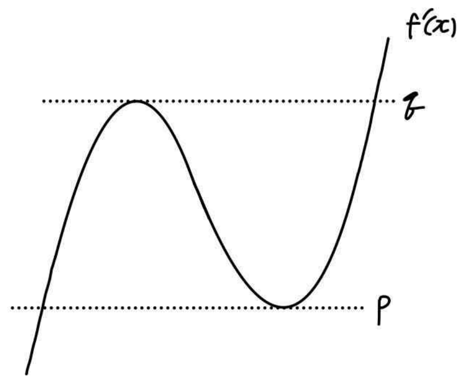
이 경우 역시 $g(x)=1$의 모든 실근은 실수 전체 x이고,

이는 $\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 실근이기 때문에

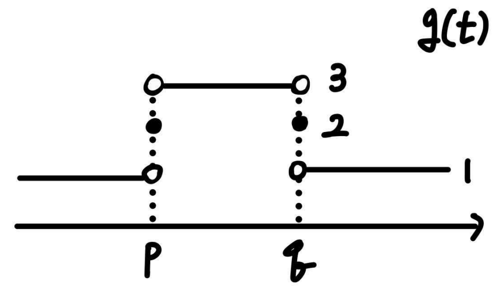
$\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 실근의 개수는 유한하지 않다.

따라서 $f'(x)$는 극대 극소를 모두 가지는 개형이다.

$f'(x)$의 극솟값을 p, 극댓값을 q라 하자.



$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<p,\ t>q)\\ 2 & (t=p,\ t=q)\\ 3 & (p<t<q)\end{cases}$$ 이다.



만약 $f(x)=x$의 실근에 1 또는 3이 있다면,

$g(t)=1$ 또는 $g(t)=3$의 모든 실근이 $\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 실근이기 때문에, $\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 실근은 유한하지 않다.

따라서 1과 3은 $f(x)=x$의 실근이 아니므로, $\alpha_2=1$과 $\alpha_4=3$은

$f(x)=x$의 한 실근 x_k에 대해 (단, k는 $1\le k\le n$인 자연수)

$g(x)=x_k$의 실근이다.

즉 $g(x)=x_k$의 실근이 유한하려면 $x_k=2$여야 하고, $p=\alpha_2=1$이고 $q=\alpha_4=3$이며, $f(x)=x$의 실근 중 $x_k=g(1)=g(3)=2$가 포함된다.

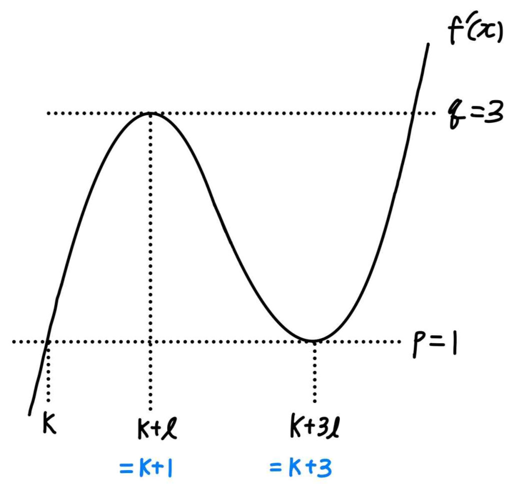
따라서 $f(x)=x$의 실근 $x=2$ 역시

방정식 $\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 근이므로,

$\alpha_3=2$이다.

정리하면, $f'(x)$의 극솟값은 $p=1$이고, $f'(x)$의 극댓값은 $q=3$이며, $f(2)=2$이고 $\alpha_3=2$이다.

step3



$f'(x)=\frac{1}{2}(x-k)(x-k-3l)^2+1$이라 하자.

$f'(k+l)=\frac{1}{2}\times l\times(-2l)^2+1=3$이므로 $l=1$이다.

따라서 $f'(x)=\frac{1}{2}(x-k)(x-k-3)^2+1$이다.

또한 $f'(\alpha_3)=f'(2)=11$이므로,

$f'(2)=\frac{1}{2}(2-k)(-k-1)^2+1=11$이고,

이를 만족하는 실수 k는 $k=-3$ 뿐이다.

따라서 $f'(x)=\frac{1}{2}x^2(x+3)+1$이므로,

$f(x)=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3+x+c$이고,

$f(2)=2$이므로 $c=-6$이다.

그러므로 $f(x)=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3+x-6$이고,

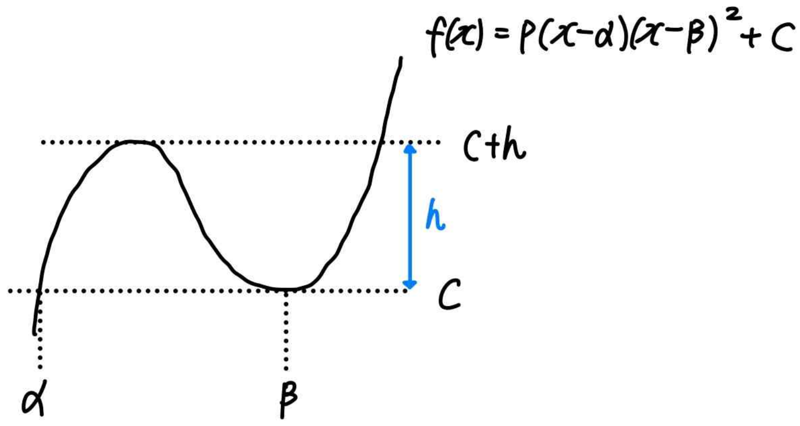
$f(4)=\frac{1}{8}\times 4^4+\frac{1}{2}\times 4^3+4-6=62$이다.

여담:

$\{f(g(x))-g(x)\}\times\{f(x)-x\}=0$의 실근이 '유한'하다는 점에 주목하기.

$g(x)=1$ 또는 $g(x)=3$의 실근은 유한하지 않기 때문에, $f(x)=x$의 근에 1 또는 3이 포함되면 안 된다.

$f'(x)$의 식을 구하는 과정에서,



$h=\frac{4}{27}\times|p|\times(\beta-\alpha)^3$ 공식을 이용해도 된다.

이 문제에 적용할 경우, $3-1=\frac{4}{27}\times\frac{1}{2}\times(3l)^3$이므로 $l=1$이다.

14회 정답

8	③	9	②	10	④	11	②	12	②
13	③	14	⑤	15	④	20	7	21	39
22	34								

8.

정답: ③

해설:

$\sum_{k=1}^{10}\left(a_k-\sqrt{k}\right)^2=\sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k)^2-2a_k\sqrt{k}+k\right\}=150$이고

$\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\times11}{2}=55$이므로 $\sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k)^2-2a_k\sqrt{k}\right\}=95$이다.

$\sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k)^2-2a_k\sqrt{k}\right\}=95$를 식 ㄱ이라 하자.

$\sum_{k=1}^{10}\left(a_k-2\sqrt{k}\right)^2=\sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k)^2-4a_k\sqrt{k}+4k\right\}=255$이고,

$\sum_{k=1}^{10}4k=4\times\frac{10\times11}{2}=220$이므로 $\sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k)^2-4a_k\sqrt{k}\right\}=35$이다.

$\sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k)^2-4a_k\sqrt{k}\right\}=35$를 식 ㄴ이라 하자.

식 ㄱ에서 식 ㄴ을 빼면, $\sum_{k=1}^{10}2a_k\sqrt{k}=60$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k\sqrt{k}=30$이다.

이를 식 ㄱ에 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k^2=\sum_{k=1}^{10}2a_k\sqrt{k}+95=2\times30+95=155$이다.

여담:

무난한 시그마 계산. a_k가 포함되어 있는 항인 $\sum_{k=1}^{10}a_k^2$와

$\sum_{k=1}^{10}a_k\sqrt{k}$은 직접 계산할 수 없다.

$\sum_{k=1}^{10}a_k^2$이나 $\sum_{k=1}^{10}a_k\sqrt{k}$을 직접 계산하려 했다면 반성하자.

9.

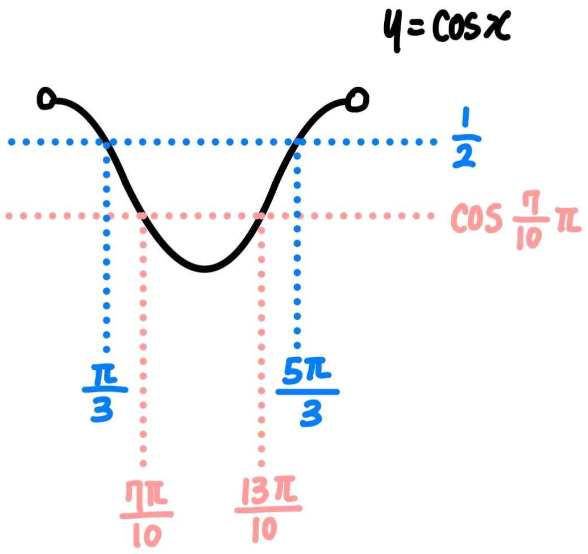
정답: ②

해설:

step1 각변환

$\sin\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{7}{10}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{7}{10}\pi$이다.

step2



1) $2\cos x-1\le 0$, $\cos x+\sin\frac{\pi}{5}=\cos x-\cos\frac{7\pi}{10}\ge 0$인 경우

$\cos x\le\frac{1}{2}$의 $0<x<2\pi$에서의 해는 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$이고,

$\cos x\ge cos\frac{7}{10}\pi$의 $0<x<2\pi$에서의 해는 $0<x\le\frac{7}{10}\pi$,

$\frac{13}{10}\pi\le x<2\pi$이다.

따라서 두 조건을 동시에 만족시키는 x값의 범위는

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{10}$, $\frac{13}{10}\pi\le x\le\frac{5\pi}{3}$이다.

2) $2\cos x-1\ge 0$, $\cos x-\cos\frac{7\pi}{10}\le 0$인 경우

$\cos x\ge\frac{1}{2}$의 $0<x<2\pi$에서의 해는 $0<x\le\frac{\pi}{3}$,

$\frac{5\pi}{3}\le x<2\pi$이고,

$\cos x\le cos\frac{7\pi}{10}$의 $0<x<2\pi$에서의 해는 $\frac{7\pi}{10}\le x\le\frac{13\pi}{10}$이다.

따라서 두 조건을 동시에 만족시키는 x값의 범위는 존재하지 않는다.

3) $2\cos x-1=0$이거나 $\cos x-\cos\frac{7\pi}{10}=0$인 경우는 1에 포함된다.

그러므로 $(2\cos x-1)\times\left(\cos x+\sin\frac{\pi}{5}\right)\le 0$을 만족시키는

$0<x<2\pi$인 x값의 범위는 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{10}$, $\frac{13}{10}\pi\le x\le\frac{5\pi}{3}$이고,

$\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{7\pi}{10}$, $\gamma=\frac{13\pi}{10}$, $\delta=\frac{5\pi}{3}$이므로,

$\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta=\frac{123}{10}\pi$이다.

여담:

각변환이 어려운 사람은 2회 9번 여담을 참고하자.

그렇지만 나는 착하니 한 번 여기에도 다시 적어주겠다.

1. 각변환이 기억 안 나는 친구는... 미적분 선택자라면 $\frac{n\pi}{2}$에 대한 덧셈정리로 해결하는 것도 하나의 방법이랍니다.

2. 혹시 몰라 작성하는 $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$ 형태의 각변환 방법

->n이 홀수라면 함수가 바뀌고, n이 짝수라면 함수 그대로!

->$0<\theta<\frac{\pi}{2}$라 할 때, $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$가 위치한 사분면에서의 '원래' 삼각함수의 부호가 각변환된 삼각함수의 부호

3. 주어진 부등식 $(2\cos x-1)\times\left(\cos x+\sin\frac{\pi}{5}\right)\le 0$을, $\cos x$에 대해 풀어보면 $-\sin\frac{\pi}{5}\le\cos x\le\frac{1}{2}$이고, 이를 이용해 빠르게 답을 구할 수도 있다.

10.

정답: ④

해설:

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x^2}$의 극한값이 존재하려면 $f(x)f'(x)$가 x^2을 인수로 가지고 있어야 한다. (x를 3개 이상 가지게 될 경우 극한값이 0이 되므로 x^2을 인수로 가지고, x^3은 인수로 가지지 않아야 한다.)

1) $f(x)=x^2(x-a)$인 경우 (단, $a\neq0$)

$f'(x)=x(3x-2a)$이므로
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3(x-a)(3x-2a)}{x^2}=0\neq9$이고 조건을 만족시키지 않는다.

2) $f(x)=x(x^2+ax+b)$인 경우 (단, $b\neq0$)

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 $b\neq0$이므로
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+ax+b)(3x^2+2ax+b)}{x^2}$이므로
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x^2}$의 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 $f'(x)$가 x^2을 인수로 가지고 있어야 하므로
$f'(x)=3x^2$이고, $f(x)=x^3+c$이다. (단, $c\neq0$)

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(x^3+c)\times3x^2}{x^2}=3c=9$이므로 $c=3$이고,

$f(x)=x^3+3$이다.

그러므로 $f(1)=1^3+3=4$이다.

여담:

$f(x)f'(x)$가 x^2을 인수로 가지고 있어야 하므로,

$f(x)$가 x^2을 인수로 가지는 경우, $f(x)$가 x를 인수로 가지고 $f'(x)$도 x를 인수로 가지는 경우, $f'(x)$가 x^2을 가지는 경우로 케이스분류 하기.

11.

정답: ②

해설1:

step1

$g(1)=1f(1)+2=5$이므로 $f(1)=3$이고, ……ㄱ

$g(3)=3f(3)+2=5$이므로 $f(3)=1$이다. ……ㄴ

또한 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$이므로

$g'(1)=f'(1)+f(1)=f'(1)+3$이고,

$g'(3)=3f'(3)+f(3)=3f'(3)+1$이다.

따라서 $g'(1)=g'(3)=m$이므로

$3f'(3)=f'(1)+2$이다. ……ㄷ

step2

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면, (단, $a\neq0$)

$f'(x)=2ax+b$이다.

ㄱ에 의해 $f(1)=a+b+c=3$이고,

ㄴ에 의해 $f(3)=9a+3b+c=1$이며,

$3f'(3)=3(6a+b)$이고, $f'(1)+2=2a+b+2$이므로

ㄷ에 의해 $3(6a+b)=2a+b+2$이다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-3$, $c=\frac{11}{2}$이다.

그러므로 $m=g'(1)=f'(1)+f(1)=2a+b+3=1$이고,

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}$이므로 $f(4)=\frac{3}{2}$이므로,

$m+f(4)=\frac{5}{2}$이다.

해설2: 변곡점(삼차함수의 대칭점)을 이용한 풀이

$g(x)=xf(x)+2$에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=2$이다.

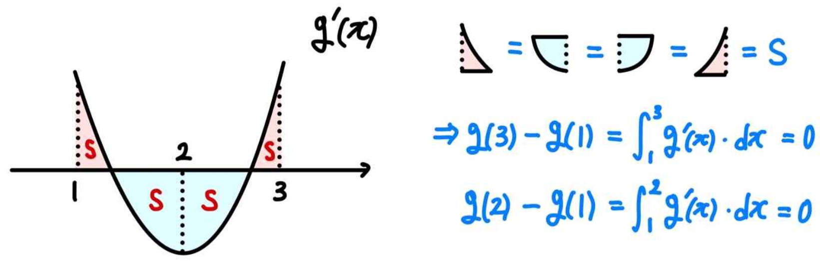
$g'(1)=g'(3)$이므로 $g'(x)$는 $x=2$ 기준 대칭이며, 삼차함수 $g(x)$는 $(2, g(2))$ 기준 대칭이다.

또한 $g(1)=g(3)=5$이므로, $g(2)=5$이다.

($g(2)=5$임을 구하는 방법 중 세 가지를 설명하겠다.

먼저, $(2, g(2))$이 변곡점임을 이용해 확인 가능하며,

$g'(x)$의 그래프를 통해 넓이로도 파악 가능하다.



수식으로 확인해보자면, $g'(x)$의 대칭성에 의해

$g'(x)=g'(4-x)$이고 $g(1)=g(3)$이므로 $\int_{1}^{3} g'(x)dx=0$이다.

이때 $\int_{2}^{3} g'(x)dx=\int_{2}^{3} g'(4-x)dx=\int_{1}^{2} g'(x)dx$이므로

$\int_{1}^{3} g'(x)dx=2\times\int_{2}^{3} g'(x)dx=0$이므로 $g(2)=g(3)$이다.)

따라서 $g(x)=p(x-1)(x-2)(x-3)+5$라 하면, (단, $p\neq 0$)

$g(0)=-6p+5=2$이므로 $p=\frac{1}{2}$이고,

$g(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)+5$이다.

그러므로 $m=g'(1)=g'(3)=\frac{1}{2}\times(-1)\times(-2)=1$이고,

$f(4)=\frac{g(4)-2}{4}=\frac{3}{2}$이므로 $m+f(4)=\frac{5}{2}$이다.

여담:

해설 1의 경우 조건 하나하나 빠뜨리지 않고 식만 잘 세우면 무난하게 풀리는 풀이이다.

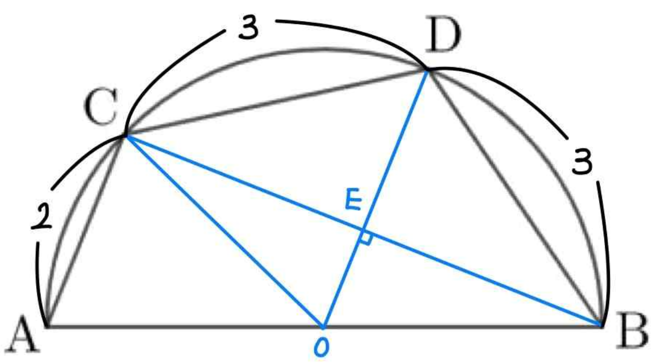
해설 2의 변곡점을 이용하는 방법의 경우 4회 11번 참고하기.

(사실 실전에서는 변곡점을 이용해 푸는 걸 추천한다.)

12.

정답: ②

해설:



step1

주어진 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r이라 하고,

선분 OD와 선분 BC의 교점을 E라 하자.

$\overline{BD}=\overline{CD}=3$이므로 $\angle COD=\angle BOD$이고, $\overline{CO}=\overline{BO}=r$,

선분 OE는 공통변이므로

삼각형 COE와 삼각형 BOE는 SAS합동이다.

따라서 $\angle CEO=\angle BEO=\frac{\pi}{2}$이다.

또한 선분 AB는 주어진 반원의 지름이므로 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이다.

step2

1)

$\triangle OBE$와 $\triangle ABC$는 $\angle OBE$는 공통, $\angle OEB=\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이므로

AA닮음이다.

따라서 $\overline{OE}:\overline{AC}=\overline{OB}:\overline{AB}=1:2$이므로 $\overline{OE}=1$이다.

이때 $\overline{OD}=r$이므로 $\overline{DE}=r-1$이다.

2)

삼각형 OBE에서 피타고라스 정리를 사용하면

$\overline{BE}=\sqrt{(\overline{OB})^2-(\overline{OE})^2}=\sqrt{r^2-1}$이고,

삼각형 BDE에서 피타고라스 정리를 사용하면

$\overline{DE}=\sqrt{(\overline{DB})^2-(\overline{BE})^2}=\sqrt{3^2-(r^2-1)}=\sqrt{10-r^2}$이다.

step3

$\overline{\mathrm{DE}}=r-1=\sqrt{10-r^2}$이므로 양수 r의 값은 $r=\dfrac{1+\sqrt{19}}{2}$이고,

$\overline{\mathrm{AB}}=2r=\sqrt{19}+1$이다.

여담:

보조선, 합동, 닮음을 적극적으로 이용하는 문제.

사인법칙, 코사인법칙을 사용 안 해도 답을 구할 수 있다.

13.

정답: ③

해설:

step1

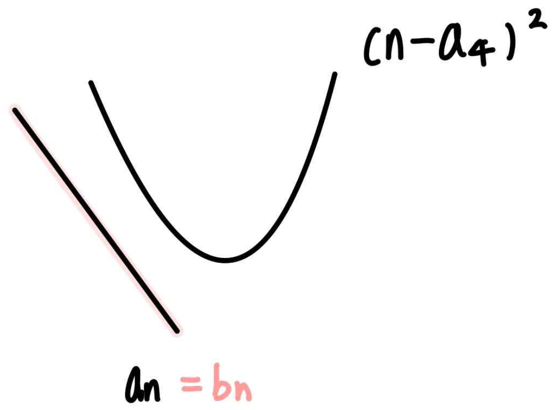
$a_n=a+(n-1)d$라 하자. (단, $d<0$)

n에 대한 함수로 해석할 때 $(n-a_4)^2$은 n에 대한 이차함수로, a_n은 기울기가 d인 n에 대한 일차함수로 볼 수 있다.

또한 $b_n=\min\{(n-a_4)^2, a_n\}$이다.

step2

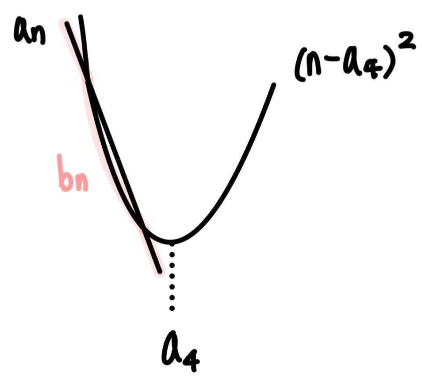
1) $(n-a_4)^2$과 a_n의 그래프의 교점이 없거나 접하는 경우



모든 자연수 n에 대해 $b_n=\min\{(n-a_4)^2, a_n\}=a_n$이기 때문에 $b_3>b_5>b_8$이다.

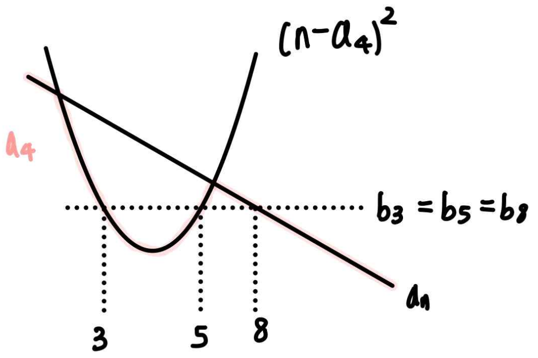
따라서 $b_3=b_5=b_8$을 만족하지 않는다.

2) $(n-a_4)^2$과 a_n의 그래프의 교점의 n좌표가 모두 a_4보다 작은 경우



이 경우 n값이 증가함에 따라 b_n의 값도 감소하므로, $b_3=b_5=b_8$을 만족하지 않는다.

3) $(n-a_4)^2$과 a_n의 그래프의 교점의 n좌표가 하나는 a_4보다 작고, 하나는 a_4보다 큰 경우



이 경우 3과 5는 a_4를 기준으로 대칭이므로 $a_4=4$이다.

또한 $b_8=a_8$이고, $b_3=(3-a_4)^2=(3-4)^2=1$인데 $b_3=b_8$이므로 $a_8=b_8=b_3=1$이다.

따라서 $a_4=4$, $a_8=1$이므로 $a_n=-\frac{3}{4}n+7$이고,

$b_n=\min\left\{(n-4)^2,\ -\frac{3}{4}n+7\right\}$이다.

그러므로

$b_1=\min\left\{(1-4)^2,\ -\frac{3}{4}\times1+7\right\}=\frac{25}{4}$,

$b_2=\min\left\{(2-4)^2,\ -\frac{3}{4}\times2+7\right\}=4$,

$b_6=\min\left\{(6-4)^2,\ -\frac{3}{4}\times6+7\right\}=\frac{10}{4}$이므로

$b_1+b_2+b_6=\frac{25}{4}+4+\frac{10}{4}=\frac{51}{4}$이다.

여담:

n에 대한 함수라는 표현이 헷갈리면, n이 x역할을 한다고 이해하면 된다. (ex. 교점의 n좌표→교점의 x좌표)

식으로 보면 아마 헷갈릴 가능성이 높다. 그래프로 해석하는게 편한 문제

14.

정답: ⑤

해설:

step1

점 P의 속도를 $v(t)$라 하면,

$v(2)=0$이고 $a(t)=6t-k$이므로 $v(t)=3t^2-kt+2k-12$이고,

$x(0)=-8$이므로 $x(t)=t^3-\frac{1}{2}kt^2+(2k-12)t-8$이다.

step2

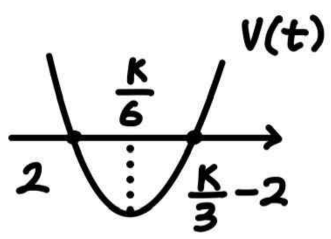
ㄱ.

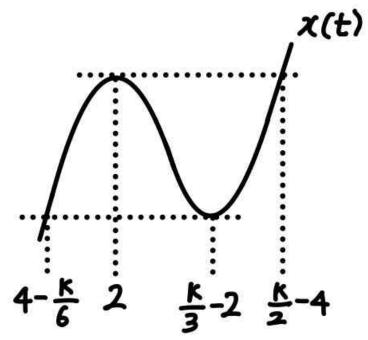
$x(t)=t^3-\frac{1}{2}kt^2+(2k-12)t-8$이므로

$x(4)=4^3-\frac{1}{2}k\times4^2+(2k-12)\times4-8=8$이다.

그러므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ.

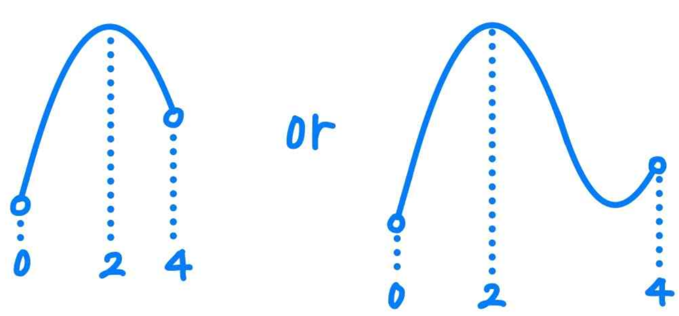




$k>18$이므로 $\frac{k}{6}>3$, $\frac{k}{3}-2>4$, $\frac{k}{2}-4>5$이다.

ㄱ에 의해 $x(t_1)>8$은 $x(t_1)>x(4)$와 같다는 점을 알 수 있다.

이때 $0<2<4<5<\frac{k}{2}-4$이므로 $(0,4)$에서 $x(t)$의 그래프는 아래와 같다.



따라서 $x(2)>x(4)$이므로 $k>18$이면 $x(t_1)>x(4)=8$인 t_1이 열린 구간 $(0,4)$에 존재한다.
그러므로 ㄴ은 참이다.
ㄷ.

ㄷ 선지를 바꿔보면 아래와 같다.

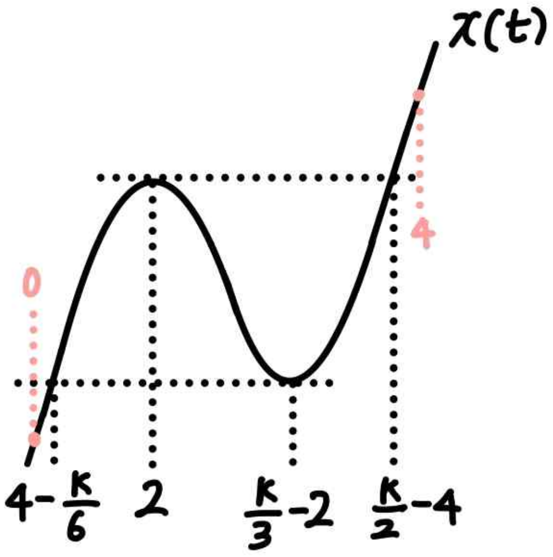
$|x(t_2)|>8$이도록 하는 t_2가 열린구간 $(0, 4)$에 존재하지 않도록 하는

$=0<t<4$인 모든 실수 t에 대해 $|x(t)| \le x(4)$인

$=0<t<4$인 모든 실수 t에 대해 $x(0) \le x(t) \le x(4)$인

$\frac{k}{6}$과 2의 대소관계에 따라 케이스분류해보자.

1) $\frac{k}{6}>2$인 경우 $(k>12)$

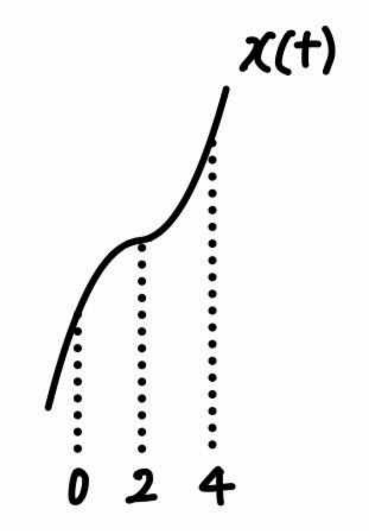


① $x(2)=x\left(\frac{k}{2}-4\right) \le x(4)$이므로 $\frac{k}{2}-4 \le 4$, 즉 $k \le 16$이다.

② $x\left(\frac{k}{3}-2\right)=x\left(4-\frac{k}{6}\right) \ge x(0)$이므로 $4-\frac{k}{6} \ge 0$, 즉 $k \le 24$이다.

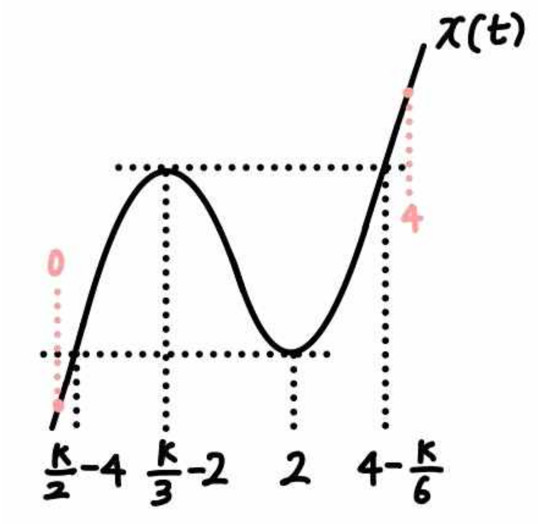
따라서 이 경우 $12<k \le 16$이다.

2) $\frac{k}{6}=2$인 경우 $(k=12)$



$k=12$일 때 $0<t<4$인 모든 실수 t에 대해 $x(0) \le x(t) \le x(4)$이다.

3) $\frac{k}{6}<2$인 경우 $(k<12)$



① $x(2)=x\left(\frac{k}{2}-4\right) \ge x(0)$이므로 $\frac{k}{2}-4 \ge 0$, 즉 $k \ge 8$이다.

② $x\left(\frac{k}{3}-2\right)=x\left(4-\frac{k}{6}\right) \le x(4)$이므로 $4-\frac{k}{6} \le 4$, 즉 $k \ge 0$이다.

따라서 이 경우 $8 \le k<12$이다.

그러므로 1, 2, 3을 합치면 $|x(t_2)|>8$이도록 하는 t_2가 열린구간 $(0, 4)$에 존재하지 않도록 하는 자연수 k의 범위는 $8 \le k \le 16$이고, 자연수 k의 개수는 9이므로 ㄷ은 참이다.

여담:

k의 값에 따른 각 주요점들의 값의 범위를 통해 가능한 개형을 파악해 부등식 세우기

ㄴ과 ㄷ에서 주어진 선지를 다른 말로 바꾸어 이해하면 문제를 풀기 조금 더 쉬워진다.

기출 다시보기: 2022학년도 수능 14번

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b) \quad (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

답: 5번

15.

정답: ④

해설:

step1

1) $a_{n+1}<a_n$을 만족시키는 a_n에 대하여 $a_n>0$이다.

$(2a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=0$이므로 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}\\ a_n+2\end{cases}$ 이다.

만약 $a_n>0$이었다면, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$일 경우 a_{n+1}은 감소하고, $a_{n+1}=a_n+2$일 경우 a_{n+1}은 증가한다.

또한 $a_n<0$이었다면, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$일 경우 a_{n+1}은 증가하고, $a_{n+1}=a_n+2$일 경우 역시 a_{n+1}은 증가한다.

그리고 $a_n=0$이었다면, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$일 경우 a_{n+1}의 값은 유지되고, $a_{n+1}=a_n+2$일 경우 a_{n+1}은 증가한다.

즉, $a_{n+1}<a_n$을 만족시키는 a_n에 대하여 $a_n>0$이다.

2) $a_k>0$울 만족하는 가장 작은 자연수 k에 대하여, $n\ge k$인 모든 자연수 n에 대해 $a_n>0$이다.

$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}\\ a_n+2\end{cases}$ 이므로 $a_n>0$일 때,

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}>0$ 또는 $a_{n+1}=a_n+2>2$이므로

$a_k>0$울 만족하는 가장 작은 자연수 k에 대하여, $n\ge k$인 모든 자연수 n에 대해 $a_n>0$이다.

step2

step1-2에서 파악했듯이, a_3이 양수라면 a_7도 양수이기 때문에 $a_3+a_7=-\frac{3}{8}$을 만족시키지 않고, a_3은 음수이다.

$a_3<0$일 때,

$a_2=\begin{cases}2a_3\\ a_3-2\end{cases}$ 이고, 어느 경우든 $a_2<0$이다.

$a_1=\begin{cases}2a_2\\ a_2-2\end{cases}$ 이고, 어느 경우든 $a_1<0$이다.

따라서 step1-1에서 파악했듯이 $a_{n+1}<a_n$을 만족시키는 a_n에 대하여 $a_n>0$이므로,

$n=1,\ 2,\ 3$일 때는 $a_{n+1}<a_n$을 만족하지 않는다.

그러므로 $a_{n+1}<a_n$을 만족시키는 9 이하의 모든 자연수 n의 값의 합이 10이려면, $a_{n+1}<a_n$을 만족하는 n의 값이 4와 6이여야 한다.

step3

$a_3=a$라 하자. (단, $a<0$)

step1-2에서 파악했듯이 a_4는 양수여야 하므로, $a_4=a+2$이고, $a+2>0$이어야 한다.

또한 $a_4>a_5$이므로 $a_5=\dfrac{1}{2}a_4=\dfrac{1}{2}a+1$이다.

$a_5\le a_6$이므로 $a_6=a_5+2=\dfrac{a}{2}+3$이다.

$a_6>a_7$이므로 $a_7=\dfrac{1}{2}a_6=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{3}{2}$이다.

따라서 $a_3+a_7=a+\left(\dfrac{1}{4}a+\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{3}{8}$이므로 $a=-\dfrac{3}{2}$이며, $-2<a<0$을 만족한다.

step4

$a_{10}-a_1$의 최댓값은 a_{10}이 가장 크고, a_1이 가장 작을 때 생긴다.

$a_7=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{8}$이므로 a_8의 최댓값은 $a_8=a_7+2=\dfrac{9}{8}+2$이다.

a_9의 최댓값은 $a_9=a_8+2=\dfrac{9}{8}+4$이고,

따라서 a_{10}의 최댓값은 $a_{10}=a_9+2=\dfrac{9}{8}+6$이다.

또한 $a_3=a=-\dfrac{3}{2}$이므로,

a_2의 최솟값은 $a_2=a_3-2=-\dfrac{3}{2}-2$이고,

a_1의 최솟값은 $a_1=a_2\times2=-\dfrac{7}{2}\times2=-7$이다.

그러므로 $a_{10}-a_1$의 최댓값은,

$a_{10}-a_1=\left(\dfrac{9}{8}+6\right)-\left(-\dfrac{3}{2}-4\right)=\dfrac{113}{8}$이다.

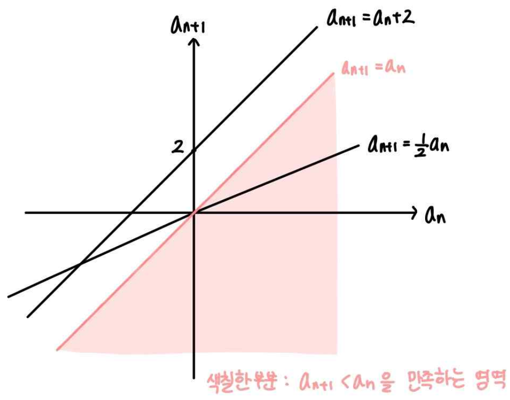
여담:

a_n의 부호에 따라 a_{n+1}의 증가 감소 여부가 다르다.

a_n이 음수라면 그 이후로 감소가 불가능하고, a_n이 한 번 양수가 나오면 그 이후 a_n의 값은 계속 양수이다.

그래프를 이용하면 step1의 내용을 좀 더 직관적으로 이해할 수 있다. (하지만 실전에서는 굳이? 싶을듯)

1) $a_{n+1}<a_n$을 만족시키는 a_n에 대하여 $a_n>0$이다.

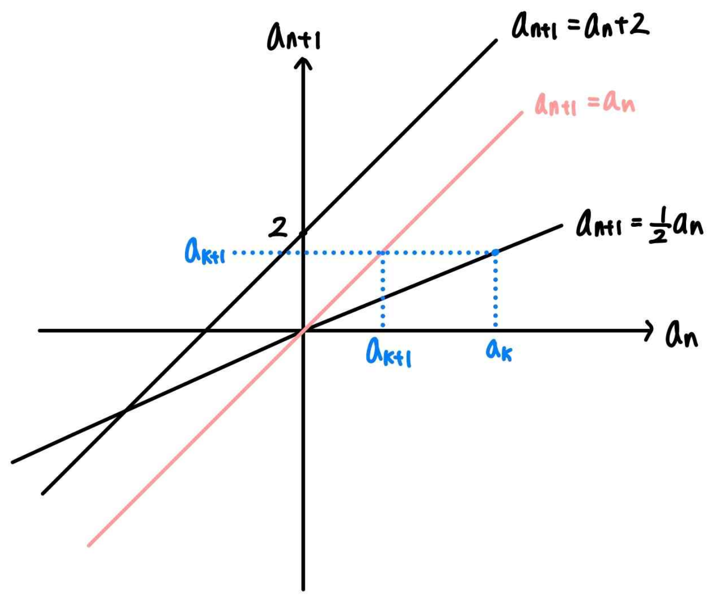


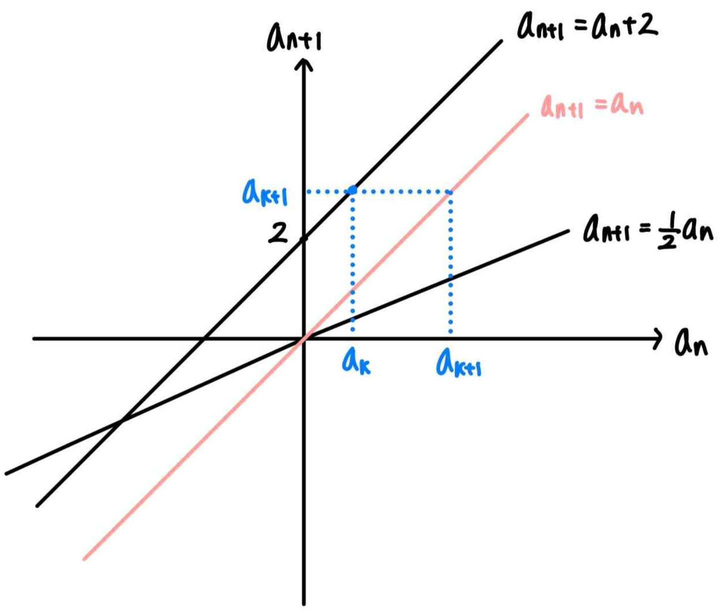
(a_n, a_{n+1})은 $a_{n+1}=a_n+2$ 또는 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$ 직선 위에 존재한다.

이때 $a_{n+1}<a_n$을 만족시키는 (a_n, a_{n+1})의 좌표는 $a_n>0$인 구역에 존재하므로,

$a_{n+1}<a_n$을 만족시키는 a_n에 대하여 $a_n>0$이다.

2) $a_k>0$울 만족하는 가장 작은 자연수 k에 대하여, $n\ge k$인 모든 자연수 n에 대해 $a_n>0$이다.





$a_k > 0$이면 $a_{k+1} > 0$이다.

수학적 귀납법을 적용해보면,

1) $a_k > 0$을 만족하는 가장 작은 자연수 k가 존재한다.

2) $a_n > 0$이면 $a_{n+1} > 0$이다.

이므로 $a_k > 0$을 만족하는 가장 작은 자연수 k에 대하여, $n \geq k$인 모든 자연수 n에 대해 $a_n > 0$이다.

20.

정답: 7

해설:

$h(x)=xf(x)$라 하면, $h(x)$는 역함수가 존재하므로 최고차항의 계수가 1인 증가하는 삼차함수여야 한다.

따라서 모든 실수 x에 대해 $h'(x) \geq 0$이다.

$h(x)=1$을 만족시키는 실수 x의 값을 α라 하면, $(h(\alpha)=1)$

$h(x)$의 역함수는 $g(x)$이므로 $g(1)=\alpha$이고,

그러므로 $f(g(1))+g(1)f'(g(1))=0$은 $f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)=0$과 같다.

이때 $h(x)=xf(x)$이므로 $h'(x)=f(x)+xf'(x)$이고,

$h'(\alpha)=f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)=0$이며 모든 실수 x에 대하여 $h'(x) \geq 0$이므로,

최고차항의 계수가 3인 이차함수 $h'(x)$는 $h'(x)=3(x-\alpha)^2$, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-\alpha)^3+c$라 할 수 있다.

이때 $h(\alpha)=1$이므로 $c=1$이고 $h(x)=(x-\alpha)^3+1$이다.

또한 $h(x)=xf(x)$이므로 $h(0)=-\alpha^3+1=0$이고 $\alpha=1$이다.

그러므로 $h(x)=(x-1)^3+1$이다.

따라서 $f(4)=\dfrac{h(4)}{4}=\dfrac{(4-1)^3+1}{4}=7$이다.

여담:

미적분 역함수미분법 내용 하나도 안 쓰입니다.

그냥 $h(\alpha)=1$이라 할 때, $f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)=0$이므로 $h'(\alpha)=0$이고, $h(x)$의 역함수가 존재하므로 모든 실수 x에 대해 $h'(x) \geq 0$임을 이용하면 식 세우기도 무난한 문제!

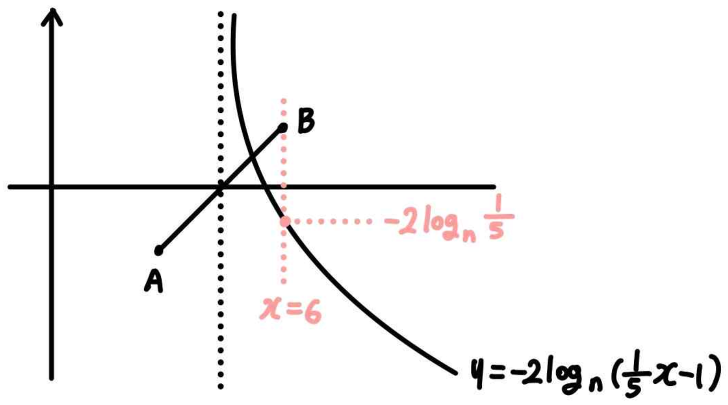
단, $h(x)=xf(x)$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 $h(0)=0$이라는 점 놓치지 말기!

21.

정답: 39

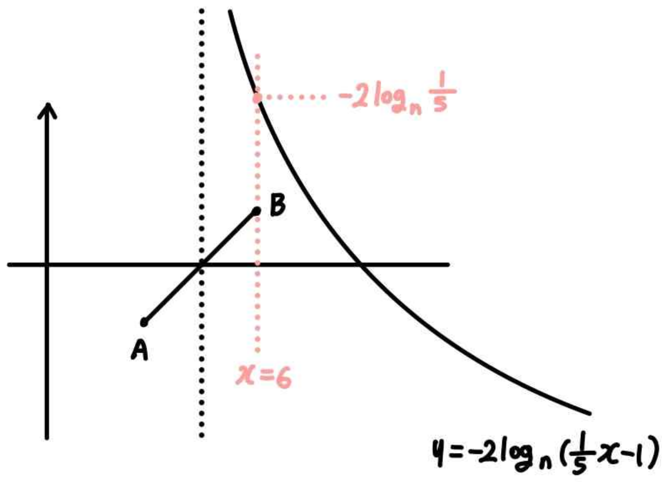
해설:

step1 (가) 조건 해석



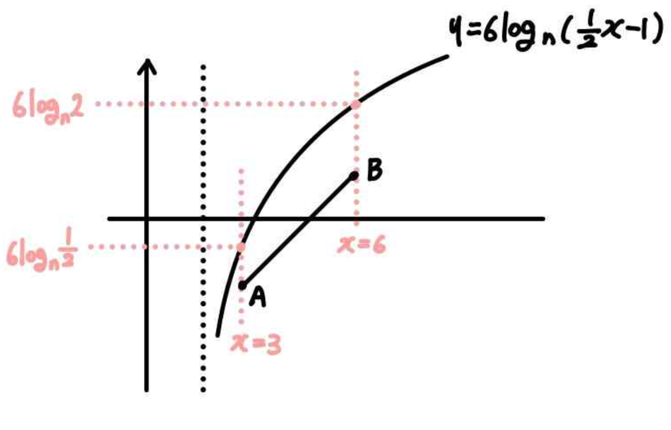
$x=6$을 기준으로 볼 때, 점 B의 y좌표가 $-2\log_n\left(\frac{1}{5}\right)$보다는 커야하므로, $-2\log_n\left(\frac{1}{5}\right)\leq 1$이고 정리하면 $n\geq 25$이다.

(만약 $-2\log_n\left(\frac{1}{5}\right)>1$일 경우 아래 그림처럼



함수 $y=-2\log_n\left(\frac{1}{5}x-1\right)$는 선분 AB와 만나지 않는다.)

step2 (나) 조건 해석

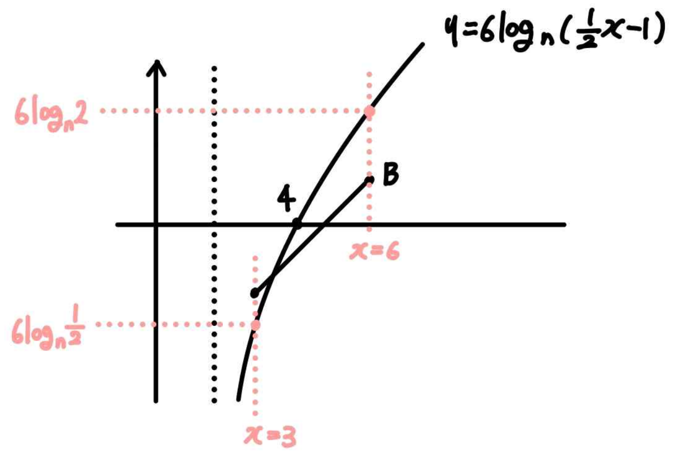


$x=3$을 기준으로 볼 때, 점 A의 y좌표가 $6\log_n\left(\frac{1}{2}\right)$보다는 작아야하므로, $6\log_n\left(\frac{1}{2}\right)>-2$이고 정리하면 $n>2^3$이다.

$x=6$을 기준으로 볼 때, 점 B의 y좌표가 $6\log_n 2$보다는 작아야하므로, $6\log_n 2>1$이고 정리하면 $n<2^6$이다.

(n이 자연수이므로 $6\log_n\left(\frac{1}{2}\right)<0$, $6\log_n 2>0$이다.

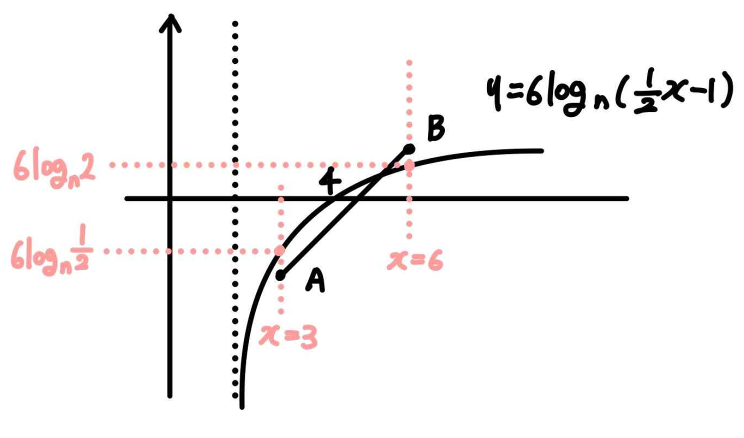
만약 $6\log_n\left(\frac{1}{2}\right)\leq -2$일 경우 아래 그림처럼



$3\leq x<4$에서 함수 $y=6\log_n\left(\frac{1}{2}x-1\right)$가 선분 AB와 만나게 된다.

($6\log_n\left(\frac{1}{2}\right)\leq -2$이므로 $n\leq 8$이고, $n\leq 8$일 때 $6\log_n 2\geq 2$이므로 $6\log_n 2$는 점 B의 y좌표보다 크다.)

또한 $6\log_n 2\leq 1$일 경우 아래 그림처럼



$4<x\leq 6$에서 함수 $y=6\log_n\left(\frac{1}{2}x-1\right)$가 선분 AB와 만나게 된다.

($6\log_n 2\leq 1$이므로 $n\geq 64$이고, $n\geq 64$일 때 $6\log_n\left(\frac{1}{2}\right)\geq -1$이므로 $6\log_n\left(\frac{1}{2}\right)$는 점 A의 y좌표보다 크다.)

step3

따라서 (가), (나) 조건을 모두 만족시키는 n의 범위는 $25 \le n < 64$이므로, (가), (나) 조건을 모두 만족시키는 2이상의 자연수 n의 개수는 39이다.

여담:

그래프로 파악하면 쉽다.

선분 AB의 끝 부분만 잘 처리해주면 상황 파악하기, 식 세우기도 쉽다.

22.

정답: 34

해설:

step1

$f(k)=0$이고, $x=k$에서 $f(x)$의 부호가 바뀔 때,

$g(x)$는 $x=k$에서 연속이므로 $k^3+f(k)=k-f(k)$이고,

이때 $f(k)=0$이므로 $k^3=k$여야 한다.

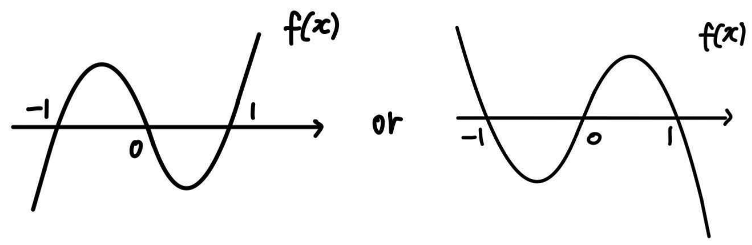
이를 만족시키는 k의 값은 $-1,\ 0,\ 1$이므로

$f(x)$는 $x=-1,\ 0,\ 1$에서 부호가 바뀔 수 있고, $g(x)$의 식이 바뀔 때 미분 불가능점이 생길 수 있으므로 α의 값도 $-1,\ 0,\ 1$ 중 하나이다.

또한 $g'(x)=\begin{cases} 3x^2+f'(x) & (f(x)\ge 0) \\ 1-f'(x) & (f(x)<0) \end{cases}$ 이다.

step2

1) $f(x)=0$의 실근이 $x=-1,\ 0,\ 1$의 3개인 경우



$f(x)=p(x+1)x(x-1)$라 하면, (단, $p\ne 0$)

$f'(x)=3px^2-p$이다.

1-1) $\alpha=-1$인 경우

만약 $\alpha=-1$일 경우, $g(x)$는 $x=0$과 $x=1$에서 미분가능해야한다.

$g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $3\times 0^2+f'(0)=1-f'(0)$이어야 하고, $f'(0)=3p\times 0^2-p=-p$이므로 $-p=1-(-p)$이다.

$g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $3\times 1^2+f'(1)=1-f'(1)$이어야 하고, $f'(1)=3p\times 1^2-p=2p$이므로 $3+2p=1-2p$이다.

즉 $p=-\dfrac{1}{2}$여야 한다.

하지만 이 경우, $f'(-1)=3p\times(-1)^2-p=2p=-1$이고, $3\times(-1)^2+f'(-1)=1-f'(-1)=2$이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서도 미분가능하다.

따라서 α가 존재하지 않으므로 이 경우는 성립하지 않는다.

1-2) $\alpha=0$인 경우

만약 $\alpha=0$일 경우, $g(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 미분가능해야한다.

$g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면
$3\times(-1)^2+f'(-1)=1-f'(-1)$이어야 하고,
$f'(-1)=3p\times(-1)^2-p=2p$이므로 $3+2p=1-2p$이다.

$g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $3\times1^2+f'(1)=1-f'(1)$이어야 하고, $f'(1)=3p\times1^2-p=2p$이므로 $3+2p=1-2p$이다.

즉 $p=-\dfrac{1}{2}$여야 한다.

이 경우, $f'(0)=3p\times0^2-p=-p=\dfrac{1}{2}$이고,
$3\times0^2+f'(0)\neq1-f'(0)$이므로 $\alpha=0$이다.

즉, $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)x(x-1)$이고 $\alpha=0$이다.

(나) 조건에 의해

$g(\alpha-1)=g(-1)=-2$인데, $f(-1)=0$이므로
$g(-1)=(-1)^3+f(-1)=-1\neq-2$이다.

따라서 이 경우 모순이 발생한다.

1-3) $\alpha=1$인 경우

만약 $\alpha=1$일 경우, $g(x)$는 $x=-1$과 $x=0$에서 미분가능해야한다.

$g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면
$3\times(-1)^2+f'(-1)=1-f'(-1)$이어야 하고,
$f'(-1)=3p\times(-1)^2-p=2p$이므로 $3+2p=1-(2p)$이다.

$g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $3\times0^2+f'(0)=1-f'(0)$이어야 하고, $f'(0)=3p\times0^2-p=-p$이므로 $3-p=1-(-p)$이다.

즉 $p=-\dfrac{1}{2}$여야 한다.

하지만 이 경우, $f'(1)=3p\times1^2-p=2p=-1$이고,
$3\times1^2+f'(1)=1-f'(1)=2$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서도 미분가능하다.

따라서 α가 존재하지 않으므로 이 경우는 성립하지 않는다.

2) $f(x)=0$의 실근이 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$의 1개인 경우

$f(x)=0$의 유일한 실근이 α이다.

$f(x)$의 최고차항 계수가 양수라면 $x<\alpha$에서 $f(x)<0$,
$x>\alpha$에서 $f(x)>0$이고,

$f(x)$의 최고차항 계수가 음수라면 $x<\alpha$에서 $f(x)>0$,
$x>\alpha$에서 $f(x)<0$이다.

2-1) $\alpha=-1$인 경우

$g(\alpha-1)=g(-2)=-2$이고, $g(\alpha+2)=g(1)=1$이다.

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 양수라면, $f(1)>0$이고,
$g(1)=1^3+f(1)=1$이므로 $f(1)=0$이어야 하는데, 이 경우
$f(x)=0$의 실근이 1개라는 가정에 모순이다.

또한 $f(x)$의 최고차항 계수가 음수라면, $f(1)<0$이고,
$g(1)=1-f(1)=1$이므로 $f(1)=0$이어야 하는데, 이 경우 역시
$f(x)$의 실근이 1개라는 가정에 모순이다.

2-2) $\alpha=0$인 경우

$g(\alpha-1)=g(-1)=-2$이고, $g(\alpha+2)=g(2)=1$이다.

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 양수라면, $f(-1)<0$이고,

$g(-1)=(-1)-f(-1)=-2$이므로 $f(-1)=1$이어야 하는데, 이는
$f(-1)<0$이라는 조건에 모순이다.

또한 $f(x)$의 최고차항 계수가 음수라면, $f(2)<0$이고,
$g(2)=2-f(2)=1$이므로 $f(2)=1$이어야 하는데, 이는
$f(2)<0$이라는 조건에 모순이다.

2-3) $\alpha=1$인 경우

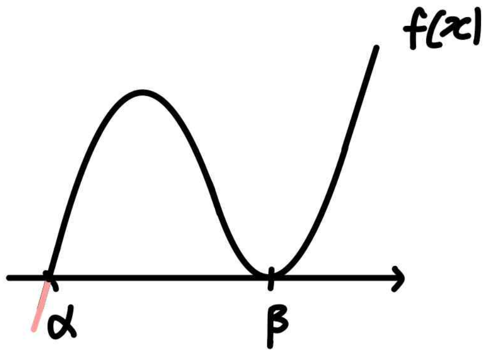
$g(\alpha-1)=g(0)=-2$이고, $g(\alpha+2)=g(3)=1$이다.

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 양수라면, $f(3)>0$이고,
$g(3)=3^3+f(3)=1$이므로 $f(3)=-26$이어야 하는데, 이는
$f(3)>0$이라는 조건에 모순이다.

또한 $f(x)$의 최고차항 계수가 양수라면 $f(0)<0$이고,
$g(0)=0-f(0)=-2$이므로 $f(0)=2$여야 하는데, 이는
$f(0)<0$이라는 조건에 모순이다.

3) $f(x)$의 실근이 2개인 경우

3-1) $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)^2$인 경우 (단, $p>0$, $\alpha<\beta$)



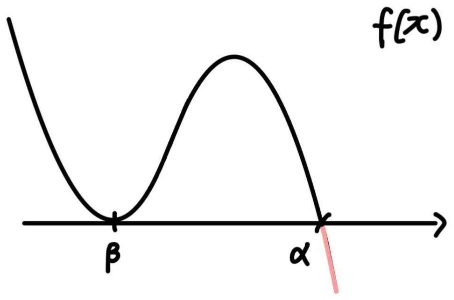
이 경우 $x=\beta$ 주위에서 $g(x)$의 식 변화가 생기지 않으므로, 가능한 β의 값은 $-1,\ 0,\ 1$을 포함한 실수 전체의 집합이고,

$x=\alpha$에서는 $g(x)$의 식 변화가 생기므로 α의 값은 $-1,\ 0,\ 1$ 중 하나이다.

$f(\alpha-1)<0$이므로 $g(\alpha-1)=(\alpha-1)-f(\alpha-1)=-2$이고, 이때 $f(\alpha-1)=\alpha+1$이다.

그러나 $\alpha=-1,\ 0,\ 1$일 때 $f(\alpha-1)=\alpha+1=0,\ 1,\ 2$ 이므로 $f(\alpha-1)<0$을 만족하지 않는다.

3-2) $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)^2$인 경우 (단, $p<0,\ \alpha>\beta$)



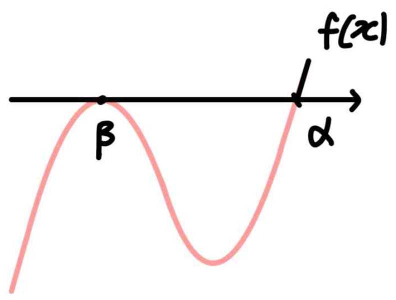
이 경우 $x=\beta$ 주위에서 $g(x)$의 식 변화가 생기지 않으므로, 가능한 β의 값은 $-1,\ 0,\ 1$을 포함한 실수 전체의 집합이고,

$x=\alpha$에서는 $g(x)$의 식 변화가 생기므로 α의 값은 $-1,\ 0,\ 1$ 중 하나이다.

$f(\alpha+2)<0$이므로 $g(\alpha+2)=(\alpha+2)-f(\alpha+2)=1$이고, 이때 $f(\alpha+2)=\alpha+1$이다.

그러나 $\alpha=-1,\ 0,\ 1$일 때 $f(\alpha+2)=\alpha+1=0,\ 1,\ 2$ 이므로 $f(\alpha+2)<0$을 만족하지 않는다.

3-3) $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)^2$인 경우 (단, $p>0,\ \alpha>\beta$)



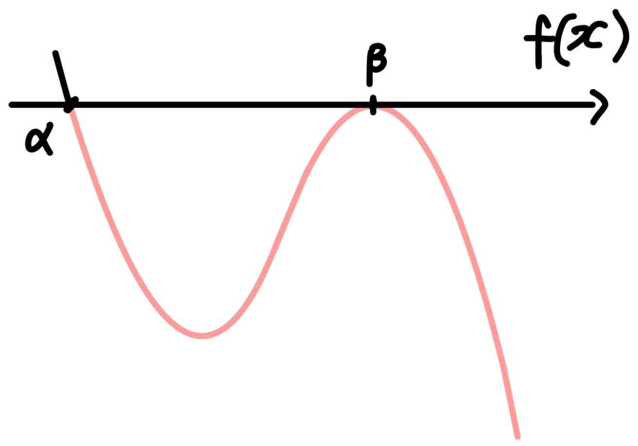
이 경우 $x=\alpha,\ \beta$에서 모두 $g(x)$의 식 변화가 생기므로 α와 β의 값은 $-1,\ 0,\ 1$ 중 하나이다.

또한 $g(x)$가 연속함수이기 때문에, $g(x)$는 $x=\beta$에서 미분가능하다. ($g(x)$가 연속함수이고, $x=\beta$ 주위에서는 $g(x)$의 식이 안 바뀌기 때문에 $g(x)$는 $x=\beta$에서 미분가능하다.)

$f(\alpha+2)>0$이므로 $g(\alpha+2)=(\alpha+2)^3+f(\alpha+2)=1$이고, 이때 $f(\alpha+2)=1-(\alpha+2)^3$이다.

그러나 $\alpha=-1,\ 0,\ 1$일 때 $f(\alpha+2)=1-(\alpha+2)^3=0,\ -7,\ -26$ 이므로 $f(\alpha+2)>0$을 만족하지 않는다.

3-4) $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)^2$인 경우 (단, $p<0,\ \alpha<\beta$)



이 경우 $x=\alpha,\ \beta$에서 모두 $g(x)$의 식 변화가 생기므로 α와 β의 값은 $-1,\ 0,\ 1$ 중 하나이다.

또한 $g(x)$가 연속함수이기 때문에, $g(x)$는 $x=\beta$에서 미분가능하다. ($g(x)$가 연속함수이고, $x=\beta$ 주위에서는 $g(x)$의 식이 안 바뀌기 때문에 $g(x)$는 $x=\beta$에서 미분가능하다.)

만약 $\beta\neq\alpha+2$라 하면,

$f(\alpha+2)<0$이므로 $g(\alpha+2)=(\alpha+2)-f(\alpha+2)=1$이고, $f(\alpha+2)=\alpha+1$이다.

그러나 $\alpha=-1,\ 0,\ 1$일 때 $f(\alpha+2)=\alpha+1=0,\ 1,\ 2$ 이므로 $f(\alpha+2)<0$을 만족하지 않는다.

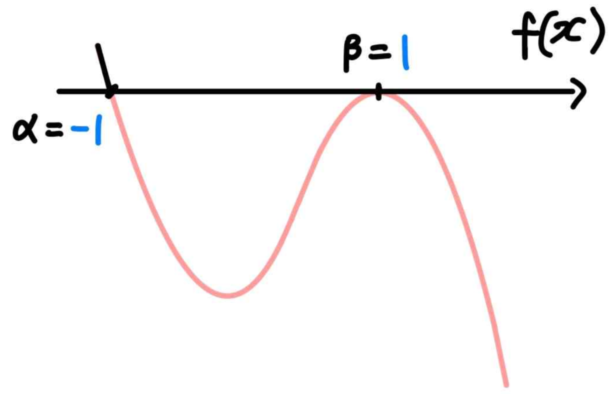
따라서 $\beta=\alpha+2$이다.

이때 $f(\alpha-1)>0$이므로 $g(\alpha-1)=(\alpha-1)^3+f(\alpha-1)=-2$이므로 $f(\alpha-1)=-(\alpha-1)^3-2$이고,

$f(\alpha+2)=0$이므로 $g(\alpha+2)=(\alpha+2)^3+f(\alpha+2)=1$이므로 $f(\alpha+2)=1-(\alpha+2)^3$이다.

step3

α와 β는 $-1,\ 0,\ 1$중 하나의 값이고, $\beta=\alpha+2$이므로 $\alpha=-1$, $\beta=1$이다.



따라서 $f(x)=p(x+1)(x-1)^2$이고, (단, $p<0$)

$f(\alpha-1)=-(\alpha-1)^3-2$이므로 $f(-2)=-(-1-1)^3-2=6$이다.

그러므로 $f(-2)=p\times(-2+1)(-2-1)^2=-9p=6$이므로

$p=-\dfrac{2}{3}$이고, $f(x)=-\dfrac{2}{3}(x+1)(x-1)^2$이다.

step4

$\alpha=-1$이므로 $\alpha+3=2$이다.

$f(2)<0$이므로 $g(2)=2-f(2)=2-\left\{-\dfrac{2}{3}\times3\times1^2\right\}=4$이고,

$f(4)<0$이므로 $g(4)=4-f(4)=4-\left\{-\dfrac{2}{3}\times5\times3^2\right\}=34$이다.

따라서 $g(g(\alpha+3))=34$이다.

여담:

답은 특수특수에서 나오지만, 생각보다 케이스분류를 많이 하는 문제.

사실 모순이 나오는 상황이 거의 비슷비슷해서 몇 번 직접 해 보면 금방 모순임을 파악할 수 있을 것이다.

15회 정답

8	④	*9*	⑤	*10*	③	*11*	②	*12*	④
13	③	*14*	③	*15*	④	*20*	20	*21*	27
22	257								

8.

정답: ④

해설1:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-f(x)}{x^2}=3$에서 $x^3-f(x)$은 최고차항의 계수가 3, 차수가 2라는 것을 알 수 있다.

$x^3-f(x)=3x^2+ax+b$라 하면 $f(x)=x^3-3x^2-ax-b$이다.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=2$에서 (분모)$\to0$이므로 극한값이 존재하려면 $f(1)=2$여야 하고,
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$이다.

$f(1)=-a-b-2=2$이고, $f'(1)=3-6-a=2$이므로 $a=-5$, $b=1$이다.

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+5x-1$이고, $f(3)=14$이다.

해설2:

$f(1)=2$, $f'(1)=2$이고 $f(x)=x^3-3x^2+\cdots$이므로,

$f(x)=(x-1)^3+a(x-1)^2+2(x-1)+2$라고 식 세운 후, 이차항의 계수가 -3인 것을 통해 $a=0$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=(x-1)^3+2(x-1)+2$이고,
$f(3)=(3-1)^3+2\times(3-1)+2=14$이다.

여담:

무한대로 가는 극한과 미분계수만 잘 해석할 수 있으면 무난하게 풀 수 있는 문제.

해설 2의 풀이도 알아두자. 문자를 하나만 써도 된다.

9.

정답: ⑤

해설:

점 A의 x좌표를 a라 할 때

$f(a)=1$이고 $af(a)+\frac{3}{4}=1$이므로 $a=\frac{1}{4}$이다.

또한 점 A에서 두 곡선의 접선은 서로 수직이므로
$f'(a)\times\{af'(a)+f(a)\}=-1$이고, 정리하면 $f'(a)=-2$이다.

그러므로 $f(a)=f\left(\frac{1}{4}\right)=1$이고, $f'(a)=f'\left(\frac{1}{4}\right)=-2$이므로
$f(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{4}\right)+1$이다.

따라서 $f(2)=\left(2-\frac{1}{4}\right)^2-2\times\left(2-\frac{1}{4}\right)+1=\frac{9}{16}$이다.

여담:

무난하게 계산만 잘 하면 되는 문제.

10.

정답: ③

해설:

1) $a_2>-1$인 경우

$a_3=a_2-7$이고,

$a_4=(a_2-7)^2-(a_2-7)$ (단, $a_2-7\le -1$)

또는 $a_4=a_2-14$ (단, $a_2-7>-1$) 이다.

주어진 조건에 의해 $a_4-a_2=1$이므로
$a_4=(a_2-7)^2-(a_2-7)$이고, (단, $a_2\le 6$)
$a_4-a_2=(a_2-7)^2-(a_2-7)-a_2=1$이다.

이를 만족시키는 $-1<a_2\le 6$인 a_2의 값은 $a_2=5$이고,

이 경우 $a_3=5-7=-2$, $a_4=(-2)^2-(-2)=6$,
$a_5=6-7=-1$이므로 $a_5>0$을 만족하지 않는다.

따라서 $a_2\le -1$이다.

2) $a_2\le -1$인 경우

$a_3=(a_2)^2-a_2\ge 2$이므로 $a_4=(a_2)^2-a_2-7$이다.

또한 $a_4-a_2=(a_2)^2-a_2-7-a_2=1$을 만족시키는 $a_2\le -1$인 a_2의 값은 $a_2=-2$이고,

이때 $a_3=(-2)^2-(-2)=6$, $a_4=6-7=-1$,
$a_5=(-1)^2-(-1)=2$이므로 $a_5>0$을 만족시킨다.

$a_2=-2$이므로 가능한 a_1의 값은 $a_1=(-2)+7=5$이고,

($(a_1)^2-a_1=-2$는 불가능)

$a_3=6$, $a_6=2-7=-5$이므로

$a_1+a_3+a_6=5+6+(-5)=6$이다.

여담:

범위에 조심하며 차근차근 케이스분류하자.

11.

정답: ②

해설:

step1 주어진 부등식 해석

$f(x_1)f(x_2)-f(x_1)-f(x_2)+1=\{f(x_1)-1\}\{f(x_2)-1\}$이므로

$x_1<2<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

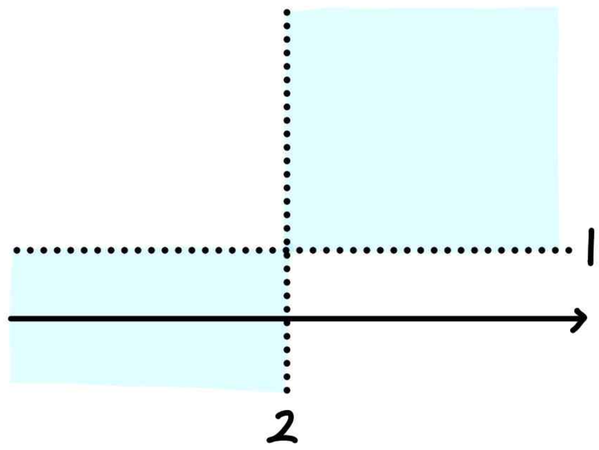
$\{f(x_1)-1\}\{f(x_2)-1\}\le 0$이다.

즉, $x<2$일 때 $f(x)\le 1$이고, $x>2$일 때 $f(x)\ge 1$인 경우거나,

$x<2$일 때 $f(x)\ge 1$이고, $x>2$일 때 $f(x)\le 1$인 경우이다.

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이고,

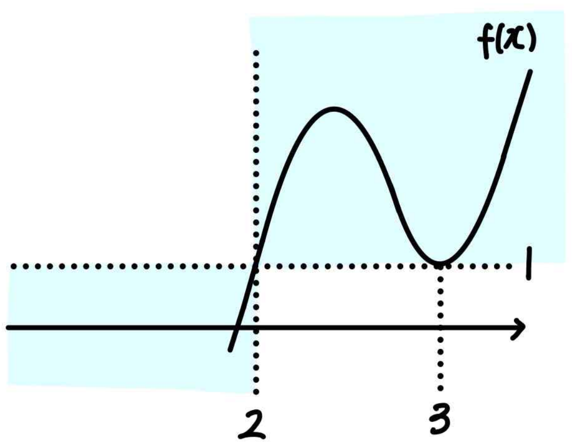
따라서 $x<2$일 때 $f(x)\le 1$이고, $x>2$일 때 $f(x)\ge 1$이다.



그러므로 $f(2)=1$이다.

step2

주어진 조건에 의해 $f(3)=1$인데, $x=3$ 주위에서 $f(x)-1$의 부호가 바뀌면 안되므로 $f'(3)=0$이다.



따라서 $f(x)=(x-2)(x-3)^2+1$이고,

$f(5)=(5-2)\times(5-3)^2+1=13$이다.

여담:

주어진 부등식을 인수분해해서 해석하기.

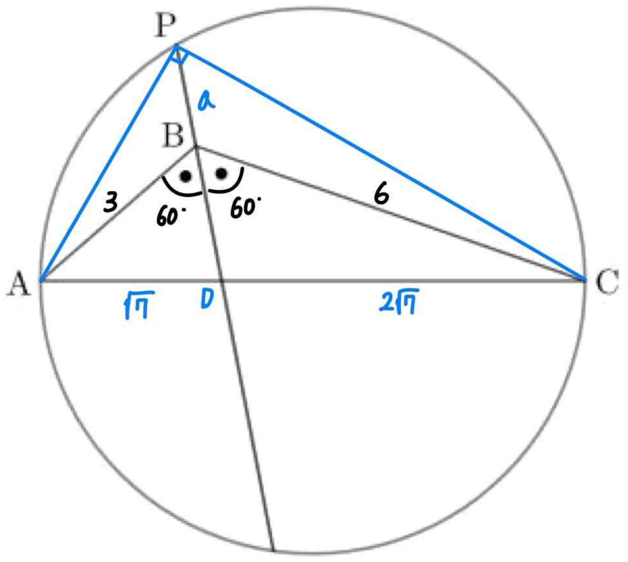
$f(x)-1$이라는 함수의 부호변화를 기준으로 해석하면 $f'(3)=0$을 찾기 편하다.

12.

정답: ④

해설:

step1



선분 AC와 직선 BP의 교점을 점 D라 하고,

선분 AP와 선분 CP를 그어보자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면,

$(\overline{\mathrm{AC}})^2=(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2-2\times(\overline{\mathrm{AB}})\times(\overline{\mathrm{BC}})\times\cos\angle\mathrm{ABC}$이므로

$(\overline{\mathrm{AC}})^2=3^2+6^2-2\times3\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=63$이고, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{7}$이다.

이때 삼각형 ABC에서 선분 BD는 각 B의 이등분선이므로, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{CD}}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{7}$이고, $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{CD}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{7}$이다.

step2

$\overline{\mathrm{BP}}=a$라 하자.

삼각형 ABP에서 코사인법칙을 사용하면,

$(\overline{\mathrm{AP}})^2=(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BP}})^2-2\times(\overline{\mathrm{AB}})\times(\overline{\mathrm{BP}})\times\cos\angle\mathrm{ABP}$이므로

$(\overline{\mathrm{AP}})^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$이고,

삼각형 BCP에서 코사인법칙을 사용하면,

$(\overline{\mathrm{CP}})^2=(\overline{\mathrm{BC}})^2+(\overline{\mathrm{BP}})^2-2\times(\overline{\mathrm{BC}})\times(\overline{\mathrm{BP}})\times\cos\angle\mathrm{CBP}$이므로

$(\overline{\mathrm{CP}})^2=6^2+a^2-2\times6\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$이다.

이때 삼각형 ACP에서 선분 AC는 주어진 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APC}=90^\circ$이다.

따라서 $(\overline{\mathrm{AC}})^2=(\overline{\mathrm{AP}})^2+(\overline{\mathrm{CP}})^2$이므로

$(3\sqrt{7})^2=\left\{3^2+a^2-2\times3\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{6^2+a^2-2\times6\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

이고,

정리하면 $2a^2+9a-18=0$이므로 $a=\overline{\mathrm{BP}}=\frac{3}{2}$이다.

여담:

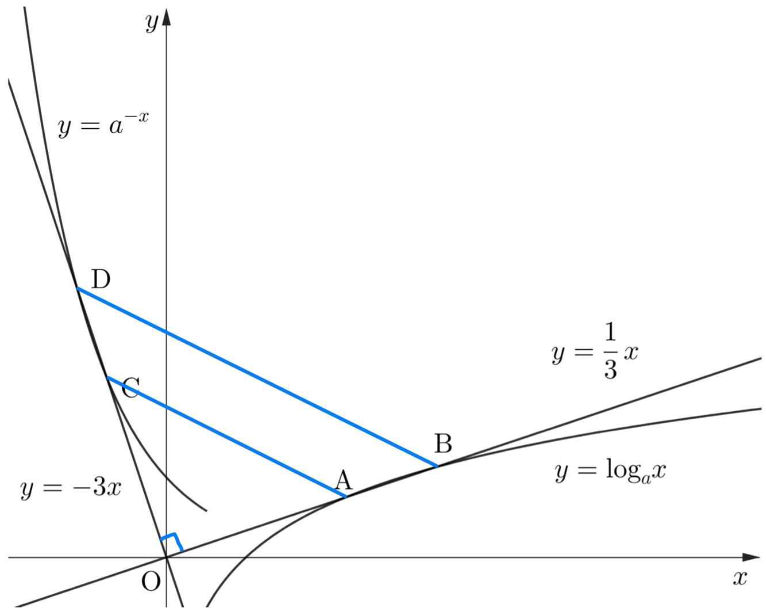
선분 AC가 지름이고 점 P가 주어진 원 위의 점이므로 선분 AP와 선분 CP를 긋는 발상은 꼭 했어야 한다.

13.

정답: ③

해설:

step1



주어진 조건에 의해

(삼각형 OAC의 넓이) : (사각형 ABDC의 넓이)$=4:5$이므로

(삼각형 OAC의 넓이) : (삼각형 OBD의 넓이)$=4:9$임을 알 수 있다.

이때 $y=-3x$를 원점에 대해 90° 회전시키면 $y=\frac{1}{3}x$가 되고,

$y=a^{-x}$를 원점에 대해 90° 회전시키면 $y=\log_a x$가 된다.

따라서 선분 OC를 원점에 대해 90° 회전시키면 선분 OA가 되고, 선분 OD를 원점에 대해 90° 회전시키면 선분 OB가 되므로,

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OD}}$, $\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$이고,

삼각형 AOC와 삼각형 BOD는 직각이등변삼각형이다.

그러므로 삼각형 AOC와 삼각형 BOD는 닮음이고, 넓이비가 $4:9$이므로 길이비가 $2:3$이다.

step2

점 A와 점 B는 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위의 점이고, 선분 OA와 선분 OB의 길이비가 $2:3$이므로,

점 A의 좌표를 $(6p, 2p)$, 점 B의 좌표를 $(9p, 3p)$라 하자.

점 A와 점 B는 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$2p=\log_a 6p$, $3p=\log_a 9p$이다.

따라서 $a^{2p}=6p$, $a^{3p}=9p$이므로 $a^p=\frac{3}{2}$이고, $p=\frac{3}{8}$이다.

그러므로 $a^{\frac{3}{8}}=\frac{3}{2}$이므로 $a=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{8}{3}}$이다.

여담:

1) 주어진 그래프들의 90° 회전 이동 관계를 파악해 삼각형 AOC와 삼각형 BOD는 직각이등변삼각형이라는 점 파악하기.

2) 삼각형 AOC와 삼각형 BOD는 닮음이므로 선분 OA와 선분 OB의 길이비를 구할 수 있고, 이를 통해 점 A와 점 B의 좌표 설정하기.

3) 넓이비는 닮음비의 제곱이라는 점 기억하기!

14.

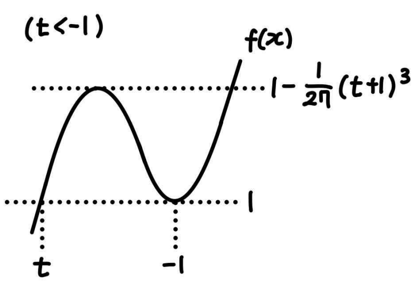
정답: ③

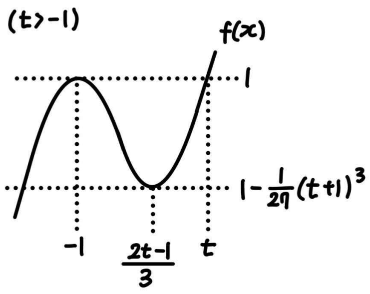
해설:

step1

$f(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는, $f(x)=0$의 서로 다른 실근을 x_1, x_2, x_3라 했을 때, $f(x)=x_1$ 또는 $f(x)=x_2$ 또는 $f(x)=x_3$을 만족시키는 서로 다른 모든 x의 개수이다.

(단, $x_1<x_2<x_3$이고, $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 1개 또는 2개 존재할 수도 있다.)

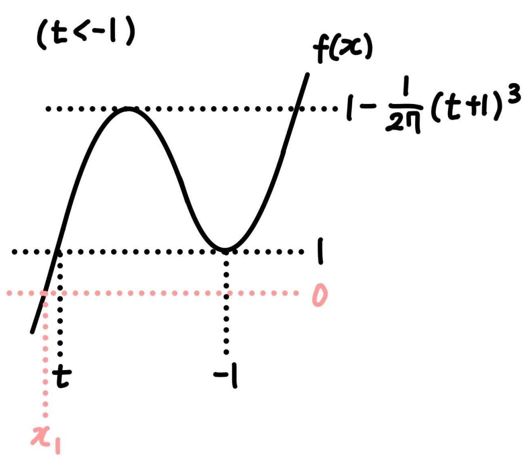




step2

ㄱ.

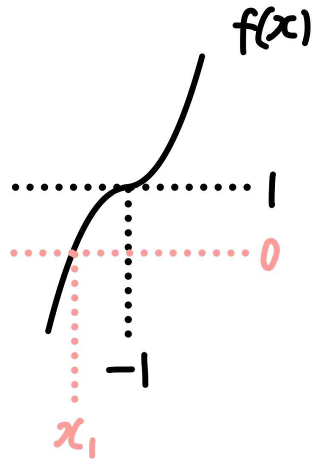
1) $t<-1$인 경우



$f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이다. (단, $x_1<-1$)

이때 $f(x)=x_1$의 실근은 1개이기 때문에 $g(t)=1$이다.

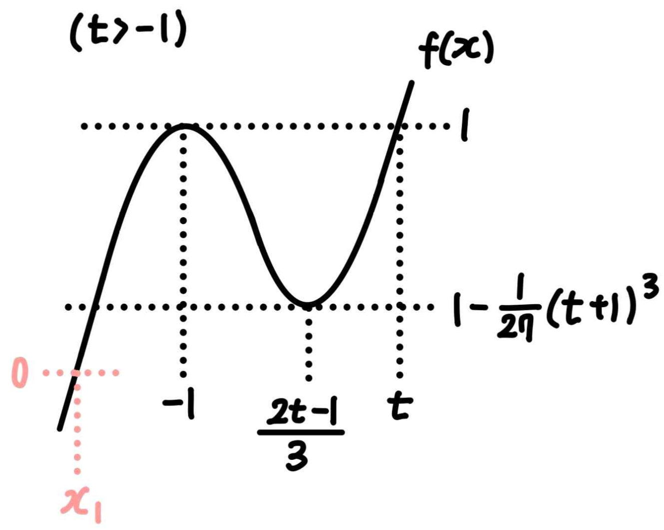
2) $t=-1$인 경우



$f(x)$는 증가함수이므로 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이다. (단, $x_1<-1$)

이때 $f(x)=x_1$의 실근은 1개이기 때문에 $g(-1)=1$이다.

3) $-1<t<2$인 경우



$0<1-\frac{1}{27}(t+1)^3<1$이므로 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이다. (단, $x_1<-1$)

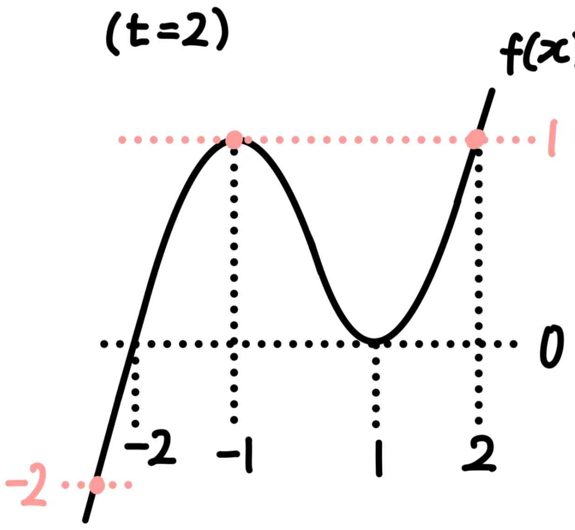
이때 $f(x)=x_1$의 실근은 1개이기 때문에 $g(t)=1$이다.

따라서 $t<2$이면 $g(t)=1$이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ.

ㄱ에서 $g(2-)=1$이다.

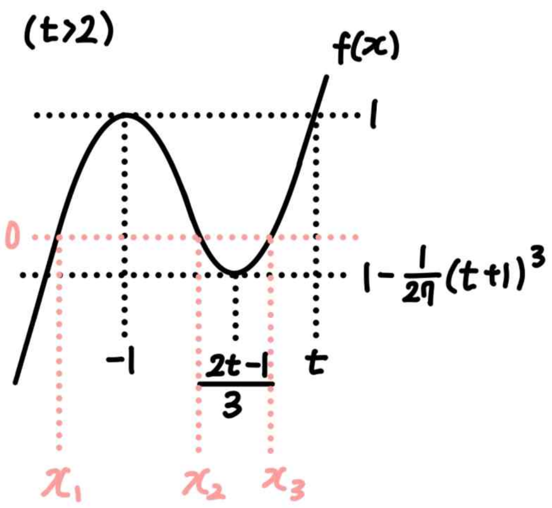
$t=2$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=-2$, $x=1$의 두 개이고, $f(x)=-2$의 실근은 1개, $f(x)=1$의 실근은 2개이므로 $g(2)=3$이다.

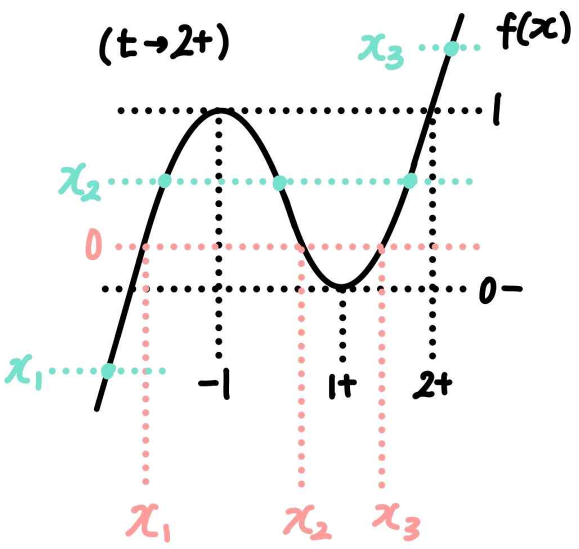


$t \to 2+$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1,\ x_2,\ x_3$의 3개이다.

(단, $t \to 2+$일 때 $x_1 < -1,\ 0 < x_2 < 1 < \frac{2t-1}{3},\ 1 < x_3 < 2$)

이때 $f(x)=x_1$의 서로 다른 실근은 1개, $f(x)=x_2$의 서로 다른 실근은 3개, $f(x)=x_3$의 서로 다른 실근은 1개이므로 $g(2+)=5$이다.





따라서 $g(2+)-g(2-)=g(2)+1=4$이므로, ㄴ은 참이다.

ㄷ.

$g(t)$의 값은 정수이고, $1 \le g(t) \le 9$이다.

$t=\frac{1}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g\left(\frac{1}{3}\right)=1$이다.

$t=\frac{2}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g\left(\frac{2}{3}\right)=1$이다.

$t=1$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g(1)=1$이다.

$t=\frac{4}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g\left(\frac{4}{3}\right)=1$이다.

$t=\frac{5}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g\left(\frac{5}{3}\right)=1$이다.

$t=2$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1,\ x=x_2$의 2개이고, $f(x)=x_1$의 실근은 1개, $f(x)=x_2$의 실근은 1개 이므로 $g(2)=2$이다.

$t=\frac{7}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1,\ x=x_2,\ x=x_3$의 3개이고, $g\left(\frac{7}{3}\right)<7$이다.

$t=\frac{8}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1,\ x=x_2,\ x=x_3$의 3개이고, $g\left(\frac{8}{3}\right)<8$이다.

$t=3$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1,\ x=x_2,\ x=x_3$의 3개이고, $g(3)<9$이다.

따라서 $g(t)=3t$이도록 하는 실수 t는 $t=\frac{1}{3}$의 1개이므로,

ㄷ은 거짓이다.

여담:

$f(f(x))=0$의 해석방법 알아두기.

ㄷ에서 t의 값이 정수일 필요가 없다는 점 놓치지 말기!

15.

정답: ④

해설:

step1 a_4 구하기

$a_{m+2} < a_{m+1} < a_m$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 5이므로,

$a_7 < a_6 < a_5$이고, $a_5 \geq a_4$이다.

또한 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n \ (a_n \leq 0, a_n = 3) \\ a_n - n \ (0 < a_n < 3, a_n > 3) \end{cases}$ 이다.

$a_4 = a$라 하면, $a_5 \geq a_4$이므로 $a_5 = a+4$이고 $a \leq 0$ 또는 $a = 3$이다.

$a_5 = a+4$일 때 $a_6 < a_5$이므로 $a_6 = a_5 - 5 = a - 1$이고, $0 < a+4 < 3$ 또는 $a+4 > 3$이다.

$a_6 = a-1$일 때 $a_7 < a_6$이므로 $a_7 = a_6 - 6 = a - 7$이고, $0 < a-1 < 3$ 또는 $a-1 > 3$이다.

따라서 $a \leq 0$ 또는 $a = 3$이고, $-4 < a < -1$ 또는 $a > -1$이며, $1 < a < 4$ 또는 $a > 4$를 모두 만족하는 a의 값은 $a = 3$이다.

그러므로 $a_4 = 3$, $a_5 = 7$, $a_6 = 2$, $a_7 = -4$이다.

step2 a_1 구하기

$a_4 = 3$일 때 $a_3 = 6$ 또는 $a_3 = 0$이다.

만약 $a_3 = 6$이라면 $a_2 = 8$이고, $a_1 = 9$인데, 이 경우 $a_{m+2} < a_{m+1} < a_m$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 1이기 때문에 모순이다.

따라서 $a_3 = 0$이고, 이때 $a_2 = 2$ 또는 $a_2 = -2$인데,

만약 $a_2 = 2$라면 가능한 a_1의 값이 존재하지 않으므로 $a_2 = -2$이고, $a_1 = -3$이다.

step3 a_{21} 구하기

$a_7 = -4$이므로

$a_8 = -4 + 7 = 3$, $a_9 = 3 + 8 = 11$, $a_{10} = 11 - 9 = 2$, $a_{11} = 2 - 10 = -8$이고,

$a_{12} = -8 + 11 = 3$, $a_{13} = 3 + 12 = 15$, $a_{14} = 15 - 13 = 2$, $a_{15} = 2 - 14 = -12$이며,

$a_{16} = -12 + 15 = 3$, $a_{17} = 3 + 16 = 19$, $a_{18} = 19 - 17 = 2$, $a_{19} = 2 - 18 = -16$이므로

$a_{20} = -16 + 19 = 3$이고 $a_{21} = 3 + 20 = 23$이다.

따라서 $a_{21} - a_1 = 23 - (-3) = 26$이다.

여담:

1) $a_7 < a_6 < a_5$이고, $a_5 \geq a_4$이라는 점을 통해 a_4의 값을 구할 수 있다.

2) $a_{m+2} < a_{m+1} < a_m$을 만족하는 자연수 m의 최솟값이 5라는 점 놓치지 말기. ($m = 1$일 때 $a_{m+2} < a_{m+1} < a_m$이면 안 된다.)

3) a_{21}을 구할 때, a_n의 주기성을 파악해서 구해도 된다.

자연수 k에 대하여 $\begin{cases} a_{4k-3} = 4k - 1 & (k \geq 2) \\ a_{4k-2} = 2 & (k \geq 2) \\ a_{4k-1} = -4(k-1) & (k \geq 1) \\ a_{4k} = 3 & (k \geq 1) \end{cases}$ 이다.

20.

정답: 20

해설:

step1

x에 대한 방정식 $2f(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)$은, 양변을 f라는 함수에 대입한

$f(2f(x))=f\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)$와 의미가 같다. ($f$는 일대일 대응이므로)

$f\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{x}{2}$이므로, $2f(x)=h(x)$라 하면,

방정식 $2f(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)$은 방정식 $h(h(x))=x$와 같다.

step2

$h(x)=2f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x+2k$이다.

$h(x)$를 x에 대해 미분하면 $h'(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}>0$이므로 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$h(x)=x$의 근을 $x=x_1,\ x_2,\ \cdots$라 하면,

$h(h(x))=x$의 근은 $h(x)=x_1,\ x_2,\ \cdots$의 근과 같고,

$h(x)$는 증가함수이므로 $h(h(x))=x$의 근의 개수는 $h(x)=x$의 근의 개수와 같다.

따라서 $h(x)=x$의 서로 다른 실근은 2개이다.

step3

$y=h(x)$와 $y=x$의 접점의 x좌표를 p라 하면, $h'(p)=1$이고 $h(p)=p$이다.

따라서 $h'(p)=\frac{3}{4}p^2+\frac{1}{4}=1$이므로 $p=-1$ 또는 $p=1$이고,

$h(p)=\frac{1}{4}p^3+\frac{1}{4}p+2k=p$이다.

이때 $p=-1$이면 $k=-\frac{1}{4}$이므로 k가 양수라는 조건을 만족하지 않는다.

그러므로 $p=1$이고, $k=\frac{1}{4}$이므로, $80k=20$이다.

여담:

주어진 방정식을 우리에게 익숙한 형태인 $h(h(x))=x$의 형태로 바꾸어서 해석하자.

$f(x)$가 일대일대응이므로 $h(x)$ 또한 일대일대응이고, 따라서 $h(h(x))=x$의 실근의 개수는 $h(x)=x$의 실근의 개수와 동일하다.

앞서 15회 14번에서도 $f(f(x))=x$의 해석을 다루었으니 이 회차를 통해 $h(h(x))=x$의 해석을 확실하게 알아가도록 하자.

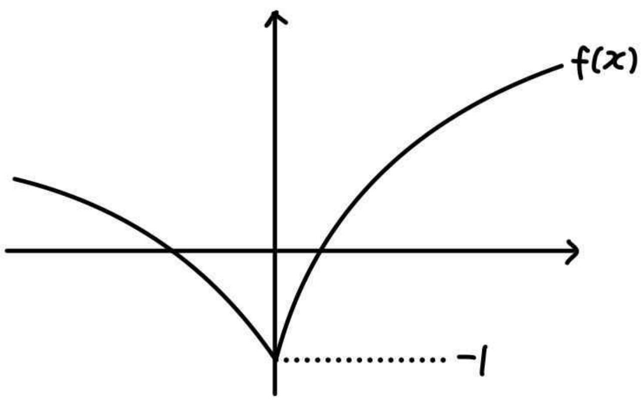
21.

정답: 27

해설:

step1

절댓값을 풀어보면 $f(x)=\begin{cases}\log_a\left(4x+\dfrac{1}{a}\right) & (x\geq 0)\\ \log_a\left(-2x+\dfrac{1}{a}\right) & (x<0)\end{cases}$ 이다.



$x\to-\infty$일 때 $f(x)\to\infty$, $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이다.

step2

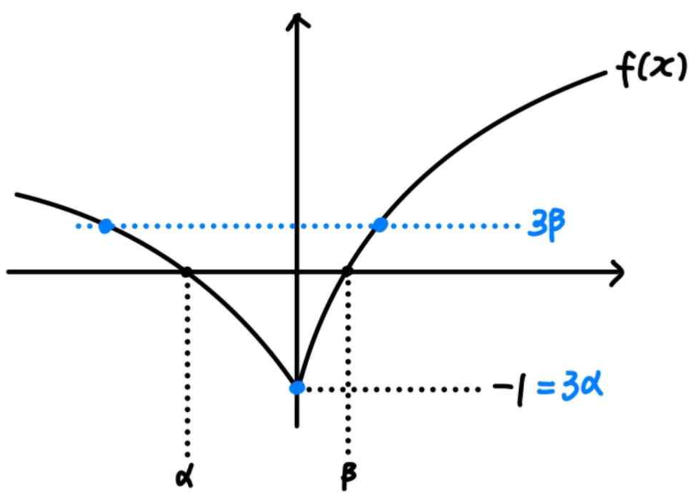
$f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하자. (단, $\alpha<0<\beta$)

$\dfrac{f(x)}{3}=\beta$의 실근은, $f(x)=3\beta$의 실근과 같으므로, $\dfrac{f(x)}{3}=\beta$의 실근의 개수는 2개이다.

따라서 $\dfrac{f(x)}{3}=\alpha$의 실근이 1개여야 하므로, $3\alpha=-1$,

즉 $\alpha=-\dfrac{1}{3}$이다.

또한 $f(\alpha)=0$이므로 $f(\alpha)=\log_a\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{a}\right)=0$이고, $a=3$이다.



step3

$f\left(\dfrac{f(x)}{3}\right)=0$의 가장 큰 실근은, $f(x)=3\beta$의 가장 큰 실근과 같다.

1) β 구하기

$\log_3\left(4\beta+\dfrac{1}{3}\right)=0$이므로 $\beta=\dfrac{1}{6}$이다.

2) $f(x)=3\beta$의 가장 큰 실근 구하기

$\log_3\left(4x+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$의 실근이므로 $x=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{12}$이다.

따라서 $m=27$이다.

여담:

$f\left(\dfrac{f(x)}{3}\right)=0$의 서로 다른 실근은, $f(x)=0$의 서로 다른 모든 실근을 α, β라 할 때, $\dfrac{f(x)}{3}=\alpha$, β의 서로 다른 모든 실근과 같다.

22.

정답: 257

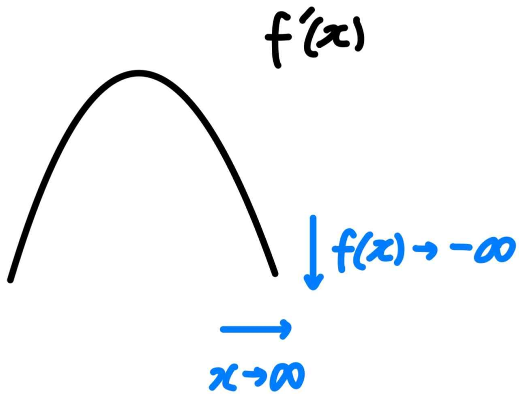
해설:

step1 $f'(x)$의 그래프 해석하기

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 음수라면,

$x \to \infty$일 때 $f'(x) \to -\infty$일 것이고,

이에 따라 $f'(k-1) \times f'(k) \times f'(k+1) < 0$을 만족하는 양수 k의 개수는 무수히 많을 것이다.



따라서 $f(x)$의 최고차항 계수는 양수이다.

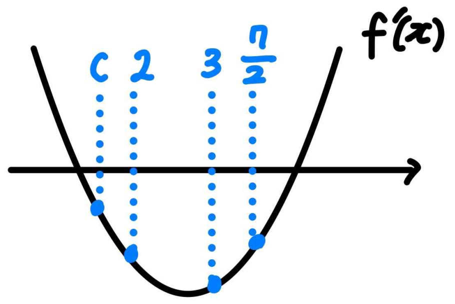
이때 $f'\left(\frac{7}{2}\right) < 0$이므로 $f'(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

또한 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$에서 평균값정리를 적용하면,

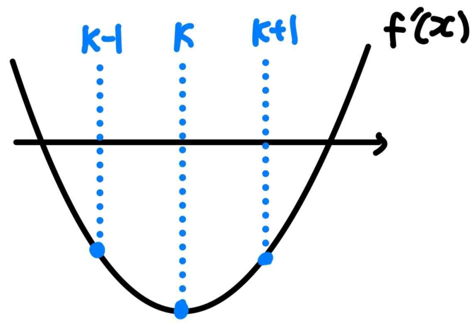
$f'(c) = \dfrac{2-3}{2-\frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{3} < 0$인 실수 c가 구간 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$에 존재하고,

$f'\left(\frac{7}{2}\right) < 0$이므로,

최소 $x=2$와 $x=3$에서 $f'(x) < 0$이다.



1) 만약 $f'(x) < 0$을 만족하는 정수 x의 개수가 3개 이상이라면, $f'(k-1) \times f'(k) \times f'(k+1) < 0$을 만족하는 정수 k가 존재하게 된다.



2) $f'(x) < 0$을 만족하는 정수 x의 개수가 2개이고, $f'(\alpha) < 0$, $f'(\alpha+1) < 0$이라 하자.

이때 $f'(\alpha-2) > 0$이고, $f'(\alpha-1) > 0$ 또는 $f'(\alpha-1) = 0$이다.

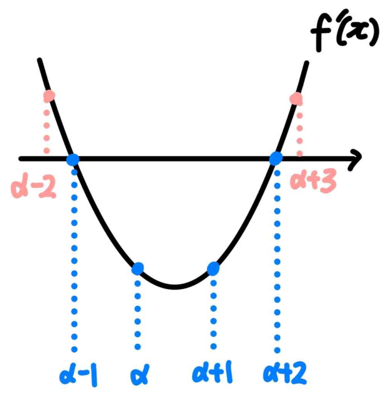
만약 $f'(\alpha-1) > 0$이라면 $f'(\alpha-2) \times f'(\alpha-1) \times f'(\alpha) < 0$이므로 $f'(k-1) \times f'(k) \times f'(k+1) < 0$을 만족하는 정수 k가 존재하게 된다.

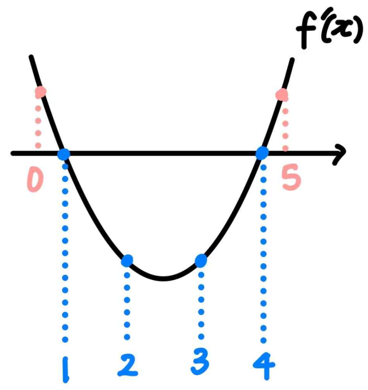
따라서 $f'(\alpha-1) = 0$이다.

또한 $f'(\alpha+3) > 0$이고, $f'(\alpha+2) > 0$ 또는 $f'(\alpha+2) = 0$이다.

만약 $f'(\alpha+2) > 0$이라면
$f'(\alpha+1) \times f'(\alpha+2) \times f'(\alpha+3) < 0$이므로
$f'(k-1) \times f'(k) \times f'(k+1) < 0$을 만족하는 정수 k가 존재하게 된다.

따라서 $f'(\alpha+2) = 0$이다.



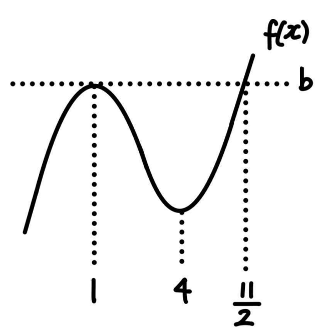


그러므로 $f'(1) = 0$, $f'(2) < 0$, $f'(3) < 0$, $f'(4) = 0$이다.

step2

$f'(x) = 3a(x-1)(x-4)$라 하자. (단, $a > 0$)

삼차함수 비율관계에 의해 $f(x) = a(x-1)^2\left(x - \frac{11}{2}\right) + b$이다.



이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$이므로 $a\times\left(\frac{1}{2}-1\right)^2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{11}{2}\right)+b=3$이고,

정리하면 $-\frac{5}{4}a+b=3$이다.

또한 $f(2)=2$이므로 $a\times(2-1)^2\times\left(2-\frac{11}{2}\right)+b=2$이고, 정리하면

$-\frac{7}{2}a+b=2$이다.

따라서 $a=\frac{4}{9}$이고, $b=\frac{32}{9}$이므로

$f(x)=\frac{4}{9}(x-1)^2\left(x-\frac{11}{2}\right)+\frac{32}{9}$이고,

$f(7)=\frac{4}{9}\times(7-1)^2\times\left(7-\frac{11}{2}\right)+\frac{32}{9}=\frac{248}{9}$이다.

그러므로 $p=9$, $q=248$이므로 $p+q=257$이다.

여담:

평균값정리와 주어진 조건을 통해 $f'(x)<0$을 만족시키는 정수 x가 최소 2개 존재한다는 점을 파악한 다음, 주어진 조건을 만족하기 위한 $f'(x)$의 상황을 파악하자.

기출 다시보기: 2024학년도 6월 모의평가 22번

22. 정수 $a\,(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
>
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\,k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

정답: 380

기출 다시보기: 2024학년도 수능 22번

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $$f(k-1)\times f(k+1)<0$$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

정답: 483

16회 정답

8	②	*9*	⑤	*10*	⑤	*11*	②	*12*	④
13	④	*14*	②	*15*	④	*20*	17	*21*	59
22	33								

8.

정답: ②

해설:

점 P의 위치를 $x_1(t)$, 점 Q의 위치를 $x_2(t)$라 하자.

$v_1(t)=1-t$이고, $x_1(0)=0$이므로 $x_1(t)=-\frac{1}{2}t^2+t$이고,

$v_2(t)=4-2t$이고, $x_2(0)=0$이므로 $x_2(t)=-t^2+4t$이다.

이때 $t=a$일 때 점 P와 점 Q의 위치가 동일하므로
$-\frac{1}{2}a^2+a=-a^2+4a$이고,

이를 만족하는 양수 a의 값은 $a=6$이다.

또한 $t=a$일 때 점 Q의 속도는

$v_2(a)=v_2(6)=4-2\times6=-8$이다.

따라서 이 순간 점 Q의 속력은 8이므로, $b=8$이다.

그러므로 $ab=6\times8=48$이다.

여담:

시각 $t=0$일 때 동시에 원점에서 출발한다는 점 놓치지 말기!

속도와 속력 구분은 당연히 할 줄 알아야 한다.

속력 = |속도|이다.

9.

정답: ⑤

해설:

$a_{n+1}+3S_n=(a_{n+1}+S_n)+2S_n=S_{n+1}+2S_n=2$이므로
$S_{n+1}=2-2S_n$이다.

따라서 $S_3=2-2S_2$이고, 주어진 조건에 의해 $S_2+S_3=6$이므로
$S_2=-4$, $S_3=10$이다.

또한 $S_4=2-2S_3=-18$이고, $S_5=2-2S_4=38$이다.

이때 $S_2=2-2S_1=-4$이므로 $S_1=a_1=3$이고,

$a_5=S_5-S_4=38-(-18)=56$이다.

그러므로 $a_1+a_5=3+56=59$이다.

여담:

a_n과 S_n이 한 식에 섞여있으면 헷갈리므로, 주어진 식을 S_n에 대한 식으로 바꿔 원하는 값 구하기.

이때 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$임을 이용해 식을 변형하자.

10.

정답: ⑤

해설:

먼저 $f(x)=2x^3+2kx^2+(k+3)x$라 하면,

$f'(x)=6x^2+4kx+(k+3)$이다.

제시된 원점을 지나는 두 접선 중 한 접선은 $x=0$에서 접하는 직선이고, 이 직선의 방정식은 $y=f'(0)x+f(0)=(k+3)x$이다.

또한 이 직선과 x축 대칭인 직선은 $y=-(k+3)x$이다.

제시된 원점을 지나는 두 접선 중 원점에서 접하지 않는 접점의 x좌표를 t라 할 때, $f(x)=(k+3)x$와 $f(x)=0$의 세 근의 합이 동일함을 이용하면, $t+t+0=-k$이므로 $t=-\frac{k}{2}$이다.

따라서 $f'\left(-\frac{k}{2}\right)=-(k+3)$이므로

$6\times\left(-\frac{k}{2}\right)^2+4k\times\left(-\frac{k}{2}\right)+(k+3)=-(k+3)$이고, 이를 만족하는 양수 k의 값은 6이다.

여담:

삼차함수의 근과 계수와의 관계를 생각할 때,

$f(x)=0$과 $f(x)-(px+q)=0$의 삼차항과 이차항의 계수가 동일하기 때문에, 두 방정식의 세 근의 합은 동일하다.

11.

정답: ②

해설:

step1

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$이므로,

방정식 $\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right|+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$은

방정식 $\left|\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right|+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$과 같다.

또한 위 방정식의 근은,

1) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>0$인 경우 $\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$을 만족시키고,

2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)<0$인 경우 $\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$을 만족시킨다.

step2

$2x-\frac{\pi}{3}=t$라 하면, $-\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{8}{3}\pi$이다.

1) $\cos t>0$, $\tan t=-1$인 경우

$-\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{8}{3}\pi$에서 $\tan t=-1$을 만족시키는 t의 값은 $-\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이고, 이 중 $\cos t>0$을 만족시키는 t의 값은 $-\frac{1}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이다.

따라서 이 경우 가능한 x는 $\frac{1}{24}\pi$, $\frac{25}{24}\pi$이다.

2) $\cos t<0$, $\tan t=1$인 경우

$-\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{8}{3}\pi$에서 $\tan t=1$을 만족시키는 t의 값은 $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{9}{4}\pi$이고, 이 중 $\cos t<0$을 만족시키는 t의 값은 $\frac{5}{4}\pi$이다.

따라서 이 경우 가능한 x는 $\frac{19}{24}\pi$이다.

그러므로 가능한 모든 x값의 합은
$\frac{1}{24}\pi+\frac{19}{24}\pi+\frac{25}{24}\pi=\frac{15}{8}\pi$이다.

여담:

각변환만 한다면 주어진 방정식은 꽤 간단한 형태로 바뀐다.

각변환이 기억 안 나는 친구는... 미적분 선택자라면 $\frac{\pi}{2}$에 대한 덧셈정리로 해결하는 것도 하나의 방법이랍니다.

혹시 몰라 작성하는 $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$ 형태의 각변환 방법

->n이 홀수라면 함수가 바뀌고, n이 짝수라면 함수 그대로!

->$0<\theta<\frac{\pi}{2}$라 할 때, $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$가 위치한 사분면에서의 '원래' 삼각함수의 부호가 각변환된 삼각함수의 부호

$2x-\frac{\pi}{3}=t$로 치환할 때 t의 범위 바뀌주는 것 놓치지 않게 조심하기!

12.

정답: ④

해설:

step1

$\lim_{t\to k-} f(t)=p$, $\lim_{t\to k+} f(t)=q$라 하자.

$\lim_{x\to k-} f(x)=k^2-q=p$이고, $\lim_{x\to k+} f(x)=k+p=q$이다.

따라서 $k^2=p+q$이고, $k=q-p$이다.

step2

1) $f(x)$가 $x=k$에서 연속인 경우

$p=q$이고, $k^2=p+q=2p$, $k=q-p=0$이므로 $k=p=q=0$이다.

따라서 이 경우 k가 양수라는 조건을 만족하지 않는다.

2) $f(x)$가 $x=k$에서 불연속인 경우

$|p-2|=|q-2|$이고, $p\neq q$이므로 $p+q=4$이다.

이때 $k^2=p+q$이므로 양수 k의 값은 2이고, $k=q-p=2$이므로 $q=3$, $p=1$이다.

그러므로 $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & (x<2) \\ x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$ 이다.

따라서 $f(-2)=(-2)^2-3=1$이고, $f(5)=5+1=6$이므로 $f(-2)+f(5)=1+6=7$이다.

여담:

step1에서 $k^2=p+q$, $k=q-p$만 파악했으면 무난하게 풀리는 문제.

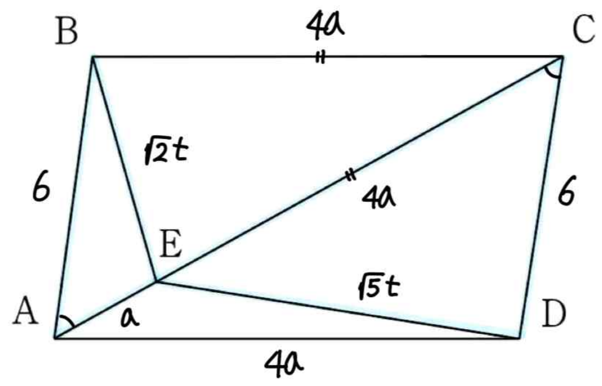
$f(x)$의 식을 정의할 때 사용된 $\lim_{t\to k-} f(t)$와 $\lim_{t\to k+} f(t)$는 상수이다.

13.

정답: ④

해설:

step1 조건 설정



1)

$\overline{\mathrm{AE}}=a$, $\overline{\mathrm{CE}}=4a$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CE}}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=4a$이다.

(단, $a>0$)

2)

삼각형 ABE의 외접원의 반지름 길이는 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{BE}}}{2\sin\angle\mathrm{BAE}}$이고,

삼각형 CDE의 외접원의 반지름 길이는 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{2\sin\angle\mathrm{DCE}}$이다.

이때 주어진 조건에 의해 두 삼각형의 외접원의 넓이비가 $2:5$이므로 두 삼각형의 외접원의 반지름 길이의 비는 $\sqrt{2}:\sqrt{5}$이다.

또한 $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{DCE}$이므로 $\sin\angle\mathrm{BAE}=\sin\angle\mathrm{DCE}$이고, 두 삼각형의 외접원의 반지름의 길이비는 $\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{DE}}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{2}:\sqrt{5}$이고, $\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{2}t$, $\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{5}t$라 하자.

(단, $t>0$)

step2

삼각형 BCE에서 코사인법칙을 사용하면,

$$\cos\angle\mathrm{BCE}=\frac{(\overline{\mathrm{BC}})^2+(\overline{\mathrm{CE}})^2-(\overline{\mathrm{BE}})^2}{2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CE}}}=\frac{(4a)^2+(4a)^2-(\sqrt{2}t)^2}{2\times 4a\times 4a}$$이고,

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면,

$$\cos\angle\mathrm{BCE}=\frac{(\overline{\mathrm{BC}})^2+(\overline{\mathrm{AC}})^2-(\overline{\mathrm{AB}})^2}{2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{(4a)^2+(5a)^2-6^2}{2\times 4a\times 5a}$$이므로,

$\dfrac{(4a)^2+(4a)^2-(\sqrt{2}t)^2}{2\times4a\times4a}=\dfrac{(4a)^2+(5a)^2-6^2}{2\times4a\times5a}$이고,

정리하면 $2a^2+5t^2=72$이다.

또한 삼각형 ABE에서 코사인법칙을 사용하면,

$\cos\angle\mathrm{BAE}=\dfrac{(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{AC}})^2-(\overline{\mathrm{BE}})^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AE}}}=\dfrac{6^2+a^2-(\sqrt{2}t)^2}{2\times6\times a}$이고,

삼각형 CDE에서 코사인법칙을 사용하면,

$\cos\angle\mathrm{DCE}=\dfrac{(\overline{\mathrm{CE}})^2+(\overline{\mathrm{CD}})^2-(\overline{\mathrm{DE}})^2}{2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{CD}}}=\dfrac{(4a)^2+6^2-(\sqrt{5}t)^2}{2\times4a\times6}$이며,

$\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{DCE}$이므로 $\cos\angle\mathrm{BAE}=\cos\angle\mathrm{DCE}$라서

$\dfrac{6^2+a^2-(\sqrt{2}t)^2}{2\times6\times a}=\dfrac{(4a)^2+6^2-(\sqrt{5}t)^2}{2\times4a\times6}$이고,

정리하면 $4a^2+t^2=36$이다.

따라서 $t=2\sqrt{3}$, $a=\sqrt{6}$이다.

step3

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면,

$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2-(\overline{\mathrm{AC}})^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$

$=\dfrac{6^2+(4\sqrt{6})^2-(5\sqrt{6})^2}{2\times6\times4\sqrt{6}}==-\dfrac{\sqrt{6}}{16}$이므로

$\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{5\sqrt{10}}{16}$이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 2배와 같고,

계산하면

$2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\angle\mathrm{ABC}=2\times\dfrac{1}{2}\times6\times4\sqrt{6}\times\dfrac{5\sqrt{10}}{16}=15\sqrt{15}$

이다.

여담:

코사인법칙을 주로 이용하는 도형문제에서, 문자를 여러개 잡는 것을 두려워해서는 안 된다.

한 문자로 표현했을 때는 안 보이는 풀이가, 두 문자로 표현했을 때는 연립이 가능하고 식 표현이 가능해지며 수월하게 풀리는 경우도 많다.

14.

정답: ②

해설:

ㄱ.

주어진 등식 $xg(x)=f(x)\left|\int_3^x f(t)dt\right|$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)\times\left|\int_3^0 f(t)dt\right|=0$이다.

만약 $f(0)\neq0$이라면 $\int_3^0 f(t)dt=0$이고, $\left|\int_3^x f(t)dt\right|$는 $x=0$ 주위에서 부호변화가 생기지 않는다.

($\because$ $\left|\int_3^x f(t)dt\right|$은 항상 0이상의 값이기 때문)

따라서 $xg(x)$는 $x=0$ 주위에서 부호변화가 없어야 하는데, 이를 위해서는 $g(0)=0$이어야 한다. ($g(0)\neq0$이라면 $xg(x)$는 $x=0$ 주위에서 부호변화가 생긴다.)

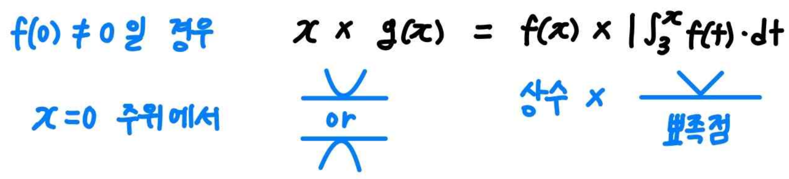
이때 $f(0)\neq0$이고, $\left|\int_3^x f(t)dt\right|$의 $x=0$ 주위에서 미분계수도 0이 아니므로 이 경우는 불가능하다.

그러므로 $f(0)=0$이고, ㄱ은 참이다.

(이해하기 쉽게 말해보자면, $f(0)\neq0$이라고 가정할 경우

$x=0$ 주위에서 $xg(x)$는 함숫값도 0이고 미분계수도 0인데,

$f(x)\left|\int_3^x f(t)dt\right|$는 함숫값은 0이지만 미분계수가 0이 아니다.)



ㄴ.

$g(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로, $f(0)\neq0$이다.

즉, $f(0)\times\left|\int_3^0 f(t)dt\right|=0$을 만족시키려면 $\left|\int_3^0 f(t)dt\right|=0$이어야 한다.

이때

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)\times\dfrac{\left|\int_3^x f(t)dt\right|}{x}=f(0)\times|f(0)|$이고,

$\lim_{x\to0-} g(x)= \lim_{x\to0-} f(x)\times\dfrac{\left|\int_3^x f(t)dt\right|}{x}=f(0)\times\{-|f(0)|\}$이므로,

$\lim_{x\to0+} g(x)- \lim_{x\to0-} g(x)=8$이려면

$f(0)\times|f(0)|-f(0)\times\{-|f(0)|\}=8$이고, $f(0)=2$이다.

$f(x)=x^2+ax+2$라 하면,

$\int_3^0 f(x)dx=-\int_0^3 x^2+ax+2=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+2x\right]_0^3=0$이므로

$a=-\dfrac{10}{3}$이다.

따라서 $f(x)=x^2-\dfrac{10}{3}x+2$이고, $f(3)=1$이므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 연속이어야 하고, $x=0$에서도 연속이어야 하므로 $f(0)=0$이다.

$f(x)=x^2+bx$라 하면,

$xg(x)=(x^2+bx)\times\left|\int_3^x (t^2+bt)dt\right|$이므로

$g(x)=(x+b)\left|\int_3^x (t^2+bt)dt\right|$이다.

만약 $x=3$에서 $\left|\int_3^x (t^2+bt)dt\right|$가 미분가능하다면,

$3^2+b\times3=0$이어야 하므로 $b=-3$이어야 하는데, 이 경우 $\left|\int_3^x (t^2+bt)dt\right|$가 $x=-\dfrac{3}{2}$에서 미분불가능해지므로 $g(x)$ 역시 $x=-\dfrac{3}{2}$에서 미분불가능하다.

또한 $x=3$에서 $\left|\int_3^x (t^2+bt)dt\right|$가 미분불가능한데

$(x+b)\left|\int_3^x (t^2+bt)dt\right|$가 $x=3$에서 미분가능하려면

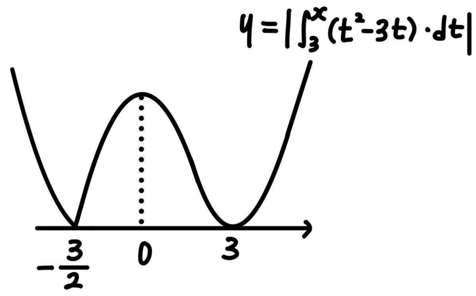
$b=-3$이어야한다.

그러나 이 경우 역시 $\left|\int_3^x (t^2+bt)dt\right|$가 $x=-\dfrac{3}{2}$에서

미분불가능해지므로 $g(x)$ 역시 $x=-\dfrac{3}{2}$에서 미분불가능하다.

그러므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 $f(x)$는 존재하지 않으므로 ㄷ은 거짓이다.

(참고-$b=-3$인 경우 $\left|\int_3^x (t^2+bt)dt\right|$의 그래프



$x=-\dfrac{3}{2}$에서 미분불가능함을 확인할 수 있다.)

여담:

$g(x)$는 다항함수가 아니다.

논리가 헷갈리면 뾰족점인지, 미분 가능한 점인지 간단하게 그래프로 확인해 가며 푸는 것도 나쁘지 않을 것이다.

15.

정답: ④

해설:

step1

주어진 식을 바꾸어보면,

$$a_n = \begin{cases} a_{n+1} - n & (a_{n+1} \leq n) \\ a_{n+1} + n^2 & (a_{n+1} > -n^2) \end{cases}$$ 이다.

step2

1.

$a_{11} = 0$이므로 $a_{10} = 0 - 10 = -10$ 또는 $a_{10} = 0 + 10^2 = 100$이다.

이때 $a_{10} = 100$이라면, $n \leq 9$인 모든 n에 대해
$a_n = a_{n+1} + n^2$이어야 하므로 a_5의 값이 음수가 될 수 없다.

따라서 $a_{10} = -10$이다.

2.

$a_{10} = -10$이므로 $a_9 = -10 - 9 = -19$ 또는 $a_9 = -10 + 9^2 = 71$이다.

이때 $a_9 = 71$이라면, $n \leq 8$인 모든 n에 대해
$a_n = a_{n+1} + n^2$이어야 하므로 a_5의 값이 음수가 될 수 없다.

따라서 $a_9 = -19$이다.

3.

$a_9 = -19$이므로 $a_8 = -19 - 8 = -27$ 또는 $a_8 = -19 + 8^2 = 45$이다.

이때 $a_8 = 45$라면, $n \leq 7$인 모든 n에 대해 $a_n = a_{n+1} + n^2$이어야 하므로 a_5의 값이 음수가 될 수 없다.

따라서 $a_8 = -27$이다.

4.

$a_8 = -27$이므로 $a_7 = -27 - 7 = -34$ 또는 $a_7 = -27 + 7^2 = 22$이다.

이때 $a_7 = 22$라면, $n \leq 6$인 모든 n에 대해 $a_n = a_{n+1} + n^2$이어야 하므로 a_5의 값이 음수가 될 수 없다.

따라서 $a_7 = -34$이다.

5.

$a_7 = -34$이므로 $a_6 = -34 - 6 = -40$ 또는 $a_6 = -34 + 6^2 = 2$이다.

이때 $a_6 = -40$라면, $n \leq 5$인 모든 n에 대해 $a_n = a_{n+1} - n$이어야 하므로 a_1의 값이 양수가 될 수 없다.

따라서 $a_6 = 2$이다.

6.

$a_6 = 2$이므로 $a_5 = 2 - 5 = -3$ 또는 $a_5 = 2 + 5^2 = 27$이다.

이때 주어진 조건에서 $a_5 < 0$이므로, $a_5 = -3$이다.

7.

$a_5 = -3$이므로 $a_4 = -3 - 4 = -7$ 또는 $a_4 = -3 + 4^2 = 13$이다.

7-1. $a_4 = -7$인 경우

$a_4 = -7$이므로 $a_3 = -7 - 3 = -10$ 또는 $a_3 = -7 + 3^2 = 2$이다.

이때 $a_3 = -10$일 경우, $n \leq 2$인 모든 n에 대해
$a_n = a_{n+1} - n$이어야 하므로 a_1의 값이 자연수가 될 수 없다.

따라서 $a_3 = 2$이다.

$a_3 = 2$이므로 $a_2 = 2 - 2 = 0$ 또는 $a_2 = 2 + 2^2 = 6$이다.

만약 $a_2 = 0$이라면, $a_1 = 0 - 1 = -1$ 또는 $a_1 = 0 + 1^2 = 1$이고,

$a_2 = 6$이라면, $a_1 = 6 + 1^2 = 7$이다.

7-2. $a_4 = 13$인 경우

$a_4 = 13$이므로 $a_3 = 13 + 3^2 = 22$이다.

$a_3 = 22$이므로 $a_2 = 22 + 2^2 = 26$이다.

$a_2 = 26$이므로 $a_1 = 26 + 1^2 = 27$이다.

step3

a_1이 자연수라는 조건을 만족하는 a_1의 값은 1, 7, 27이므로,
주어진 조건을 만족하는 모든 a_1의 값의 합은 $1 + 7 + 27 = 35$이다.

여담:

역추적할 때 실수 안 하게 조심하기.

제시되어있는 a_{n+1}을 a_n에 관해 표현한 식을, a_n을 a_{n+1}에 관해 표현한 식으로 바꾸어 생각하면 실수할 포인트를 줄일 수 있을 것이다.

20.

정답: 17

해설:

step1

$f(x)g(x)=(x+4)(x-k)^2$이므로 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항 계수의 부호가 동일하고, (나) 조건에 의해 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수라는 점을 알 수 있다.

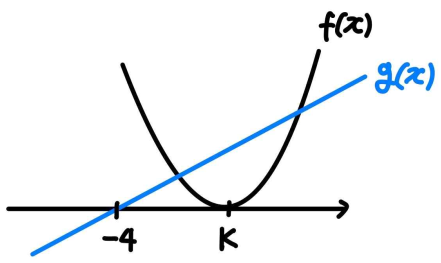
또한 (가) 조건에 의해 $x\to-\infty$인 상황에도 $f(x)\geq g(x)$이므로, $f(x)$는 이차함수, $g(x)$는 일차함수이다.

따라서 $f(x)=ax^2+\cdots$라 하면 $g(x)=\frac{1}{a}x+\cdots$인데, 이때 (나) 조건에 의해 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^n}=\frac{1}{3}$이어야 하므로 $a=\frac{1}{3}$이다.

그러므로 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\cdots$이고, $g(x)=3x+\cdots$이다.

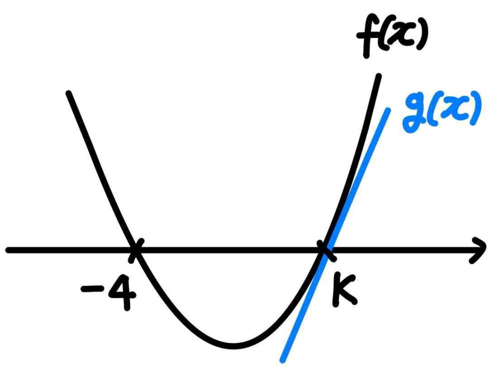
step2

1) $f(x)=\frac{1}{3}(x-k)^2$, $g(x)=3(x+4)$인 경우



이 경우 모든 실수 x에 대해 $f(x)\geq g(x)$라는 (가) 조건을 만족하지 않는다.

2) $f(x)=\frac{1}{3}(x+4)(x-k)$, $g(x)=3(x-k)$인 경우



모든 실수 x에 대해 $f(x)\geq g(x)$이려면 $f(k)=g(k)$이므로 $f'(k)=g'(k)$여야 한다.

이때 $f'(k)=\frac{1}{3}(k+4)$, $g'(k)=3$이므로 $\frac{1}{3}(k+4)=3$이고, $k=5$이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x+4)(x-5)$이므로

$f(8)=\frac{1}{3}\times(8+4)\times(8-5)=12$이고,

$k+f(8)=5+12=17$이다.

여담:

(가) 조건을 통해 $f(x)$와 $g(x)$의 차수를 결정할 수 있고, (나) 조건을 통해 $f(x)$의 최고차항의 계수를 알 수 있다.

step2에서 $f'(k)=g'(k)$를 유도하는 과정이 헷갈린다면, $h(x)=f(x)-g(x)$라 생각해보자.

모든 실수 x에 대해 $h(x)\geq 0$이어야 하는데, $h(k)=0$이므로, $h'(k)=0$이어야 한다.

21.

정답: 59

해설:

여담:

step1

$a_n = a + (n-1)d$라 하자. (단, $d > 0$)

1)

$b_7 = 2 \times (a_1 \times a_7 + a_2 \times a_6 + a_3 \times a_5) + a_4 \times a_4$
$= 2 \times \{(a_4 - 3d)(a_4 + 3d) + (a_4 - 2d)(a_4 + 2d) + (a_4 - d)(a_4 + d)\} + (a_4)^2$
$= 2 \times \{3 \times (a_4)^2 - 14d^2\} + (a_4)^2 = 112$이므로

$(a_4)^2 - 4d^2 = 16$이다.

2)

$b_{10} - 2b_5$

$= 2 \times (a_1 \times a_{10} + a_2 \times a_9 + a_3 \times a_8 + a_4 \times a_7 + a_5 \times a_6)$
$-2 \times (a_1 \times a_5 + a_2 \times a_4 + a_3 \times a_3 + a_4 \times a_2 + a_5 \times a_1)$

($a_{10} - a_5 = a_9 - a_4 = a_8 - a_3 = a_7 - a_2 = a_6 - a_1 = 5d$임을 이용하면)

$= 2 \times (a_1 \times 5d + a_2 \times 5d + a_3 \times 5d + a_4 \times 5d + a_5 \times 5d)$
$= 2 \times 5d \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 50d \times a_3 = \frac{525}{2}$이므로

$d \times a_3 = \frac{21}{4}$이다.

이때 $d > 0$이므로 $a > 0$이다.

step2

$(a_4)^2 - 4d^2 = (a_3 + d)^2 - 4d^2 = 16$이고, $d \times a_3 = \frac{21}{4}$이므로

$(a_3 + d)^2 - 4d^2 = \frac{64}{21} a_3 \times d$이고,

정리하면 $(7a_3 + 9d)(3a_3 - 7d) = 0$이므로 $a_3 = \frac{7}{3}d$이다.

($\because a > 0$이고 $d > 0$이므로)

따라서 $d \times a_3 = d \times \frac{7}{3}d = \frac{21}{4}$이므로 $a_3 = \frac{7}{2}$, $d = \frac{3}{2}$이고,

$a_{40} = a_3 + 37d = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \times 37 = 59$이다.

여담:

대칭성을 이용해가며 식을 정리하는게 포인트인 문제

step2에서 $(a_3 + d)^2 - 4d^2 = \frac{64}{21} a_3 \times d$라는 괴랄한 형태의 식을 보고 인수분해를 포기했을수도 있는데, 일단 인수분해를 끝까지 해봤어야 한다!

22.

정답: 33

해설:

step1

1) $f(a)f'(a)\neq 0$인 경우

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a+2f(x)}{f(x)f'(x)}=\dfrac{2f(a)}{f(a)f'(a)}=-1$이고 $f(a)f'(a)\neq 0$이므로 $f'(a)=-2$이다.

따라서 이 경우 $f(a)\neq 0$이고 $f'(a)=-2$이다.

2) $f(a)=0$이고 $f'(a)\neq 0$인 경우

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a+2f(x)}{f(x)f'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{x-a+2f(x)}{x-a}}{\dfrac{f(x)f'(x)}{x-a}}=\frac{1+2f'(a)}{f'(a)\times f'(a)}=-1\text{이므로}$$

$\{f'(a)\}^2+2f'(a)+1=0$이고, 정리하면 $f'(a)=-1$이다.

따라서 이 경우 $f(a)=0$이고 $f'(a)=-1$이어야 한다.

3) $f(a)\neq 0$이고 $f'(a)=0$인 경우

$f(a)f'(a)=0$이고, $a-a+2f(a)\neq 0$이므로

극한 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a+2f(x)}{f(x)f'(x)}$의 극한값이 존재하지 않는다.

4) $f(a)=f'(a)=0$인 경우

이 경우 극한 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a+2f(x)}{f(x)f'(x)}$의 극한값이 존재하지 않는다.

(설명을 위해 $f(a)=f'(a)=0$인 경우
$f(x)=p(x-a)^2(x-a-3t)$라 해보자.

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a+2f(x)}{f(x)f'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a+2p(x-a)^2(x-a-3t)}{p(x-a)^2(x-a-3t)\times 3p(x-a)(x-a-2t)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1+2p(x-a)(x-a-3t)}{3p^2(x-a)(x-a-3t)(x-a-2t)}\text{이므로}$$

극한 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a+2f(x)}{f(x)f'(x)}$의 극한값이 존재하지 않는다.)

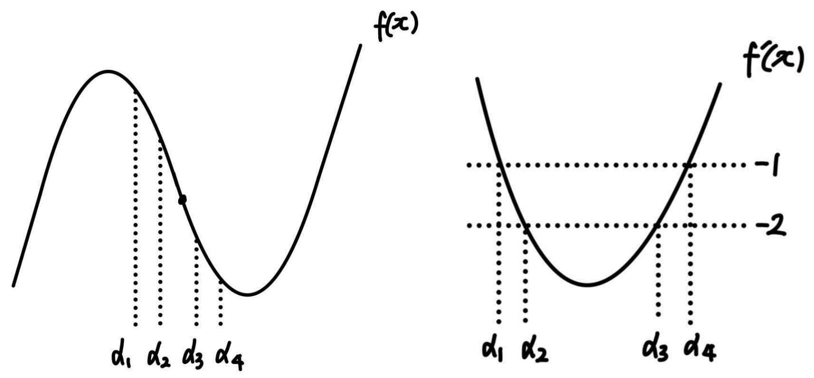
step2

step1을 정리하면, $f(a)\neq 0$이고 $f'(a)=-2$를 만족하거나,
$f(a)=0$이고 $f'(a)=-1$을 만족하는 모든 a의 개수가 4개이다.

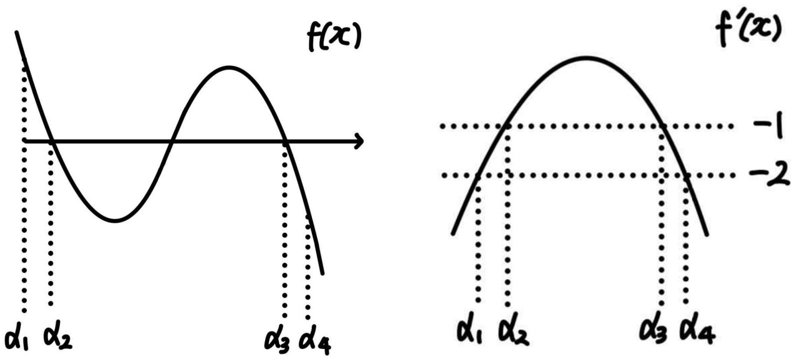
$f'(a)=-2$를 만족하는 a의 개수는 최대 2개이며, $f'(a)=-1$을 만족하는 a의 개수도 최대 2개이다.

따라서 $f'(a)=-2$인 모든 a에 대해 $f(a)\neq 0$여야 하고,
$f'(a)=-1$인 모든 a에 대해 $f(a)=0$이어야 한다.

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 양수라면, $f'(a)=-1$인 모든 a에 대해 $f(a)=0$인 것은 불가능하다.



따라서 $f(x)$의 최고차항 계수는 음수이고, $f(\alpha_2)=f(\alpha_3)=0$이다.



주어진 조건에 의해 $\sum\limits_{k=1}^{4}\alpha_k|f(\alpha_k)|=0$이므로,

$\sum\limits_{k=1}^{4}\alpha_k|f(\alpha_k)|=\alpha_1\times f(\alpha_1)+\alpha_2\times 0+\alpha_3\times 0-\alpha_4\times f(\alpha_4)=0$이어야 하고,

따라서 $\alpha_1\times f(\alpha_1)-\alpha_4\times f(\alpha_4)=0$이다.

이때 삼차함수 $f(x)$는 점 $\left(\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2},0\right)$에 대해 점대칭이고,

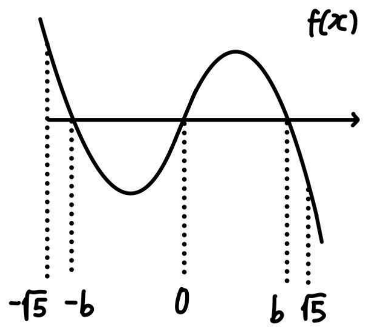
이차함수 $f'(x)$에서 $\dfrac{\alpha_1+\alpha_4}{2}=\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$이므로 두 점

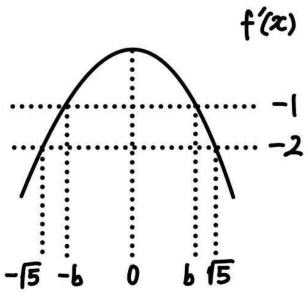
$(\alpha_1,f(\alpha_1))$과 $(\alpha_4,f(\alpha_4))$ 또한 점 $\left(\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2},0\right)$에 대해 점대칭임을 알 수 있다.

즉, $f(\alpha_1)=-f(\alpha_4)$이고 앞서 구했듯이
$\alpha_1\times f(\alpha_1)-\alpha_4\times f(\alpha_4)=0$이므로, $\alpha_1=-\alpha_4$이다.

이때 주어진 조건에 의해 $\alpha_4-\alpha_1=2\sqrt{5}$이므로, $\alpha_4=\sqrt{5}$이고
$\alpha_1=-\sqrt{5}$이다.

따라서 $f(x)$는 $(0,0)$에 대해 점대칭이다.





$-\alpha_2=\alpha_3=b$라 하자. (단, $b>0$)

$f(x)=p(x+b)x(x-b)=px^3-pb^2x$라 하면, (단, $p<0$)

$f'(x)=3px^2-pb^2$이다.

이때 $f'(\alpha_3)=f'(b)=-1$이므로 $3pb^2-pb^2=2pb^2=-1$이고, $pb^2=-\frac{1}{2}$이다.

또한 $f'(\alpha_4)=f'(\sqrt{5})=-2$이므로

$3p(\sqrt{5})^2-pb^2=15p+\frac{1}{2}=-2$이고, $p=-\frac{1}{6}$이며 $b=\sqrt{3}$이다.

따라서 $f(x)=-\frac{1}{6}(x+\sqrt{3})x(x-\sqrt{3})$이고,

$f(-6)=-\frac{1}{6}\times(-6)\times(-6+\sqrt{3})\times(-6-\sqrt{3})=33$이다.

여담:

삼차함수의 대칭점(변곡점)을 이용하면 편한 문제.

step1에서 조건 파악을 놓치지 않고 해두었다면, step2에서 상황을 찾아 식만 세우면 된다.

이때 그래프를 통해 대칭점을 적극적으로 이용하며 풀면 수월하게 풀릴 것이다.

17회 정답

8	②	*9*	③	*10*	⑤	*11*	③	*12*	③
13	①	*14*	②	*15*	③	*20*	30	*21*	33
22	14								

8.

정답: ②

해설:

점 A의 x좌표를 a라 하자. (단, $a>0$)

(점 A의 y좌표)$=\log_2(a+5)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)+3$이다.

이때 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)+3=-\log_2\left(\frac{a}{3}\right)+3$이므로

$\log_2(a+5)+\log_2\left(\frac{a}{3}\right)=3$이고, 정리하면 $(a+5)\times\frac{a}{3}=2^3$이다.

이를 만족하는 양수 a의 값은 3이므로 점 A의 좌표는
$(3,\log_2(3+5))=(3,3)$이다.

따라서 선분 OA의 길이는 $\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$이다.

여담:

로그방정식 푸는 무난한 문제.

9.

정답: ③

해설:

$\int_0^3 f(t)dt = a$라 하고, $f(x)=x^2-x\int_0^3 f(t)dt-f(2)$에 $x=2$를 대입해보자. (단, a는 상수)

$f(2)=2^2-2\times\int_0^3 f(t)dt-f(2)=4-2a-f(2)$이므로 $f(2)=2-a$이고,

$f(x)=x^2-ax+a-2$이다.

또한 $\int_0^3 f(t)dt=a$이므로

$\int_0^3 f(t)dt=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+(a-2)x\right]_0^3=9-\frac{9a}{2}+3a-6=3-\frac{3}{2}a=a$

이고, $a=\frac{6}{5}$이다.

따라서 $f(6)=6^2-6a+a-2=34-5a=28$이다.

여담:

$\int_0^3 f(t)dt$는 상수라는 점을 이용하기.

주어진 식에 $x=2$를 대입해 함숫값을 하나 구하고,

$\int_0^3 f(t)dt$를 이용해 계산을 마무리하기.

내신에서 자주 다루던 내용입니다.

10.

정답: ⑤

해설:

$a_n=a+(n-1)d$라 하자. (단, $d>0$)

$a_3+a_8+a_{10}=(a+2d)+(a+7d)+(a+9d)=3a+18d=51$이므로 $a=17-6d$이고,

$a_{11}+a_{18}=(a+10d)+(a+17d)=2a+27d=2\times(17-6d)+27d$ $=34+15d$이다.

d가 최소일 때 $a_1=a=17-6d$가 최대이므로,

$34+15d$가 13의 배수가 되도록 하는 양수 d의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 a_1의 최댓값은 $17-6\times\frac{1}{3}=15$이다.

여담:

a와 d에 대한 관계식을 구하고, a의 최댓값은 d가 최소인 순간에 나온다는 점 이용하기.

11.

정답: ③

해설:

step1

$a_1=a$라 하자.

$a_{n+1}+a_n=n$이므로 $a_{n+1}=n-a_n$이다.

따라서 $a_2=1-a,\ a_3=2-a_2=1+a,\ a_4=3-a_3=2-a,$
$a_5=4-a_4=2+a,\ a_6=5-a_5=3-a$이다.

(가) 조건에 의해 $(a_1)^2=a_5\times a_6$이므로 $a^2=(2+a)(3-a)$이고,
이를 만족하는 $a=a_1=2$ 또는 $-\frac{3}{2}$이다.

step2

$a_{n+1}+a_n=n$에 $n=2k$를 대입하면 $a_{2k+1}+a_{2k}=2k$이고, ……ㄱ

$n=2k+1$를 대입하면 $a_{2k+2}+a_{2k+1}=2k+1$이다. ……ㄴ

ㄴ에서 ㄱ을 빼면 $a_{2k+2}-a_{2k}=1$이므로 $a_{짝수}$는 공차가 1인
증가하는 등차수열이다. (단, k는 자연수)

또한 $a_{n+1}+a_n=n$에 $n=2k+2$를 대입하면
$a_{2k+3}+a_{2k+2}=2k+2$이므로, ……ㄷ

ㄷ에서 ㄴ을 빼면 $a_{2k+3}-a_{2k+1}=1$이고 $a_{홀수}$ 역시 공차가 1인
등차수열이다. (단, k는 0이상의 정수)

따라서 $a_{짝수}$와 $a_{홀수}$는 각각 공차가 1인 증가하는 등차수열이다.

1) $a_1=a=2$일 경우

$a_2=1-a=-1,\ a_3=a_1+1=3,\ a_4=a_2+1=0$이므로 $a_m<0$을
만족하는 자연수 m은 $m=2$의 1개로 (나) 조건을 만족하지
않는다.

따라서 $a_1=-\frac{3}{2}$이다.

2) $a_1=-\frac{3}{2}$일 경우

$a_2=1-a=\frac{5}{2},\ a_3=1+a=-\frac{1}{2},\ a_4=a_2+1=\frac{7}{2},$

$a_5=a_3+1=\frac{1}{2},\ a_6=a_4+1=\frac{9}{2},\ a_7=a_5+1=\frac{3}{2}$이므로 $a_m<0$을
만족하는 자연수 m은 1, 3의 2개이므로 (나) 조건을 만족시키고,
따라서 $a_7=\frac{3}{2}$이다.

여담:

$a_{n+1}+a_n=n$을 통해 $a_{짝수}$와 $a_{홀수}$는 각각 공차가 1인 증가하는
등차수열이라는 점을 파악할 수 있다. 이 문제에서는 공차가
1이라는 것보다, 증가한다는 점에 조금 더 주목하기.

12.

정답: ③

해설:

step1

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로,

$(x+2)|f(x)|$와 $25|x-k|$의 미분불가능 점은 겹쳐야 한다.

$|x-k|$는 $x=k$에서 미분불가능하므로, $(x+2)|f(x)|$도 $x=k$에서 미분불가능해야한다.

따라서 $f(x)=(x-k)(x-\alpha)$라 할 수 있다. (단, $k \neq \alpha$)

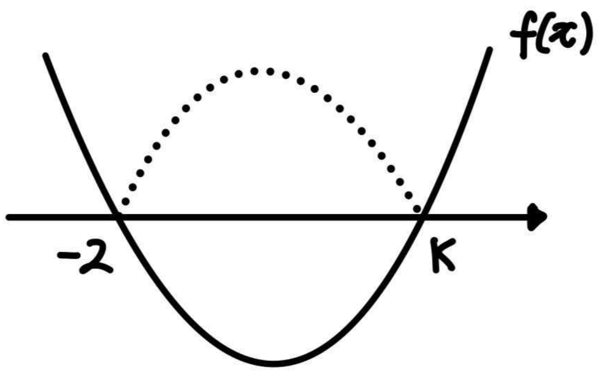
이때, $x=\alpha$에서 $(x+2)|f(x)|$가 미분가능해야하므로,

$\lim_{x \to \alpha-} \frac{(x+2)|(x-k)(x-\alpha)|}{x-\alpha} = \lim_{x \to \alpha+} \frac{(x+2)|(x-k)(x-\alpha)|}{x-\alpha}$이어야 하고,

위 등식이 성립하려면 $x \to \alpha$일 때 $x+2 \to 0$이어야 하므로 $\alpha+2=0$이다.

그러므로 $\alpha=-2$이고, $f(x)=(x-k)(x+2)$이다.

step2



$\lim_{x \to k+} \frac{(x+2)|f(x)|-25(x-k)}{x-k} = \lim_{x \to k-} \frac{(x+2)|f(x)|+25(x-k)}{x-k}$이므로

$\lim_{x \to k+} \frac{(x+2)^2(x-k)-25(x-k)}{x-k} = \lim_{x \to k-} \frac{-(x+2)^2(x-k)+25(x-k)}{x-k}$

이고, $(k+2)^2-25=-(k+2)^2+25$여야 한다.

따라서 이를 만족시키는 양수 k의 값은 3이므로

$f(x)=(x+2)(x-3)$이고,

$f(2k)=f(6)=(6+2)\times(6-3)=24$이다.

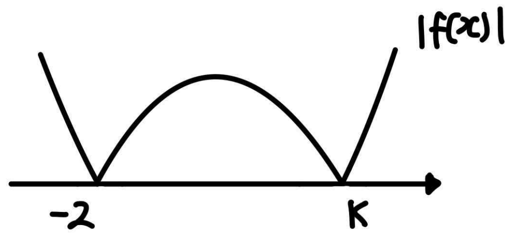
여담:

1.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면,

$(x+2)|f(x)|$와 $25|x-k|$의 미분불가능 점이 겹쳐야 한다는 점에 주목하기.

step2에서 극한을 처리할 때 아래와 같이 처리해도 된다.



$\lim_{x \to k+} \frac{|f(x)|}{x-k}=f'(k)$, $\lim_{x \to k-} \frac{|f(x)|}{x-k}=-f'(k)$

2.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 있다.

1) 연속함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\times g(x)$는 연속이다.

2) 연속함수 $f(x)$와 불연속함수 $g(x)$에 대하여, $f(x)+g(x)$와 $f(x)-g(x)$는 무조건 불연속이고, $f(x)\times g(x)$는 알 수 없다.

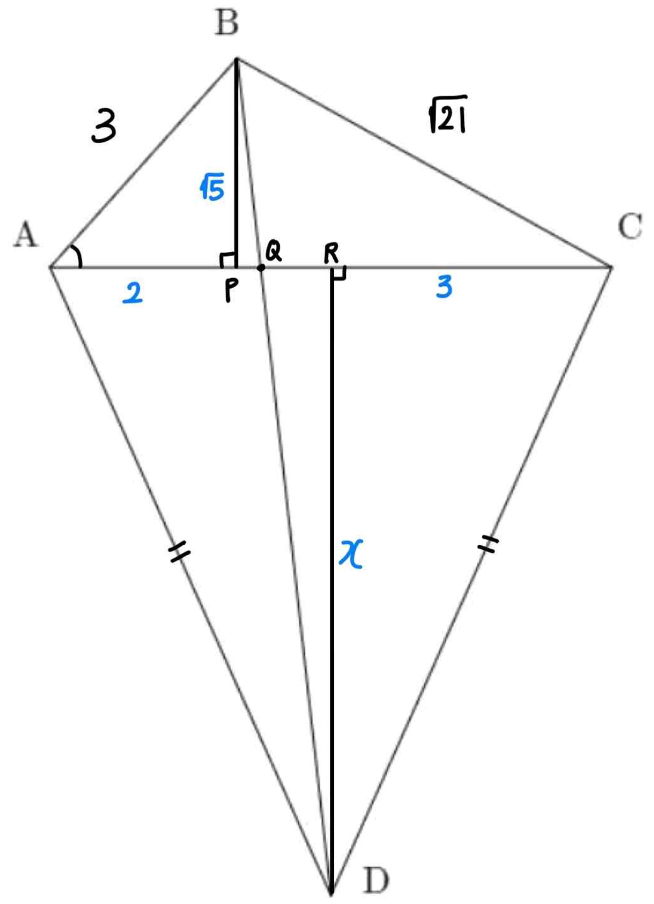
3) 불연속함수 $f(x)$와 불연속함수 $g(x)$에 대하여, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\times g(x)$ 모두 연속 여부를 알 수 없다.

13.

정답: ①

해설:

step1



점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 점 P, 선분 BD와 선분 AC의 교점을 점 Q, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 점 R라 하자.

삼각형 ABP는 $\angle APB=90^\circ$인 직각삼각형이고,
$\cos(\angle BAC)=\dfrac{2}{3}$이므로

$\overline{AP}=\overline{AB}\times\cos(\angle BAC)=3\times\dfrac{2}{3}=2$이고,

$\overline{BP}=\sqrt{(\overline{AB})^2-(\overline{AP})^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$이다.

또한 삼각형 BCP도 $\angle BPC=90^\circ$인 직각삼각형이므로,
$\overline{CP}=\sqrt{(\overline{BC})^2-(\overline{BP})^2}=\sqrt{(\sqrt{21})^2-(\sqrt{5})^2}=4$이다.

이때 삼각형 ADC는 이등변삼각형이므로 점 R은 선분 AC의 중점이고, 따라서 $\overline{AR}=\overline{CR}=3$이다.

그러므로 $\overline{AP}=2$, $\overline{PR}=1$, $\overline{CR}=3$이다.

step2

삼각형 BPQ와 삼각형 DRQ는, $\angle BPQ=\angle DRQ=90^\circ$이고 $\angle BQP=\angle DQR$이므로 닮음이다.

따라서 $\overline{BP}:\overline{DR}=\overline{PQ}:\overline{RQ}=\overline{BQ}:\overline{DQ}$이므로

$\overline{PQ}:\overline{RQ}=\overline{BQ}:\overline{DQ}=\sqrt{5}:x$이고,

$\overline{PR}=1$이고 $\overline{BD}=9$이므로

$$\overline{QR}=(\overline{PR})\times\frac{\overline{QR}}{(\overline{PQ})+(\overline{QR})}=(\overline{PR})\times\frac{\overline{DR}}{(\overline{BP})+(\overline{DR})}=1\times\frac{x}{\sqrt{5}+x},$$
$$\overline{DQ}=(\overline{BD})\times\frac{\overline{DQ}}{(\overline{BQ})+(\overline{DQ})}=(\overline{BD})\times\frac{\overline{DR}}{(\overline{BP})+(\overline{DR})}=9\times\frac{x}{\sqrt{5}+x}$$

이다.

이때 직각삼각형 DRQ에서 $(\overline{DQ})^2=(\overline{QR})^2+(\overline{DR})^2$이므로

$\left(9\times\dfrac{x}{\sqrt{5}+x}\right)^2=\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}+x}\right)^2+x^2$이고,

정리하면 $(x+\sqrt{5})^2=80$이므로

양수 x의 값은 $x=3\sqrt{5}$이다.

따라서 삼각형 ADR에서 $(\overline{AD})^2=(\overline{AR})^2+(\overline{DR})^2$이므로
$\overline{AD}=\sqrt{(\overline{AR})^2+(\overline{DR})^2}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{5})^2}=3\sqrt{6}$이다.

step3

삼각형 ABD에서

$$\cos(\angle ABD)=\frac{(\overline{AB})^2+(\overline{BD})^2-(\overline{AD})^2}{2\times(\overline{AB})\times(\overline{BD})}=\frac{3^2+9^2-(3\sqrt{6})^2}{2\times3\times9}=\frac{2}{3}$$

이고, $\sin(\angle ABD)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이다.

따라서 삼각형 ABD의 외접원의 반지름 길이를 r이라 하면,

$$r=\frac{\overline{AD}}{2\sin(\angle ABD)}=\frac{3\sqrt{6}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{9\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$$이므로

삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\pi r^2=\pi\times\left(\dfrac{9\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{243}{10}\pi$이다.

여담:

점 B와 D에서 선분 AC에 수선의 발을 내리는 발상이 매우 중요한 문제였다.

주어진 $\cos(\angle BAC)$의 값을 통해 점 B에서 선분 AC에 수선의 발을 내려보는 발상을 떠올렸다면 잘 한 것이다!

수선의 발을 내린 후 닮음을 이용하는 것도 잘 봐 두기!

14.

정답: ②

해설:

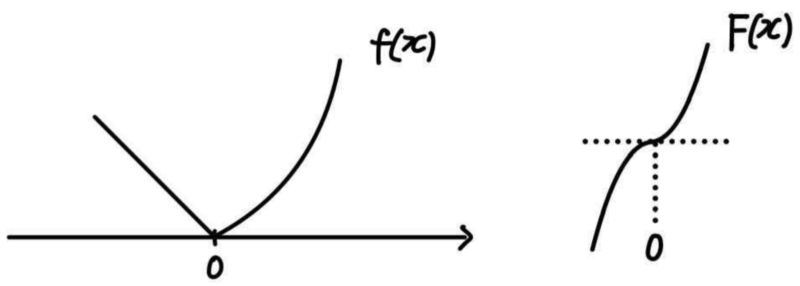
step1

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

따라서 $|-a|+b=0$이고, $b \leq 0$이다.

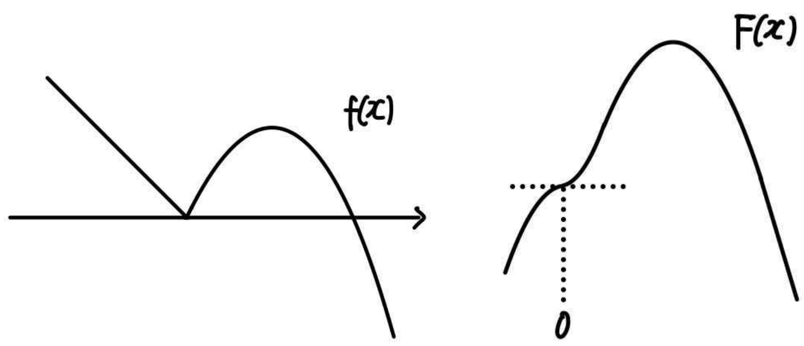
$F(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt$라 하자.

1) $a \geq 0,\ c \geq 0$인 경우



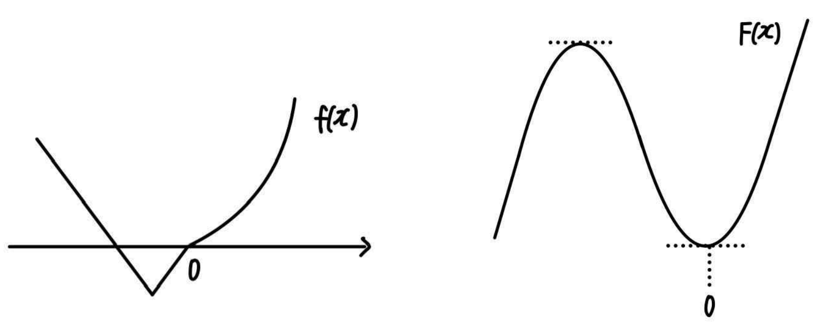
이 경우 $F(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 접하는 것은 불가능하다.

2) $a \geq 0,\ c < 0$



이 경우 $F(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 접하는 것은 불가능하다.

3) $a < 0,\ c \geq 0$인 경우

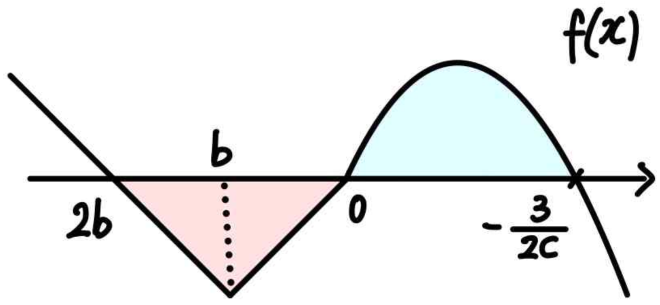


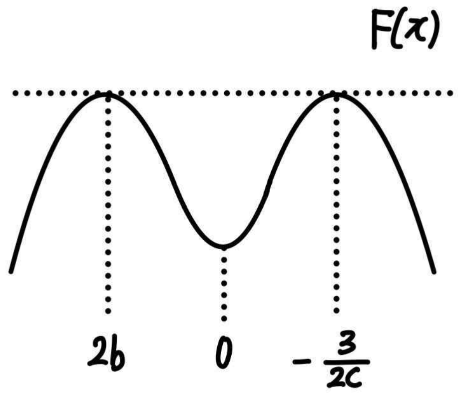
이 경우 $F(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 접하는 것은 불가능하다.

따라서 $a < 0,\ c < 0$이어야 한다.

step2

$a < 0$이고 $|-a|+b=0$이므로 $a=b<0$이다.





먼저, $F(x)$가 x축과 두 점에서 접해야 하므로 $F(2b)=F\left(-\frac{3}{2c}\right)=0$이다.

이때 $F(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt$이므로 $F(2)=0$이고, 따라서 $c=-\frac{3}{4}$이다.

또한

$$\int_{2b}^{0} f(t)dt=-\frac{1}{2}\times 2b\times\{|a-b|+b\}=-\frac{1}{2}\times 2b\times b\text{이고,}$$

$$\int_{0}^{-\frac{3}{2c}} f(t)dt=\frac{1}{6}\times|c|\times\left(-\frac{3}{2c}-0\right)^{3}\text{이며,}$$

$$\int_{2b}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{-\frac{3}{2c}} f(t)dt=0\text{이므로 } -b^{2}=-1\text{이다.}$$

따라서 음수 b의 값은 $b=-1$이며, $a=b=-1$이다.

그러므로 $a+b+c=-1+(-1)+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{11}{4}$이다.

여담:

step2에서 두 적분값이 같음을 이용할 때, 넓이로 생각하면 편하다. (삼각형의 넓이=이차함수로 둘러싸인 부분의 넓이)

15.

정답: ③

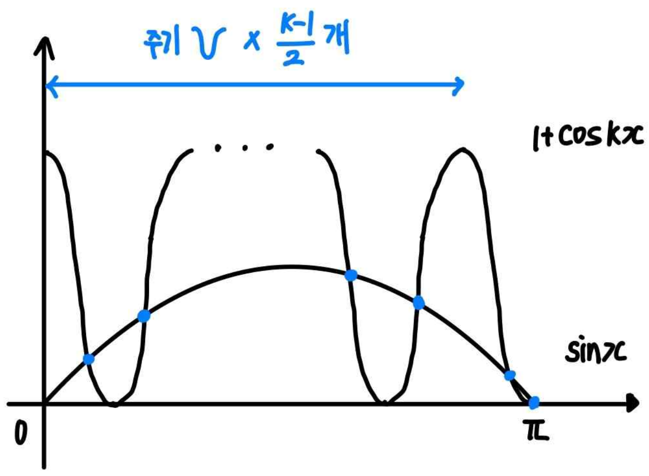
해설:

$-1 \le \cos kx \le 1$이므로 $0 \le 1+\cos kx \le 2$이고,
$-1 \le \sin x \le 1$이므로 곡선 $y=1+\cos kx$와 $y=\sin x$의 교점의 y좌표는 0이상 1이하이다.

$1+\cos kx$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{k}$이고, $\sin x$의 주기는 2π이므로 두 그래프의 교점의 y좌표는 2π마다 반복되고, 그러므로 $0 \le x \le 2\pi$에서 생기는 교점의 y좌표를 관찰해주면 된다.

또한 $\pi < x \le 2\pi$에서는 교점이 생기지 않으므로 $0 \le x \le \pi$에서 생기는 교점의 y좌표를 확인해주면 된다.

1) k가 홀수인 경우



$1+\cos kx$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{k}$이므로 $0 \le x \le \pi$에 주기 $\dfrac{k-1}{2}$개와, 반 주기만큼이 더 들어간다.

또한 k가 홀수일 때 $1+\cos(k\times\pi)=\sin k\pi=0$이므로 $x=\pi$에서 교점이 생긴다.

$0 \le x \le \pi$에 $1+\cos kx$의 주기가 1개 들어갈 때마다 교점이 두 개씩 생기고, 마지막 주기가 반 개 들어갈 때 교점이 두 개 추가로 생기므로, k가 홀수일 때 $0 \le x \le 2\pi$에서 $y=1+\cos kx$와 $y=\sin x$의 교점의 개수는 $\dfrac{k-1}{2}\times 2+2=k+1$개이다.

$0 \le x \le 2\pi$에서 교점의 x좌표를 α_1, $\cdots$, α_{k+1}이라 할 때,

$\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, $\cdots$, $\sin\alpha_{k+1}$의 값은 모두 다르다.

(단, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{k+1}$)

또한, $p < q \le k+1$인 두 자연수 p와 q에 대하여,
$\sin\alpha_p \ne \sin\alpha_q$이며 $\cos 2\alpha_p = \cos 2\alpha_q$가 가능한지 살펴보자.

먼저 α_p와 α_q는 $0 < \alpha_p < \alpha_q \le \pi$이므로 $0 < 2\alpha_p < 2\alpha_q \le 2\pi$이다.

이때 $\cos 2\alpha_p = \cos 2\alpha_q$이려면 $2\alpha_p$와 $2\alpha_q$는 주기의 자연수배만큼 차이나야 하므로 2π만큼 차이나거나, $x=\pi$에 대해 대칭이어야 하므로 $2\alpha_p + 2\alpha_q = 2\pi$여야 한다.

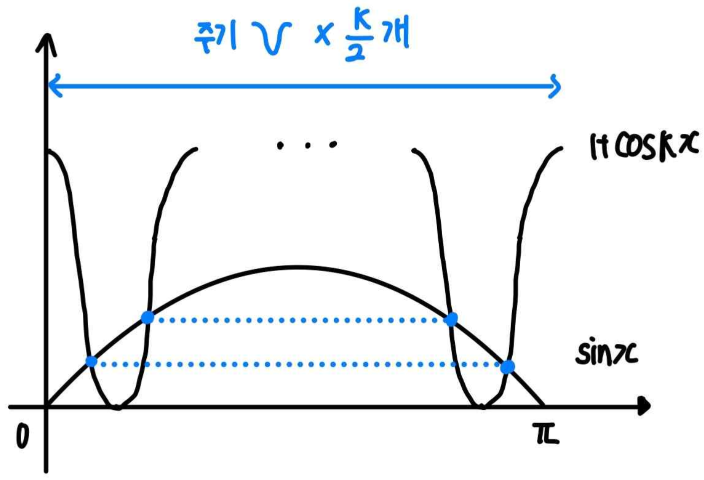
(이때 $\dfrac{2\pi}{k}$가 아니라 2π인 것 주의! $\cos 2\alpha_p = \cos 2\alpha_q$ 방정식을 푸는 것이기 때문에 2π만큼 차이나야 한다.)

$0 < \alpha_p < \alpha_q \le \pi$이므로 $2\alpha_p$와 $2\alpha_q$가 2π만큼 차이나는 것은 불가능하며,

$\alpha_p + \alpha_q = \pi$일 경우 $\sin\alpha_p = \sin\alpha_q$이기 때문에 조건을 만족하지 않는다.

따라서 k가 홀수인 경우 주어진 집합의 원소의 개수는 $k+1$개이다.

2) k가 짝수인 경우



$1+\cos kx$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{k}$이므로 $0 \le x \le \pi$에 주기 $\dfrac{k}{2}$개가 들어간다.

$0 \le x \le \pi$에 $\cos kx$의 주기가 1개 들어갈 때마다 교점이 두 개씩 생기므로, 짝수일 때 $0 \le x \le 2\pi$에서 $y=1+\cos kx$와 $y=\sin x$의 교점의 개수는 $\dfrac{k}{2}\times 2=k$개이다.

$0 \le x \le 2\pi$에서 교점의 x좌표를 α_1, $\cdots$, α_k라 할 때,

$1 \le p \le k$인 자연수 p에 대하여 α_p와 α_{1+k-p}는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대해 대칭이므로, $\sin\alpha_p = \sin\alpha_{1+k-p}$이다.

(교점 k개를 전부 관찰할 필요 없이, 절반만 관찰하면 된다.)

또한, $p < q \le \dfrac{k}{2}$인 두 자연수 p와 q에 대하여,

$\sin\alpha_p \ne \sin\alpha_q$이며 $\cos 2\alpha_p = \cos 2\alpha_q$가 가능한지 살펴보자.

먼저 α_p와 α_q는 $0 < \alpha_p < \alpha_q < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $0 < 2\alpha_p < 2\alpha_q < \pi$이다.

이때 $\cos 2\alpha_p = \cos 2\alpha_q$이려면 $2\alpha_p$와 $2\alpha_q$는 주기의 자연수배만큼 차이나야 하므로 2π만큼 차이나거나, $x=\pi$에 대해 대칭이어야 하므로 $2\alpha_p + 2\alpha_q = 2\pi$여야 한다.

(이때 $\frac{2\pi}{k}$가 아니라 2π인 것 주의! $\cos 2\alpha_p = \cos 2\alpha_q$ 방정식을 푸는 것이기 때문에 2π만큼 차이나야 한다.)

$0 < 2\alpha_p < 2\alpha_q < \pi$이므로 $2\alpha_p$와 $2\alpha_q$가 2π만큼 차이나는 것은 불가능하며,

$\alpha_p + \alpha_q = \pi$일 경우 $\sin\alpha_p = \sin\alpha_q$이기 때문에 조건을 만족하지 않는다.

따라서 k가 짝수인 경우 주어진 집합의 원소의 개수는 $\frac{k}{2}$개이다.

그러므로 k가 홀수인 경우 주어진 집합의 원소의 개수가 6개이려면 $k=5$여야 하고,

k가 짝수인 경우 주어진 집합의 원소의 개수가 6개이려면 $k=12$여야 한다.

따라서 가능한 모든 자연수 k의 값의 합은 $5+12=17$이다.

여담:

미적분 선택자라면 $\cos 2x$를 덧셈공식을 이용해 바꾸고 싶다고 생각할 수도 있는데, 허튼 짓은 하지 말자.

두 그래프의 교점의 개수와 집합의 원소의 개수가 차이나는 경우 잘 신경쓰기!

기출 다시보기: 2021학년도 9월 모의평가 가형 21번

21. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sin kx + 2,\quad g(x) = 3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면 $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$ 이다.

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

정답: 2번

20.

정답: 30

해설:

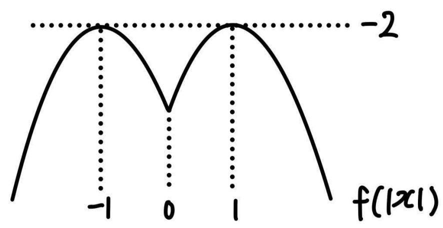
$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}=0$을 통해 $f(1)=-2$, $f'(1)=0$임을 알 수 있다.

$F(x)=\int_a^x f(|t|)dt$라 하면,

$\int_x^{x+3} f(|t|)dt = F(x+3)-F(x)$이므로 $\int_x^{x+3} f(|t|)dt$의 도함수는 $f(|x+3|)-f(|x|)$이다.

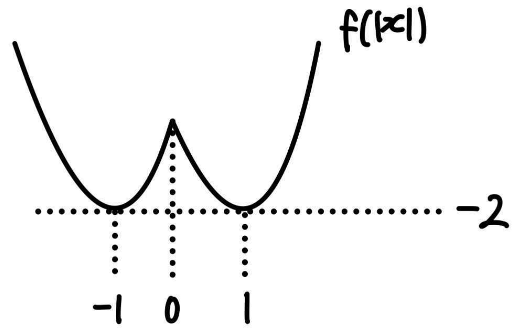
따라서 $f(|x+3|)=f(|x|)$인 순간을 중점적으로 살펴봐야 하고, $x=-\frac{3}{2}$일 때 $f(|x+3|)=f(|x|)$이다.

1) $f(x)$의 최고차항 계수가 음수인 경우



이 경우 모든 실수 x에 대해 $f(|x|)<0$이므로 모든 실수 x에 대해 $\int_x^{x+3} f(|t|)dt<0$이다.

2) $f(x)$의 최고차항 계수가 양수인 경우



이 경우 $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(|t|)dt \ge 0$이어야 하므로 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(|t|)dt \ge 0$이다.

$f(1)=-2$, $f'(1)=0$이므로 $f(x)=p(x-1)^2-2$라 하면,

(단, $p>0$)

$$\int_0^{\frac{3}{2}} f(|t|)dt = \int_0^{\frac{3}{2}} f(t)dt = \int_0^{\frac{3}{2}} \{p(x-1)^2-2\}dx = \frac{3}{8}p-3 \ge 0$$

이므로 $p \ge 8$이다.

이때 $f(3)=4p-2 \ge 30$이므로 $f(3)$의 최솟값은 30이다.

여담:

$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(|t|)dt \geq 0$을 살펴봐야 하는 이유 살펴보고 넘어가기.

기출 다시보기: 2023학년도 6월 모의평가 20번

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

정답: 13

21.

정답: 33

해설:

step1 주어진 방정식 변형하기

$4x^{2n}+2(n+a)x^n+3a(n-2a)=(2x^n+3a)(2x^n-2a+n)=0$이다.

step2 $f(n)=1$인 상황 구하기

1) n이 홀수인 경우

$2x^n+3a=0$과 $2x^n-2a+n=0$의 실근은 각각 1개씩 존재하므로,

$2x^n+3a=0$과 $2x^n-2a+n=0$의 실근이 겹치는 경우 $f(n)=1$이다.

즉, $-3a=2a-n$이어야 하므로 $n=5a$여야 한다.

2) n이 짝수인 경우

양수 a에 대하여 방정식 $2x^n+3a=0$의 실근은 존재하지 않으므로, 방정식 $2x^n-2a+n=0$의 실근이 1개인 경우 $f(n)=1$이다.

즉, $2a-n=0$이어야 하므로 $n=2a$여야 한다.

step3

1)과 2)를 종합하면, 양수 a와 자연수 m에 대해 $m=2a$, $m+9=5a$여야 하므로 $a=3$이고, 주어진 방정식은 $4x^{2n}+2(n+3)x^n+9(n-6)=(2x^n+9)(2x^n-6+n)=0$이다.

$n=3,\ 5,\ 7,\ 9$일 때, $2x^n+9=0$과 $2x^n-6+n=0$의 실근은 각각 1개씩 존재하고, 이 두 실근의 값은 다르므로 $f(n)=2$이다.

$n=4$일 때 $2x^n+9=0$의 실근은 존재하지 않고, $2x^n-6+n=0$의 실근은 2개이므로 $f(n)=2$이다.

$n=6$일 때, $2x^n+9=0$의 실근은 존재하지 않고, $2x^n-6+n=0$의 실근은 1개이므로 $f(n)=1$이다.

$n=8,\ 10$일 때, $2x^n+9=0$과 $2x^n-6+n=0$의 실근은 모두 존재하지 않으므로 $f(n)=0$이다.

따라서 $a\times\sum_{k=3}^{10}f(k)=3\times(2\times4+2+1)=33$이다.

여담:

주어진 방정식을 인수분해해 x^n에 관한 식으로 생각하면, $x^n=p$의 서로 다른 실근의 개수는 (단, p는 실수)

n이 홀수일 경우 1개,

n이 짝수일 경우 $p>0$이면 2개, $p=0$이면 1개, $p<0$이면 0개이다.

22.

정답: 14

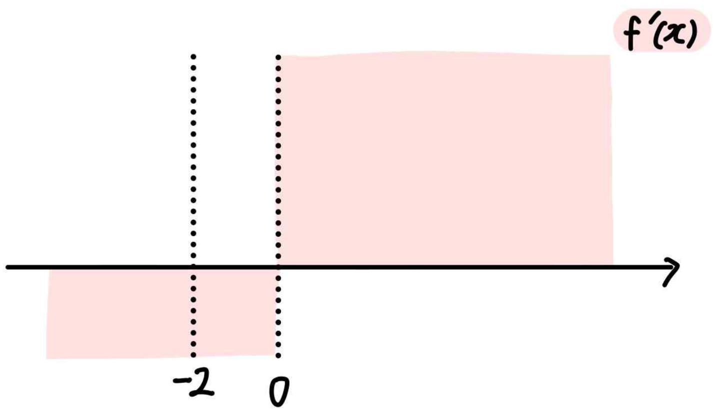
해설:

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로, $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

열린구간 $(-2, \infty)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 삼차함수 $g(x)$의 그래프의 일부라 하자.

(가) 조건을 통해 $f'(0)=0$이고,

$x>0$일 때 $f'(x) \geq 0$, $x<0$일 때 $f'(x) \leq 0$임을 알 수 있다.



(그림: $f'(x)$가 존재할 수 있는 영역)

이때 $x \to \infty$일 때 $f'(x)=g'(x) \geq 0$이므로 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 양수임을 알 수 있다.

(나) 조건에서, $\{x | f'(x)>3\}$인 구간은 $x>0$에 포함되므로, $x<0$일 때 $f(x) \leq f(-2)$라는 것을 알 수 있다.

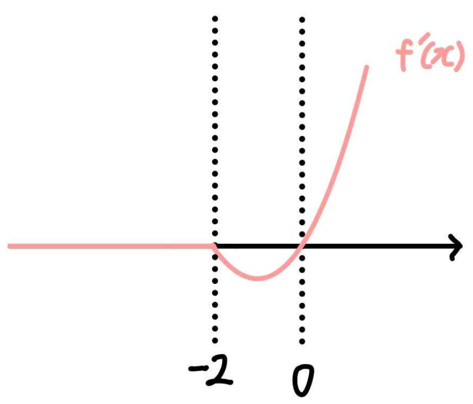
앞서 (가) 조건에서 구했듯이 $x<-2$일 때 $f'(x) \leq 0$인데,

만약 $x<-2$일 때 $f'(x)<0$인 구간이 포함되어 있으면,

$f(x)>f(-2)$인 구간이 존재하므로

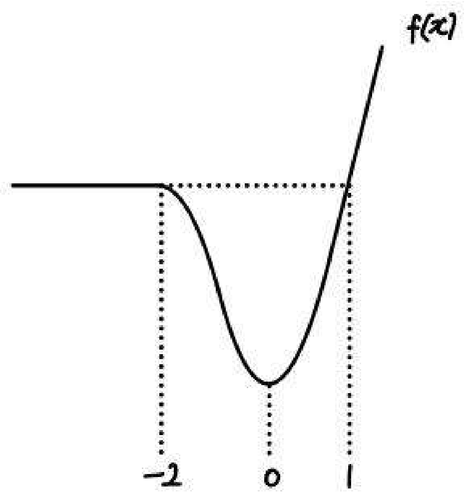
$x<-2$일 때, $f'(x)=0$이어야 하고,

연속함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(-2)=0$이다.



따라서 $g'(-2)=0$, $g'(0)=0$이므로 $g'(x)=3px(x+2)$라 할 수

있다. (단, $p>0$)



이때 $\{x|f(x)>f(-2)\}$을 만족하는 구간은 $x>1$이고,
$\{x|f'(x)>3\}$을 만족하는 구간 또한 $x>1$이어야 하므로,

$-2\le x\le 1$일 때 $3px(x+2)\le 3$, $x>1$일 때 $3px(x+2)>3$이다.

따라서 $3p\times 1\times(1+2)=3$이어야 하므로 $p=\frac{1}{3}$이다.

그러므로 $g'(x)=x^2+2x$이고, $f(0)=g(0)=3$이므로
$g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3$이다.

이때 $f(-4)=f(-2)=g(-2)=7-\frac{8}{3}$이고,

$f(2)=g(2)=7+\frac{8}{3}$이므로 $f(-4)+f(2)=14$이다.

여담:

아마 (나) 조건이 이 문제에 키포인트였지 않을까 싶다.

(나) 조건에 의해 $x<-2$일 때 $f'(x)=0$이라는 점이 정해지고,
이를 통해 $g(x)$의 식도 정해진다.

$x<-2$인 부분에서 함수가 정해지지 않았으므로, 특수한 함수로서(상수함수) 정해질 것이라는 기대를 갖고 들어가는 것도 좋다. 관련 기출도 꼭 풀어보자.

기출 다시보기: 2016학년도 수능 B형 30번

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

(가) $x\le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정답: 35

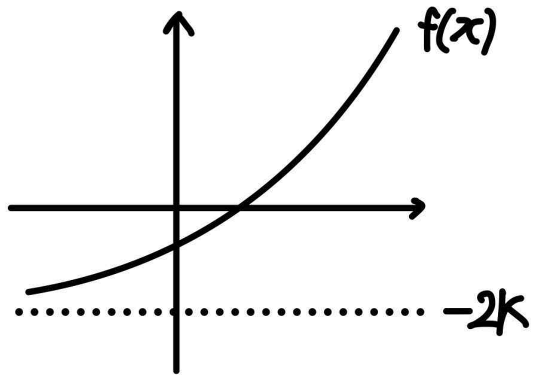
18회 정답

8	③	9	②	10	④	11	①	12	①
13	②	14	③	15	⑤	20	57	21	110
22	13								

8.

정답: ③

해설:

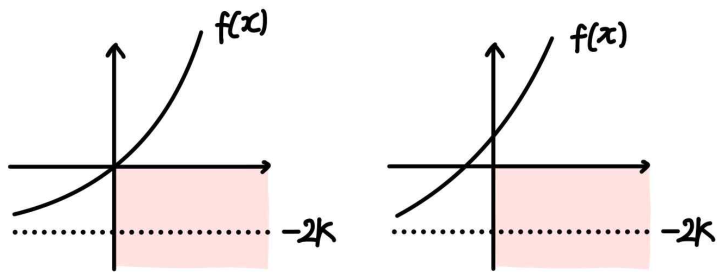


$f(x)$의 그래프가 제 4사분면을 지나려면, $f(0)<0$이어야 한다.

$f(0)=9^{0+\frac{3}{2}}-2k=27-2k<0$이어야 하므로 $k>\frac{27}{2}$이고,

따라서 함수 $f(x)$의 그래프가 제 4사분면을 지나도록 하는 자연수 k의 최솟값은 14이다.

(만약 $f(0)\geq 0$인 경우, 그래프는 아래와 같으므로



$f(x)$의 그래프가 제 4사분면을 지나지 않는다.)

여담:

$x=0$일 때를 기준으로 식 세우는 무난무난한 문제.

9.

정답: ②

해설:

step1

$\sum_{k=1}^{n} ka_k^2 = n^2+3n$에 $n=1$을 대입하면 $(a_1)^2=4$이고, $a_1>0$이므로 $a_1=2$이다.

$\sum_{k=1}^{n} ka_k^2 = n^2+3n$이므로 $n \geq 2$일 때

$\sum_{k=1}^{n-1} ka_k^2 = (n-1)^2+3(n-1)$이다.

따라서 $n \geq 2$일 때 $\sum_{k=1}^{n} ka_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k^2 = na_n^2$ 이고,

$(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}=2n+2$이므로,

$na_n^2=2n+2$이고, 정리하면 $n \geq 2$에서 $a_n=\sqrt{\frac{2n+2}{n}}$ 이다.

이때 $a_1=2$일 때도 $a_n=\sqrt{\frac{2n+2}{n}}$ 을 만족하므로,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\sqrt{\frac{2n+2}{n}}$ 이다.

step2

$\log_2 a_k = \log_2\sqrt{\frac{2k+2}{k}} = \frac{1}{2}\{1+\log_2(k+1)-\log_2 k\}$이므로

$\sum_{k=1}^{63}\log_2 a_k = \frac{1}{2}\times\{1+\log_2 2-\log_2 1\}+\frac{1}{2}\times\{1+\log_2 3-\log_2 2\}+\cdots$

$+\frac{1}{2}\{1+\log_2 63-\log_2 62\}+\frac{1}{2}\{1+\log_2 64-\log_2 63\}$

$=\frac{1}{2}\times 63+\frac{1}{2}\{\log_2 64-\log_2 1\}=\frac{69}{2}$이다.

여담:

이 문제에서는 운이 좋게 $n=1$일 때도 $a_n=\sqrt{\frac{2n+2}{n}}$ 을 만족시켜서 $n=1$인 상황을 구분해 줄 필요가 없었는데, 만약 $n=1$일 때 $a_n=\sqrt{\frac{2n+2}{n}}$ 을 만족하지 않았다면 답을 구할 때 구분해서 계산해줘야 한다.

기출 다시보기: 2024학년도 6월 모의평가 9번

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

정답: 1번

10.

정답: ④

해설:

점 P_1의 위치를 $x_1(t)$, 점 Q의 위치를 $x_2(t)$라 하자.

$v_1(t)=4t-6$이고 $x_1(0)=-8$이므로 $x_1(t)=2t^2-6t-8$이고, 점 P가 원점을 지나는 순간 점 P의 위치는 0이므로 $x_1(t)=2(t+1)(t-4)=0$을 만족시키는 양수 t의 값은 4이다.

즉, $t=4$일 때, 점 P와 점 Q는 원점에서 만나고, (=위치가 0이고) 이 순간 점 Q의 속도는 8이다.

이때 $v_2(t)=at^2-bt$이고, $x_2(0)=16$이므로 $x_2(t)=\frac{a}{3}t^3-\frac{b}{2}t^2+16$이다.

$v_2(4)=8$이므로 $16a-4b=8$이고,

$x_2(4)=0$이므로 $\frac{64}{3}a-8b+16=0$이다.

따라서 $b=4a-2=\frac{8}{3}a+2$이므로 $b=10$이고,

$a=\frac{1}{4}(b+2)=3$이므로 $a+b=13$이다.

여담:

점 P와 Q의 시작 위치가 0, 즉 원점이 아니라는 점에 주목하기.

11.

정답: ①

해설:

step1

한 직선이 오직 두 개의 사분면만을 지나려면,

1) 원점을 지나지 않는 상수함수이거나

2) 원점을 지나야 한다.

(삼차함수 $f(x)$의 접선이 $x=c$의 형태로 나올 수 없으므로, 이 경우는 배제하겠다.)

step2

$f(x)=x^3+kx^2+4$이므로 $f'(x)=3x^2+2kx$이다.

1) $f(x)$의 $(1, f(1))$에서의 접선이 상수함수인 경우

$f'(1)=0$이어야 하므로 $f'(1)=3+2k=0$이고, 정리하면 $k=-\frac{3}{2}$이다.

이 경우 접선의 방정식이 $y=f(1)=\frac{7}{2}$이므로 원점을 지나지 않는 상수함수이다.

2) $f(x)$의 $(1, f(1))$에서의 접선이 원점을 지나는 경우

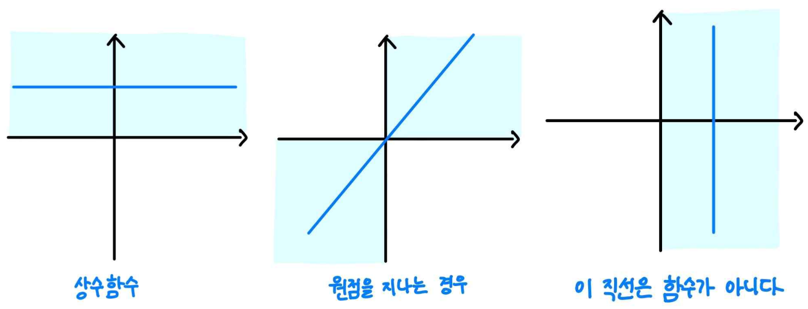
$f'(1)=3+2k$, $f(1)=k+5$이므로 $f(x)$의 $(1, f(1))$에서의 접선은 $y=(3+2k)(x-1)+k+5$이다.

이때 이 접선이 $(0, 0)$을 지나므로, $0=-(3+2k)+k+5$이고, 정리하면 $k=2$이다.

따라서 가능한 모든 k의 값은 $-\frac{3}{2}$, 2이므로, 모든 실수 k의 값의 합은 $-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$이다.

여담:

step1에서 파악한 내용만 잘 알고 있으면 무난하게 풀리는 문제였을 것이다.



접선 또한 함수이기 때문에 위 그림의 가장 오른쪽 상황은 불가능하다.

12.

정답: ①

해설:

step1

$ab \neq 0$이므로 주어진 등식에 역수를 취해주면,

$\dfrac{ac-bc}{ab}=-\log_3 2$이고, 정리하면 $\dfrac{c}{b}-\dfrac{c}{a}=-\log_3 2$이다.

또한 $3^a=2^b=k^c$이므로 $k^{\frac{c}{b}}=2$이고, $k^{\frac{c}{a}}=3$이다.

이때 $\dfrac{c}{b}-\dfrac{c}{a}=-\log_3 2$이므로 $k^{\frac{c}{b}-\frac{c}{a}}=k^{-\log_3 2}$이고, 정리하면

$k^{\frac{c}{b}-\frac{c}{a}}=\dfrac{k^{\frac{c}{b}}}{k^{\frac{c}{a}}}=\dfrac{2}{3}=k^{-\log_3 2}$이다.

step2

$k^{-\log_3 2}=\dfrac{2}{3}$이므로 $k^{\log_3 \frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$이고, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3 k}=\dfrac{2}{3}$이다.

따라서 $\log_3 k=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{3}=\log_2\dfrac{3}{2}$이다.

여담:

내신에서 자주 볼 수 있는 형태의 문제이다.

$\dfrac{ab}{ac-bc}=\log_2\dfrac{1}{3}$을 보고 역수 취할 생각을 못 했다면 꽤 까다롭게 느껴졌을 것.

빼기 형태를 지수에 올리면 나눗셈이 된다는 점을 잘 이용하기.

기출 다시보기: 2020학년도 9월 모의평가 나형 28번

28. 네 양수 a, b, c, k 가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

(가) $3^a=5^b=k^c$
(나) $\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

답: 75

13.

정답: ②

해설:

step1

$2a_{n+4}=a_{2n}+1$이므로

$n=2k$를 대입하면 $2a_{2k+4}=a_{4k}+1$이고, $a_{4k}=2a_{2k+4}-1$이다.

또한 $n=k+2$를 대입하면 $2a_{k+6}=a_{2k+4}+1$이고, $a_{2k+4}=2a_{k+6}-1$이다.

step2

$a_{4k}=2a_{2k+4}-1=2(2a_{k+6}-1)-1=4a_{k+6}-3$이다.

따라서

$$4\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=1}^{10}a_{4k}=4\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=1}^{10}(4a_{k+6}-3)=4\left(\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=1}^{10}a_{k+6}\right)-30$$

$=4\sum_{k=1}^{16}a_k-30=14$이다.

그러므로 $\sum_{k=1}^{16}a_k=11$이다.

여담:

주어진 등식 $4\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=1}^{10}a_{4k}=14$에 있는 a_{4k}를 보고, $2a_{n+4}=a_{2n}+1$를 이용해 a_{4k}를 a_{k+c} (단, c는 상수) 형태로 바꿔보자.

(사실 할 수 있는 식변형을 하다보면 답이 어느샌가 나오는 문제이다. ㅋㅋㅋ)

14.

정답: ③

해설:

step1

주어진 등식 $\int_2^x |f(t)|dt=x^3-3x^2+xf(a)+b$에 $x=2$를 대입하면,

$0=2^3-3\times2^2+2f(a)+b$이므로 $2f(a)+b=4$이다. ……ㄱ

step2

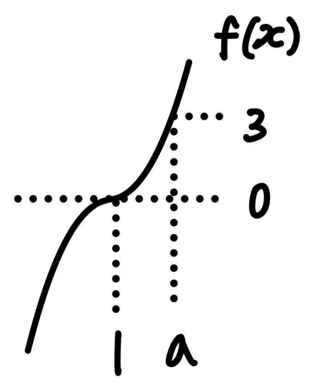
주어진 등식 $\int_2^x |f(t)|dt=x^3-3x^2+xf(a)+b$을 x에 대해 미분하면 $|f(x)|=3x^2-6x+f(a)$이다.

이때 $g(x)=|f(x)|=3x^2-6x+f(a)$라 하면,

$g(x)$는 $x\le1$에서 감소하고, $x\ge1$에서 증가하므로,

증가함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases}-3x^2+6x-f(a) & (x<1)\\ 3x^2-6x+f(a) & (x\ge1)\end{cases}$이다.

또한 $f(x)$는 연속함수이므로 $x=1$에서도 연속이고, 따라서 $-3\times1^2+6\times1-f(a)=3\times1^2-6\times1+f(a)$이므로 $f(a)=3$이다.



이때 $f(a)=3a^2-6a+3=3$이므로 $a>1$인 a에 대해 $a=2$이고, 앞서 구한 식 ㄱ에 의해 $2f(a)+b=4$이므로 $b=-2$이다.

(만약 $a\le1$이라면 $f(a)\le0$이므로 $f(a)\ne3$이라 모순이다.)

그러므로 $a+b=2+(-2)=0$이다.

여담:

$f(x)$가 증가함수이자 연속함수라는 점에 주목하면 무난하게 풀리는 문제였다.

기출 다시보기: 2024학년도 6월 모의평가 미적분 28번

28. 두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
> 이다.
>
> (나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

답: 2번

15.

정답: ⑤

해설:

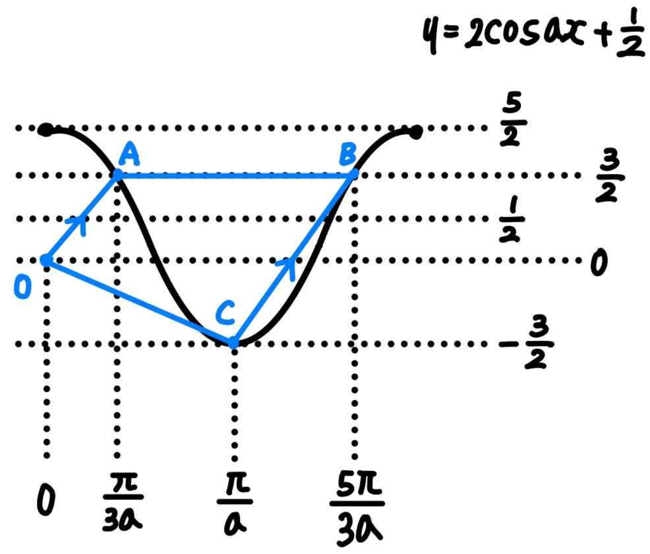
step1

점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다 하자.

점 A와 점 B의 x좌표는 $2\cos ax+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$을 만족하므로

$\cos ax=\frac{1}{2}$을 만족하고, 이를 만족하는 $0\le x\le \frac{2\pi}{a}$인 x값은

$\frac{\pi}{3a}$, $\frac{5\pi}{3a}$이므로 점 A의 x좌표는 $\frac{\pi}{3a}$, 점 B의 x좌표는 $\frac{5\pi}{3a}$이다.



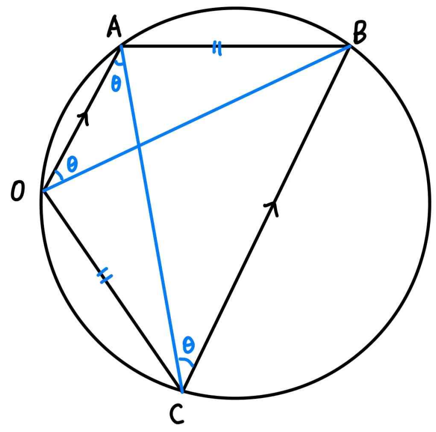
이때 선분 OA의 기울기는 $\dfrac{\frac{3}{2}-0}{\frac{\pi}{3a}-0}=\dfrac{9a}{2\pi}$이고,

선분 BC의 기울기는 $\dfrac{\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{5\pi}{3a}-\frac{\pi}{a}}=\dfrac{9a}{2\pi}$이므로

선분 OA와 선분 BC는 평행하다.

이때 사각형 OABC는 원에 내접하는 사각형인데 마주보는 두 변 $\overline{OA}$와 $\overline{BC}$가 평행하므로, 사각형 OABC는 등변사다리꼴이고, $\overline{OC}=\overline{AB}$이다.

(그림 참고-원에 내접하는 사각형이 마주보는 두 변이 평행할 경우 등변사다리꼴인 이유



선분 OA와 선분 BC는 평행하므로, $\angle\mathrm{OAC} = \angle\mathrm{ACB}$이다.
($\because$ 엇각)

이때 $\angle\mathrm{ACB}$와 $\angle\mathrm{AOB}$는 동일한 호에 대한 원주각이므로, $\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{AOB}$이다.

따라서 $\angle\mathrm{OAC} = \angle\mathrm{AOB}$이다.

이때 한 원에서 원주각의 크기가 같으면 현의 길이도 같으므로, $\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{AB}}$이다.)

step2

선분 OC의 길이는 $\overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}-0\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}-0\right)^2}$이고,

선분 AB의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{5\pi}{3a} - \frac{\pi}{3a} = \frac{4\pi}{3a}$이다.

따라서 $\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}-0\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}-0\right)^2} = \frac{4\pi}{3a}$이고,

양변을 제곱해주면 $\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{9}{4} = \frac{16\pi^2}{9a^2}$이므로 $a^2 = \frac{28}{81}\pi^2$이며

양수 a의 값은 $\frac{2\sqrt{7}}{9}\pi$이다.

여담:

1. 원에 내접하는 사각형이

1) 마주보는 두 변이 평행하거나

2) 마주보는 두 변의 길이가 같다면

등변사다리꼴이다.

이 문제에서는 1번 상황이 주어졌고, 9회 15번의 경우 2번 상황이 주어졌다.

2. 원에 내접하는 사각형의 마주보는 두 각의 합이 π임을 이용해서 풀려 했다면... 각 변의 길이를 구하고, 코사인법칙을 써서 두 코사인값의 합이 0임으로 식을 세워야 하는데... 아마 계산하다가 시간이 끝날 것이다... 근데 이건 저도 진짜 못 할 것 같아요. 위에 적힌 등변사다리꼴 논리가 꽤 자주 사용되므로, 그냥 원에 내접하는 사각형이 어떤 조건을 만족하면 등변사다리꼴인지 잘 기억해 두는 것을 추천합니다.

20.

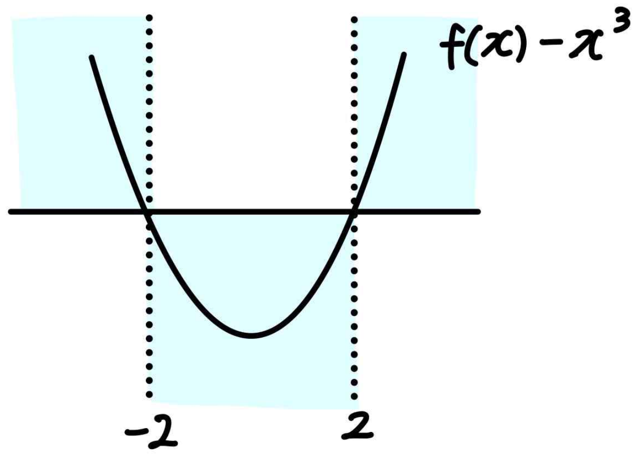
정답: 57

해설:

step1 (가) 조건 해석

$|x-2|>0$일 때, 즉 $x>2$이거나 $x<-2$일 때
$\{f(x)-x^3\}\times(|x|-2)\geq 0$이려면, $f(x)-x^3\geq 0$이어야 하고,

$|x-2|\leq 0$일 때, 즉 $-2\leq x\leq 2$일 때
$\{f(x)-x^3\}\times(|x|-2)\geq 0$이려면, $f(x)-x^3\leq 0$이어야 한다.



만약 $f(x)-x^3$이 이차함수가 아니라면, (가), (나) 조건을 동시에 만족시키는 것은 불가능하다.

($f(x)-x^3$이 삼차함수 또는 일차함수일 경우 $f(x)-x^3$의 최고차항의 계수가 양수라면, $x\to-\infty$일 때 $f(x)-x^3<0$이고, $f(x)-x^3$의 최고차항의 계수가 음수라면, $x\to\infty$일 때 $f(x)-x^3<0$이다. 또한 $f(x)-x^3$이 상수함수일 경우, $f(x)-x^3=0$이어야 하는데, 이 경우 $f(x)=x^3$이므로 $f(x)$의 극댓값이 존재하지 않아 (나) 조건을 만족하지 않는다.)

따라서 $f(x)-x^3$은 이차함수이고, $x=-2$와 $x=2$에서 부호가 바뀌므로 $f(x)-x^2=p(x+2)(x-2)$이다. (단, $p>0$)

step2 (나) 조건 해석

$f(x)=x^3+px^2-4p$이므로 $f'(x)=3x^2+2px$이고,

$p>0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(-\dfrac{2p}{3}\right)=-4p+\dfrac{4}{27}p^3=8$이고

양수 p의 값은 $p=6$이다.

따라서 $f(x)=x^3+6x^2-24$이고, $f(3)=3^3+6\times3^2-24=57$이다.

여담:

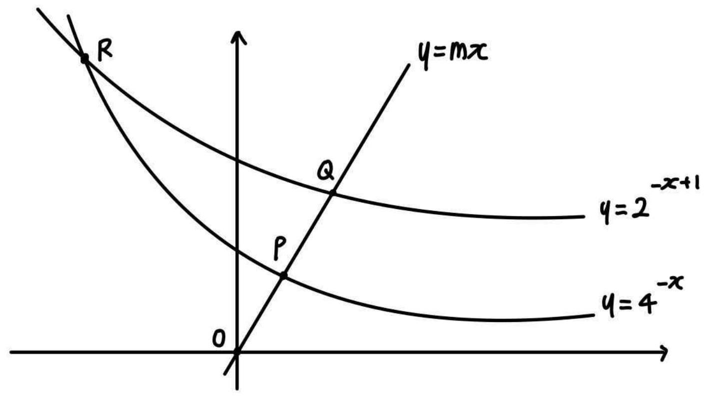
함수 $f(x)-x^3$이 존재할 수 있는 영역을 그래프로 표현해보면, 직관적으로 이해하기 좀 더 쉬웠을 것이다.

21.

정답: 110

해설:

step1



점 R의 x좌표는 $2^{-x+1}=4^{-x}$을 만족하므로 $-x+1=-2x$를 만족한다.

따라서 점 R의 x좌표는 -1이므로 점 R의 y좌표는 $2^{-(-1)+1}=4^{-(-1)}=4$이고, $\mathrm{R}(-1,4)$이다.

step2

ㄱ.

먼저 ㄱ 선지에서 물어보는 것을 바꾸어보자.

삼각형 OPR과 삼각형 PQR의 밑변을 각각 $\overline{\mathrm{OP}}$와 $\overline{\mathrm{PQ}}$로 볼 경우, 두 삼각형의 높이가 동일하므로 ㄱ 선지에서는 $\overline{\mathrm{OP}}$와 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 같은지를 물어보고 있다.

점 P의 x좌표를 a, 점 Q의 x좌표를 b라 하자.

이때 점 O, P, Q는 한 직선 위에 있으므로 '$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인가?'는 '$b=2a$인가?'와 같다.

즉 ㄱ 선지에서 물어보는 것은 '$b=2a$인가?'이다.

점 P의 y좌표는 $4^{-a}=ma$이고, 점 Q의 y좌표는 $2^{-b+1}=mb$이므로 $2^{-b+1-(-2a)}=\dfrac{b}{a}$이고, 정리하면

$2a\times2^{2a}=b\times2^b$이므로 $b=2a$이다.

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ.

점 O, P, Q는 한 직선 위에 있고 $b=2a$이므로

$\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(a,ma)$, $\mathrm{Q}(2a,2ma)$이다.

이때 점 P의 y좌표와 점 Q의 y좌표의 차가 $\dfrac{1}{8}$이므로

$2ma-ma=\frac{1}{8}$이고, 점 P의 y좌표는 $ma=\frac{1}{8}$이다.

즉, $4^{-a}=\frac{1}{8}$이므로 $a=\frac{3}{2}$이고, $ma=\frac{1}{8}$이므로 $m=\frac{1}{12}$이다.

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ.

ㄱ에 의해 삼각형 OPR의 넓이와 삼각형 PQR의 넓이는 같다.

즉, ㄷ에서는 삼각형 OPR의 넓이가 1보다 큰지를 물어보고 있다.

이때 $m=2$이므로 점 P의 좌표가 $\mathrm{P}(a, 2a)$이고, 점 R의 좌표는 $\mathrm{R}(-1, 4)$이다.

따라서 삼각형 OPR의 넓이는

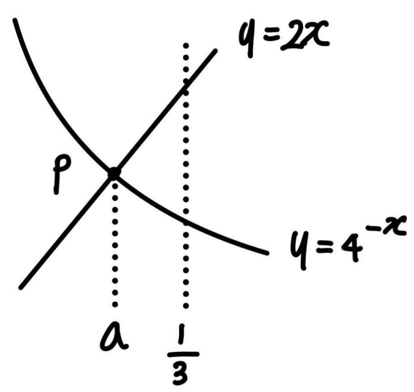
$$\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 4 & 2a & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\times|\{0\times4+(-1)\times2a+a\times0\}-\{0\times(-1)+4\times a+2a\times0\}|$$

$=3a$이다.

또한 점 P의 좌표를 살펴보면, $4^{-\frac{1}{3}}<2\times\frac{1}{3}$이므로 점 P의

x좌표인 a는 $a<\frac{1}{3}$이다.



(점 P를 기준으로 $y=2x$와 $y=4^{-x}$의 함숫값의 대소관계가 바뀜을 이용한 논리)

그러므로 $[\triangle\mathrm{OPR}]=3a<1$이므로, 삼각형 PQR의 넓이 또한 1보다 작고, ㄷ은 거짓이다.

step3

ㄱ은 참이므로 $A=100$, ㄴ도 참이므로 $B=10$, ㄷ은 거짓이므로 $C=0$이다.

따라서 $A+B+C=110$이다.

여담:

ㄱ와 ㄷ의 경우, 문제에서 물어보는 것을 바꾸어 판단하면 보기의 참 거짓을 판별하기 조금 더 쉽다.

ㄷ의 점 P를 기준으로 $y=2x$와 $y=4^{-x}$의 함숫값의 대소관계가 바뀜을 이용한 논리는 기출에도 종종 등장한, 지수로그함수 ㄱㄴㄷ 단골 논리이니까 꼭 알아두기!

24 6평 21번에서 등장했던 ㄱㄴㄷ 문제의 주관식 형태이다.

22.

정답: 13

해설:

step1 주어진 조건 해석

(가) 조건을 해석해보자.

$g(x)$는 $x=a$에서 극한값은 존재하며 불연속이라는 점을 알 수 있다.

즉, $x\to a-$일 때와 $x\to a+$일 때 $g(x)$의 식이 같고, $x=a$일 때 $g(x)$의 식과 달라야 하므로 $f(x)$는 $f(a)=a$이고, $x=a$에서 극댓값을 가짐을 알 수 있다.

(극솟값을 가질 경우 $g(x)$의 식이 바뀌지 않는다. 또한 만약 $f(x)$가 극댓값 혹은 극솟값을 가지지 않을 경우, $x\to a-$일 때와 $x\to a+$일 때 $g(x)$의 식이 다르므로 (가) 조건이 성립하지 않는다.)

또한 $\lim_{x\to a} g(x)=a+b$, $g(a)=af(a)$이므로 $a+b=af(a)-4$이다.

(나) 조건을 해석해보자.

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$과 $\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$의 극한값이 존재하므로 $g(1-)=g(1+)=g(1)$이고, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

또한 $\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}+2$이므로 $g'(1+)=g'(1-)+2$이기 때문에 $g(x)$는 $x=1$ 주위에서 식이 바뀐다는 점을 알 수 있다.

즉,

1) $f(x)$는 $f(a)=a$이고, $x=a$에서 극댓값을 가진다.

2) $a+b=af(a)-4$이다.

3) $g(x)$는 $x=1$ 주위에서 식이 바뀌어야 하므로 $f(1)=a$이다.

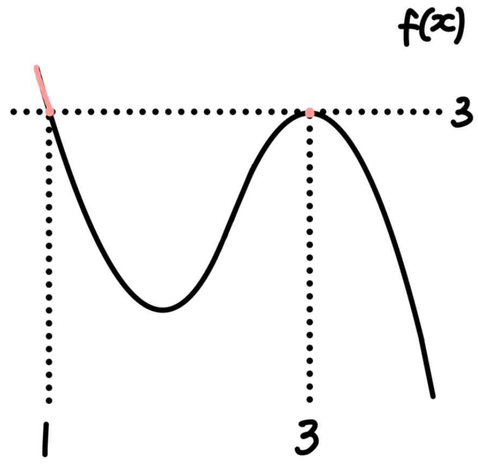
4) $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $1+b=1\times f(1)$이고 3)에 의해 $f(1)=a$이므로 $b=a-1$이다.

5) $g'(1+)=g'(1-)+2$이다.

이때 1), 2), 4)에 의해 $a+(a-1)=a\times a-4$이므로 양수 a의 값은 3이고, $b=a-1=2$이다.

step2

삼차함수 $f(x)$는 $f(1)=f(3)=3$이고, $x=3$에서 극댓값을 가지므로 개형이 아래 그림과 같다.



$f(x)=p(x-1)(x-3)^2+3$이라 하자. (단, $p<0$)

$x\to 1+$일 때 $g(x)=x+b$, $x\to 1-$일 때 $g(x)=xf(x)$이므로 $g'(1+)=1$, $g'(1-)=f(1)+1\times f'(1)=3+4p$이다.

이때 5)에 의해 $g'(1+)=g'(1-)+2$이므로 $1=(3+4p)+2$이고 $p=-1$이다.

따라서 $f(x)=-(x-1)(x-3)^2+3$, $a=3$, $b=2$이므로 $|f(a+b)|=|f(5)|=|-(5-1)(5-3)^2+3|=13$이다.

여담:

(가), (나) 조건을 통해 $g(x)$의 식이 바뀌는 지점과 식이 바뀌는 상황을 바로 파악할 수 있고, 이를 통해 케이스를 분류하지 않고도 바로 답을 구할 수 있다.

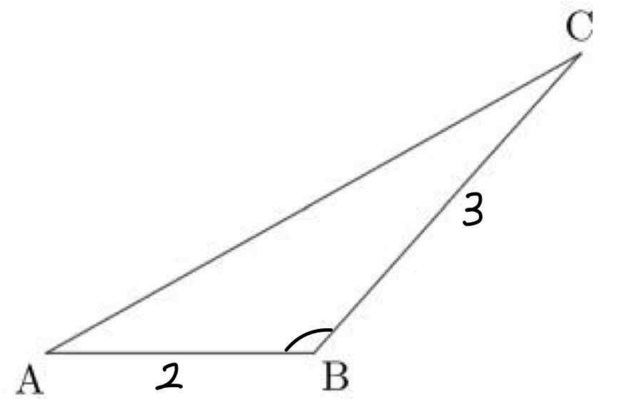
19회 정답

8	④	9	④	10	③	11	③	12	②
13	②	14	③	15	⑤	20	706	21	25
22	96								

8.

정답: ④

해설1:



삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\angle ABC$이므로,

$\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\angle ABC=\sqrt{5}$이다.

따라서 $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $\cos\angle ABC=-\frac{2}{3}$이다.

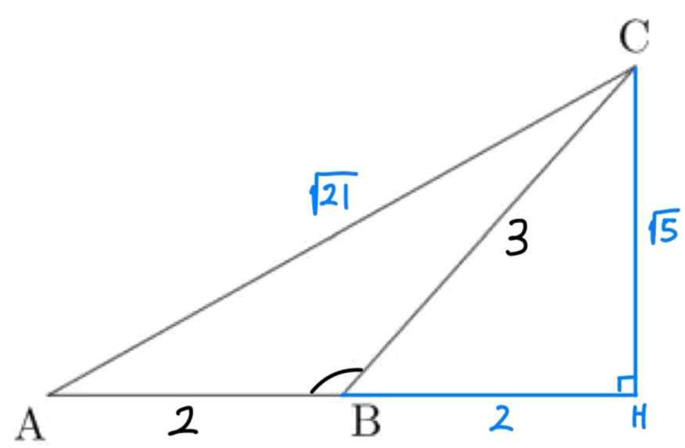
삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면,

$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2-2\times(\overline{AB})\times(\overline{BC})\times\cos\angle ABC$이므로,

$(\overline{AC})^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=21$이고,

$\overline{AC}=\sqrt{21}$이다.

해설2:



점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 점 H라 하자.

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{AB})\times(\overline{CH})$이므로 $\frac{1}{2}\times2\times(\overline{CH})=\sqrt{5}$이고, 선분 CH의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

직각삼각형 BCH에서 $(\overline{\mathrm{BH}})^2=(\overline{\mathrm{BC}})^2-(\overline{\mathrm{CH}})^2$이므로
$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$이고,

직각삼각형 ACH에서 $(\overline{\mathrm{AC}})^2=(\overline{\mathrm{AH}})^2+(\overline{\mathrm{CH}})^2$이므로
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(2+2)^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{21}$ 이다.

여담:

1) 삼각형의 넓이공식으로 사인값을 구하고, 이를 통해 알아낸 코사인값으로 코사인법칙을 사용해 길이를 구하는 정석적인 문제

2) 점 C에서 선분 AB의 연장선에 수선의 발을 내린다면, 조금 더 간단하게 답을 구할 수 있다.

9.

정답: ④

해설:

등식 $\int_1^x f(t)dt+\int_3^x f(t)dt=x^3+kx$에

$x=1$을 대입하면 $-\int_1^3 f(t)dt=k+1$이고,

$x=3$을 대입하면 $\int_1^3 f(t)dt=3k+27$이다.

따라서 $\int_1^3 f(t)dt=-(k+1)=3k+27$이므로 $k=-7$이다.

또한 등식 $\int_1^x f(t)dt+\int_3^x f(t)dt=x^3+kx$을 x에 대해 미분하면,

$f(x)+f(x)=3x^2+k$이므로 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{k}{2}=\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{2}$이고,

따라서 $f(k)$의 값은 $f(-7)=\frac{3}{2}\times(-7)^2-\frac{7}{2}=70$이다.

여담:

함숫값 대입, x에 대한 미분으로 답이 나오는 정적분으로 정의된 함수 문항이다. 다만 정적분으로 정의된 함수가 한 식에 2개가 들어가 있으므로, 함숫값도 2번 대입해줘야 한다.

10.

정답: ③

해설:

step1

$a_n=a+3\times(n-1)$라 하자.

$a_n=\begin{cases} b_n-1 & (b_n<0) \\ 2b_n & (b_n\geq 0)\end{cases}$ 이므로 $b_n=\begin{cases} a_n+1 & (a_n<-1) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\geq 0)\end{cases}$ 이다.

이때 a_n은 n값이 커짐에 따라 값이 증가하는 등차수열이므로, $b_k=\frac{1}{2}a_k$를 만족하는 최소의 자연수 k에 대하여, $n\geq k$인 모든 n에 대해 $b_n=\frac{1}{2}a_n$이다.

1) $b_2=\frac{1}{2}a_2$, $b_5=\frac{1}{2}a_5$인 경우 (단, $a_2\geq 0$)

이 경우 $b_5-b_2=\frac{1}{2}(a_5-a_2)=\frac{1}{2}\times(3\times 3)=\frac{9}{2}$이므로

$b_5-b_2=\frac{19}{4}$를 만족하지 않는다.

2) $b_2=a_2+1$, $b_5=a_5+1$인 경우 (단, $a_5<-1$)

이 경우 $b_5-b_2=(a_5+1)-(a_2+1)=3\times 3=9$이므로

$b_5-b_2=\frac{19}{4}$를 만족하지 않는다.

3) $b_2=a_2+1$, $b_5=\frac{1}{2}a_5$인 경우 (단, $a_2<-1$, $a_5\geq 0$)

먼저 $a_n=a+3(n-1)$이므로 $a_2=a+3$, $a_5=a+12$이다.

이때 $a_2<-1$이므로 $a<-4$이고, $a_5\geq 0$이므로 $a\geq -12$이다.

따라서 $-12\leq a<-4$이다.

또한

$b_5-b_2=\frac{1}{2}a_5-(a_2+1)=\frac{1}{2}\times(a+12)-(a+3+1)=\frac{19}{4}$이므로,

$a=-\frac{11}{2}$이다.

그러므로 $a_n=-\frac{11}{2}+3\times(n-1)$이다.

step2

$a_1=-\frac{11}{2}<-1$이므로 $b_1=a_1+1=-\frac{9}{2}$ 이고,

$a_3=\frac{1}{2}\geq 0$이므로 $b_3=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{4}$이며,

$a_6=\frac{19}{2}\geq 0$이므로 $b_6=\frac{1}{2}a_6=\frac{19}{4}$이다.

따라서 $b_1+b_3+b_6=-\frac{9}{2}+\frac{1}{4}+\frac{19}{4}=\frac{1}{2}$이다.

여담:

1) a_n이 증가하는 등차수열임을 파악해, $b_k=\frac{1}{2}a_k$를 만족하는 최소의 양수 k에 대하여, $n\geq k$인 모든 n에 대해 $b_n=\frac{1}{2}a_n$이라는 점에 주목하기.

2) a_n을 b_n에 대해 정의한 수열을,

a_n이 등차수열이므로 n에 대해 표현할 수 있기 때문에

b_n을 a_n에 대해 정의한 수열로 바꿔보는 발상을 떠올렸다면 좀 더 무난하게 풀 수 있었을 것이다.

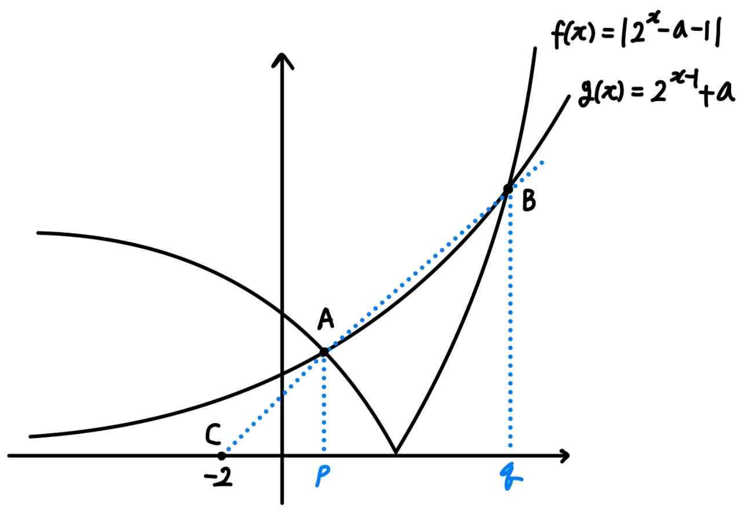
3) 11회 22번 문항에서는 $f(x)$와 $g(x)$ 함수간의 위치를 바꾸어 풀었는데, 이 문항에서는 a_n과 b_n의 수열간의 위치를 바꾸어 푼다는 점에서 공통점이 있는 듯 하다.

11.

정답: ③

해설:

step1



$f(x)=\left|2^x-a-1\right|$, $g(x)=2^{x-1}+a$라 하고,

점 A의 x좌표를 p, 점 B의 x좌표를 q라 하자. (단, $p<q$)

1) $-2^p+a+1=2^{p-1}+a$이므로 $\frac{3}{2}\times 2^p=1$이고, $p=\log_2\left(\frac{2}{3}\right)$이다.

또한 점 A는 함수 $g(x)$위의 점이므로, 점 A의 y좌표는 $2^{\log_2\left(\frac{2}{3}\right)-1}+a$이다.

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\log_2\left(\frac{2}{3}\right), \frac{1}{3}+a\right)$이다.

2) $2^q-a-1=2^{q-1}+a$이므로 $\frac{1}{2}\times 2^q=2a+1$이고,

$q=\log_2(4a+2)$이다.

또한 점 B는 함수 $g(x)$위의 점이므로, 점 B의 y좌표는 $2^{\log_2(4a+2)-1}+a$이다.

따라서 점 B의 좌표는 $(\log_2(4a+2), 3a+1)$이다.

step2

선분 AC의 기울기와 선분 BC의 기울기가 같으므로,

$$\frac{\left(\frac{1}{3}+a\right)-0}{\log_2\left(\frac{2}{3}\right)-(-2)}=\frac{(3a+1)-0}{\log_2(4a+2)-(-2)}$$이다.

정리하면 $3\times\left(\log_2\left(\frac{2}{3}\right)+2\right)=\log_2(4a+2)+2$이므로 $a=\frac{37}{54}$이다.

여담:

만약 선분 AB의 기울기를 구하는 식을 넣는다면 식이 복잡해지기 때문에 최대한 점 C의 좌표를 이용해 선분 AC와 선분 BC의 기울기가 같다고 식 세우자.

12.

정답: ②

해설:

step1

등식 $\int_{x}^{x+3} f(t)dt = 4x+3$을 x에 대해 미분하면,

$f(x+3)-f(x)=4$이다.

또한 등식 $\int_{x}^{x+3} f(t)dt = 4x+3$에 $x=0$을 대입하면,

$\int_{0}^{3} f(x)dx = 3$이다.

step2

구간 $[0,3)$에서 $f(x)=ax^2+bx$라 하면, (단, $a \neq 0$)

$f(3)-f(0)=4$이므로 $9a+3b=4$이고,

$\int_{0}^{3} f(x)dx = \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^3 = 3$이므로 $9a+\frac{9}{2}b=3$이다.

따라서 $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$이고, $f(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x$이다.

step3

$f\left(\frac{15}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)+4=f\left(\frac{3}{2}\right)+8$이고,

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$이므로 $f\left(\frac{15}{2}\right)=\frac{17}{2}$이다.

여담:

$f(x)$는 실수 전체의 구간에서 이차함수인 것은 아니다. 각각의 구간에서 서로 다른 이차함수이고, $f(x)$는 이것들을 이어붙인 함수이다.

13.

정답: ②

해설:

step1 a_n 관찰하기

n이 증가함에 따라, $a_n < 2$일 경우 a_{n+2}은 감소하고, $a_n \geq 2$일 경우 a_{n+2}은 증가한다.

step2

$a_1 = a$라 하자.

(나) 조건에 의해 $a_2 = a_1 - 1 = a-1$이다.

1) $a<2$인 경우

$a_2 = a-1$이고, $a_2 < 1$이다.

$a_1 < 2$이므로 $a_3 = a-2$이고 $a_3 < 0$이며,

$a_3 < 0$이므로 $a_5 = a-4$이다.

또한 $a_2 < 1$이므로 $a_4 = a-3$이고 $a_4 < -1$이며,

$a_4 < -1$이므로 $a_6 = a-5$이다.

$a_1 = a < 2 \Rightarrow a_3 = a-2 < 0 \Rightarrow a_5 = a-4$

$\Downarrow$

$a_2 = a-1 < 1 \Rightarrow a_4 = a-3 < -1 \Rightarrow a_6 = a-5$

따라서 (가) 조건에 의해 $a_3+2a_6 = (a-2)+2(a-5)=0$이므로 $a=4$이고, 이 경우 $a_1 < 2$ 조건을 만족시키지 않는다.

2) $a_1 \geq 3$인 경우

$a_2 = a-1$이고, $a_2 \geq 2$이다.

$a_1 \geq 3$이므로 $a_3 = 2a$이고 $a_3 \geq 6$이며,

$a_3 \geq 6$이므로 $a_5 = 4a$이다.

또한 $a_2 \geq 2$이므로 $a_4 = 2(a-1)$이고 $a_4 \geq 4$이며,

$a_4 \geq 4$이므로 $a_6 = 4(a-1)$이다.

$a_1 = a \geq 3 \Rightarrow a_3 = 2a \geq 6 \Rightarrow a_5 = 4a$

$\Downarrow$

$a_2 = a-1 \geq 2 \Rightarrow a_4 = 2(a-1) \geq 4 \Rightarrow a_6 = 4(a-1)$

따라서 (가) 조건에 의해 $a_3+2a_6 = 2a+8(a-1)=0$이므로 $a=\frac{4}{5}$이고, 이 경우 $a_1 \geq 3$ 조건을 만족시키지 않는다.

3) $2 \le a_1 < 3$

$a_2 = a-1$이고, $1 \le a_2 < 2$이다.

$2 \le a_1 < 3$이므로 $a_3 = 2a$이고 $4 \le a_3 < 6$이며,

$4 \le a_3 < 6$이므로 $a_5 = 4a$이다.

또한 $1 \le a_2 < 2$이므로 $a_4 = a-3$이고 $-1 \le a_4 < 0$이며,

$-1 \le a_4 < 0$이므로 $a_6 = a-5$이다.

$a_1 = a \quad (2 \le a_1 < 3) \Rightarrow a_3 = 2a \quad (4 \le a_3 < 6) \Rightarrow a_5 = 4a$

$\Downarrow$

$a_2 = a-1 \quad (1 \le a_2 < 2) \Rightarrow a_4 = a-3 \quad (-1 \le a_4 < 0) \Rightarrow a_6 = a-5$

따라서 (가) 조건에 의해 $a_3 + 2a_6 = 2a + 2(a-5) = 0$이므로 $a = \frac{5}{2}$이다.

step3

$a_5 = 4a = 10$이므로 $a_7 = 2 \times a_5 = 20$이고,

$a_6 = a-5 = -\frac{5}{2}$이므로 $a_8 = -\frac{5}{2} - 2 = -\frac{9}{2}$이다.

따라서 $a_7 + 2a_8 = 20 + 2 \times \left(-\frac{9}{2}\right) = 11$이다.

여담:

1) 범위에 주의하며 케이스분류 하기. 이때 a_{n+2}의 값을 주고 있다는 점을 놓치지 말자.

2) $a_p < 2$인 최소의 자연수 p가 있을 때, 0이상의 모든 정수 k에 대하여 $a_{p+2k} < 2$이고, $a_q \ge 2$인 최소의 자연수 q가 있을 때, 0이상의 모든 정수 k에 대하여 $a_{q+2k} \ge 2$이다.

(이 문제에서는 그렇게 중요한 포인트가 아니었지만, 수열의 형태 분석은 잘할수록 좋으니 한 번 살펴보고 넘어가자.)

14.

정답: ③

해설:

step1 (가) 조건 해석

$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$이다.

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 양수라면, $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$이므로 $h(x) \ge 2$인 실수 x가 무수히 많게 되어 (가) 조건을 만족하지 않는다.

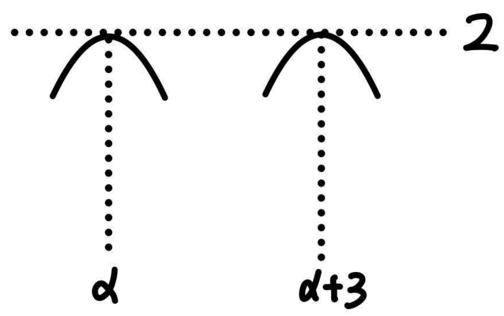
따라서 $f(x)$의 최고차항 계수는 음수이다.

$x \to -\infty$일 때 $g(x) \to -\infty$이므로 $h(x) \to -\infty$이고,

$x \to \infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이므로 $h(x) \to -\infty$이다.

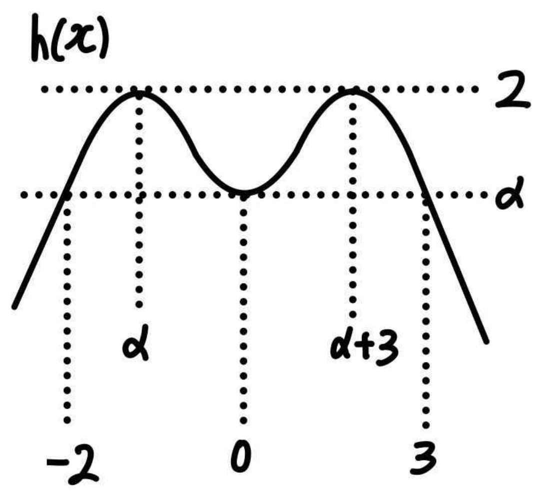
또한 $h(x)$는 연속함수인데, $h(x) \ge 2$를 만족시키는 실수 x의 값의 불연속성으로 보아 $h(\alpha) = h(\alpha+3) = 2$이고, $h(x)$의 최댓값은 2이다.

(만약 $h(\alpha) > 2$라면 $h(x)$는 연속함수이므로 $x = \alpha$ 주위에서 $h(x) \ge 2$를 만족할 것이고, $h(\alpha+3) > 2$라면 $h(x)$는 연속함수이므로 $x = \alpha+3$ 주위에서 $h(x) \ge 2$를 만족할 것이다.)



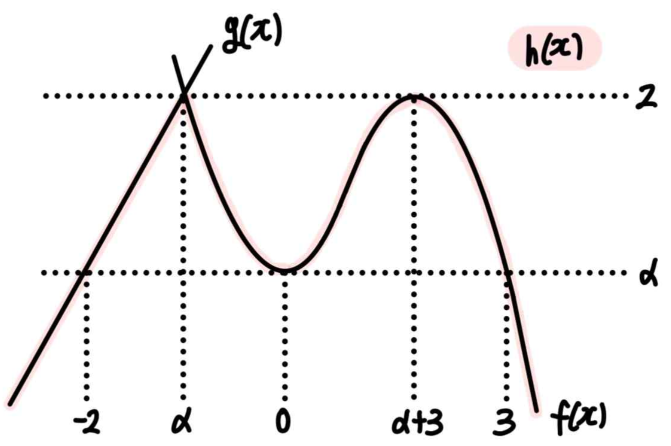
step2 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 개형 파악

$h(\alpha) = h(\alpha+3) = 2$이고 $h(x)$의 최댓값은 2이며 $h(-2) = h(0) = h(3) = \alpha$를 만족하려면 $h(x)$의 개형이 대략 아래와 같아야 한다.



$h(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\alpha+3$에서 극댓값 2를 가지며, $x=0$에서 극솟값 α를 가져야 한다.

이때 $f(x)$의 극대와 극소가 각각 1개씩 존재하므로, $h(x)$가 극대를 가지는 위치 중 하나는 $f(x)$와 $g(x)$의 교점이 생기며 $h(x)$의 식이 바뀌는 지점이다.
(만약 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 가지지 않는 감소함수라면, $h(x)$는 극대를 최대 1곳에서 가지게 된다.)



step3

$f(x)=px^2(x-3)+\alpha$라 하면, (단, $p<0$)

$f'(\alpha+3)=0$이고 $-3<\alpha<0$이므로 $\alpha=-1$이다.

이때 $f(\alpha+3)=f(2)=2$이므로 $p=-\dfrac{3}{4}$이다.

따라서 $f(x)=-\dfrac{3}{4}(x+1)(x-2)^2+2$이고,
$f(\alpha+5)=f(4)=-13$이다.

또한 $g(x)$는 두 점 $(-2,-1)$과 $(-1,2)$를 지나는 일차함수이므로, $g(x)=3x+5$이고 $g(\alpha+5)=g(4)=17$이다.

그러므로 $g(\alpha+5)-f(\alpha+5)=17-(-13)=30$이다.

여담:

(가), (나) 조건을 이용해 $h(x)$의 대략적인 개형을 파악하면 계산할 부분은 별로 없는 문제이다. 극댓값이 2개가 되도록 하는 개형을 직관적으로 바로 찾아낼 수 있도록 연습하자.

15.

정답: ⑤

해설:

step1

$y=a^x$를 $y=x$에 대해 대칭시키고, x축에 대칭시킨 다음 x축에 대해 양의 방향으로 $+3$만큼 평행이동시키면 $y=\log_{\frac{1}{a}}(x-3)$이 된다.

직선 $y=-2x-1$을 $y=x$에 대해 대칭시키고, x축에 대해 대칭시킨 다음 x축에 대해 양의 방향으로 $+3$만큼 평행이동시키면 직선 $y=\dfrac{1}{2}(x-3)+\dfrac{1}{2}$이 되고, 이 직선은 점 A를 지난다.

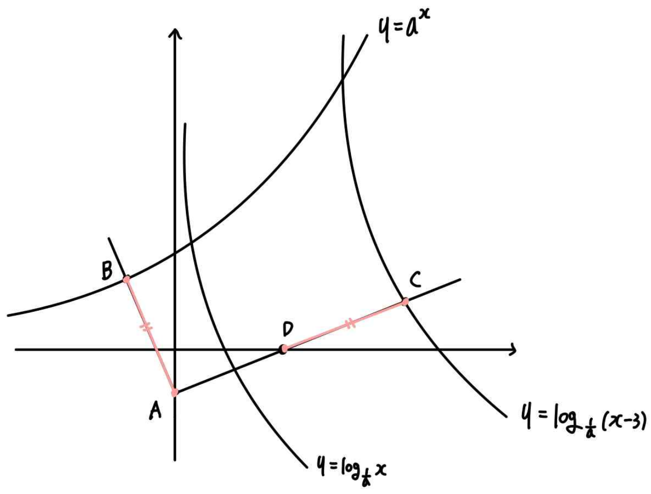
점 A를 $y=x$에 대해 대칭시키고, x축에 대해 대칭시킨 다음 x축에 대해 양의 방향으로 $+3$만큼 평행이동시키면 점 $(2,0)$이 된다.

점 $(2,0)$을 점 D라 하자.

1) $y=a^x$를 $y=x$에 대해 대칭시키고, x축에 대칭시킨 다음 x축에 대해 양의 방향으로 $+3$만큼 평행이동시키면 $y=\log_{\frac{1}{a}}(x-3)$이 된다.

2) 선분 AB를 $y=x$에 대해 대칭시키고, x축에 대칭시킨 다음 x축에 대해 양의 방향으로 $+3$만큼 평행이동시키면 선분 CD가 된다.

step2

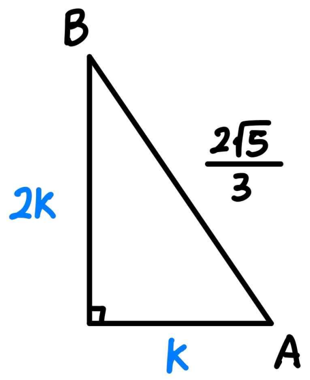


선분 AB의 길이는 선분 CD의 길이와 같고, 선분 AD의 길이는 $\sqrt{(2-0)^2+\{0-(-1)\}^2}=\sqrt{5}$이다.

이때 $\angle BAC=90^\circ$이므로 선분 AB의 길이를 p라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(\overline{AB})\times(\overline{AC})=\dfrac{1}{2}\times p\times(p+\sqrt{5})=\dfrac{25}{9}$이다.

정리하면 $p^2+\sqrt{5}p-\frac{50}{9}=\left(p-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)\left(p+\frac{5\sqrt{5}}{3}\right)=0$이고, 이를 만족하는 양수 p의 값은 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$이므로, 선분 AB의 길이는 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$이다.

step2



선분 AB의 기울기가 -2이므로,

점 A와 점 B의 x좌표 차이를 k, y좌표 차이를 $2k$라 하면,

(단, $k>0$)

$k^2+(2k)^2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2$이므로 $k=\frac{2}{3}$이다.

따라서 점 B의 좌표는 $\left(0-\frac{2}{3},\ -1+\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$이다.

이때 점 B는 함수 $y=a^x$ 위의 점이므로 $a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$이고,

그러므로 $a=3\sqrt{3}$이다.

여담:

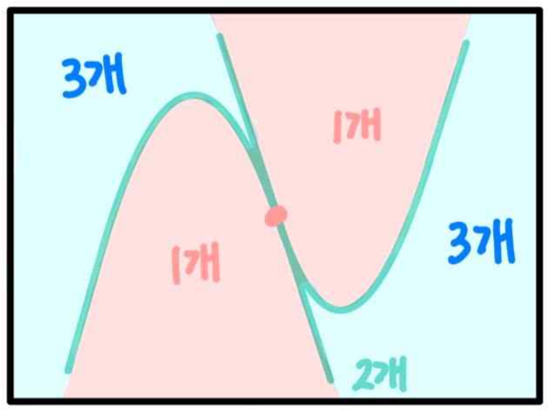
$y=a^x$와 $y=\log_{\frac{1}{a}}(x-3)$은 회전이동 후 평행이동한 관계에 있고, 선분 AB와 선분 CD 역시 동일한 회전이동 후 평행이동한 관계에 있다.

20.

정답: 706

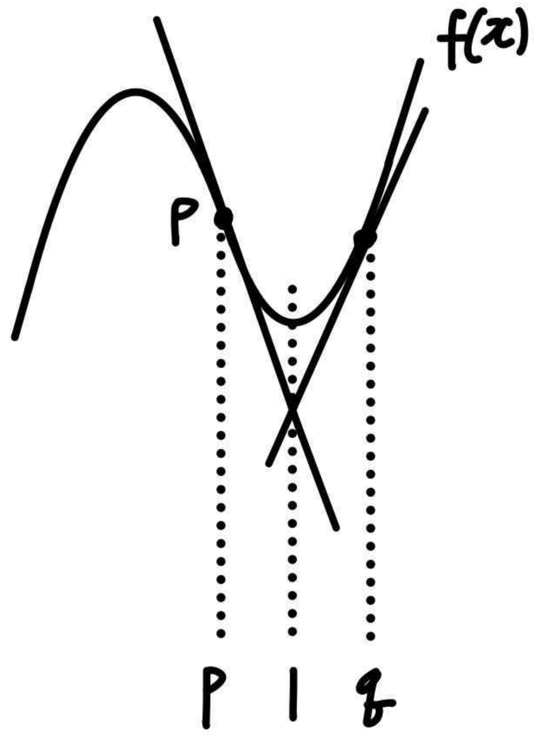
해설:

step1 영역별로 그을 수 있는 접선의 개수



점 $(1,0)$에서 $f(x)$로 접선을 2개 그을 수 있고, 이때 $(1,0)$은 $f(x)$ 위의 점이 아니므로 $(1,0)$은 $f(x)$의 변곡접선 위의 점이다.

step2



$f(x)$의 변곡점을 점 P라 하고, 변곡점의 x좌표를 p라 하자.

$f(x)$는 $(p, f(p))$에 대해 점대칭이므로,

$f(x)=(x-p)^3+a(x-p)+b$라 하자.

1) $f(1)=1$이므로 $(1-p)^3+a(1-p)+b=1$이다.

2) 점 P에서 접선의 기울기는 $f'(p)=a$이고, 이때 이 접선이 점 (p, b)와 점 $(1,0)$을 지나므로 $\frac{b}{p-1}=a$이다.

따라서 1)과 2)에 의해 $(1-p)^3+a(1-p)+a(p-1)=1$이므로

실수 p의 값은 $p=0$이고, $b=(p-1)a=-a$이다.

그러므로 $f(x)=x^3+ax-a$이다.

3) 변곡접선 외의 점 P를 지나는 다른 접선의 기울기는 $1-a$이다.

이 접선의 접점의 좌표를 q라 하면,

접선의 방정식은 $y=(3q^2+a)(x-q)+q^3+aq-a$이고,

정리하면 $y=(3q^2+a)x-2q^3-a$이다.

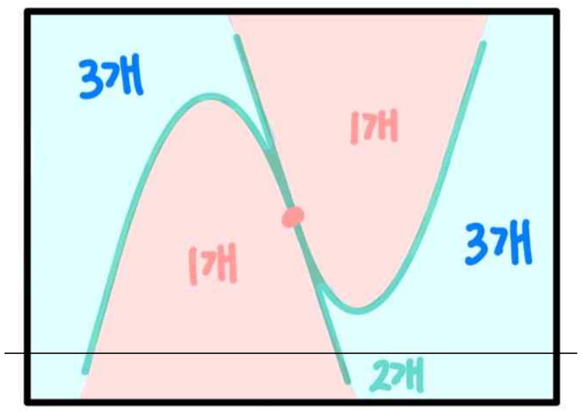
이때 이 직선이 $(1,0)$을 지나가므로 $(3q^2+a)-2q^3-a=0$이고, $q>1$을 만족하는 q의 값은 $q=\frac{3}{2}$이다.

또한 이 접선의 기울기는 $1-a=3q^2+a$이므로 $a=-\frac{23}{8}$이다.

그러므로 $f(x)=x^3-\frac{23}{8}x+\frac{23}{8}$이고, $f(9)=706$이다.

여담:

영역별로 그을 수 있는 접선의 개수는 알아두자.



21.

정답: 25

해설:

step1

ㄱ. a_1이 자연수이므로 a_n의 모든 항은 자연수이다.

ㄴ. $a_6+a_{22}=63$이므로 a_6이 홀수일 경우 a_{22}는 짝수이고, a_6이 짝수일 경우 a_{22}는 홀수이다.

ㄷ. $a_1 \to a_3 \to a_6$의 경로로 a_6을 구하고, $a_1 \to a_2 \to a_5 \to a_{11} \to a_{22}$의 경로로 a_{22}를 구한다.

step2

k는 자연수라 하자.

1) a_1이 홀수일 경우

$a_1=2k-1$이라 하면, (a_1은 홀수)

$a_3=a_1+1=2k$이고, (a_3은 짝수)

$a_6=a_3+3=2k+3$이다.

또한

$a_2=2a_1=4k-2$이고, (a_2는 짝수)

$a_5=a_2+2=4k$이며, (a_5는 짝수)

$a_{11}=a_5+5=4k+5$이고, (a_{11}은 홀수)

$a_{22}=2a_{11}=8k+10$이다.

따라서 $a_6+a_{22}=63$이므로 $(2k+3)+(8k+10)=63$이고, 정리하면 $k=5$이다.

그러므로 이 경우 $a_1=2k-1=9$이다.

2) a_1이 짝수인 경우

$a_1=2k$이라 하면, (a_1은 짝수)

$a_3=a_1+1=2k+1$이고, (a_3은 홀수)

$a_6=2a_3=4k+2$이다.

또한

$a_2=a_1+3=2k+3$이고, (a_2는 홀수)

$a_5=a_2+2=2k+5$이며, (a_5는 홀수)

$a_{11}=a_5+5=2k+10$이고, (a_{11}은 짝수)

$a_{22}=a_{11}+3=2k+13$이다.

따라서 $a_6+a_{22}=63$이므로 $(4k+2)+(2k+13)=63$이고, 정리하면 $k=8$이다.

그러므로 이 경우 $a_1=2k=16$이다.

1) 과 2)를 종합하면 가능한 모든 a_1의 값은 9와 16이므로,

모든 a_1의 값의 합은 $9+16=25$이다.

여담:

a_6과 a_{22}를 구하는 길을 먼저 찾아놓으면 편하다.

홀수/짝수 여부에 초점맞춰 따져보기. (이때 홀수인 경우 $2k-1$, 짝수인 경우 $2k$의 형태로 나타내면 이후 항들이 홀수인지 짝수인지 한 눈에 구분하기 편하다. 단, k의 홀짝 여부는 구분해 줄 필요 없다.)

역추적을 할지, 정방향으로 나열할지 유불리를 잘 따져 보아야 했을 문제이다.

기출 다시보기: 2024학년도 수능 15번

14. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

정답: 3번

22.

정답: 96

해설:

$\int_p^x f(s)ds=F(x)$라 하면,

x에 대한 방정식 $\int_{f(x)}^{f(x)+t} f(s)ds=0$은 방정식 $F(f(x)+t)=F(f(x))$와 같다.

따라서 $g(t)$는 x에 대한 방정식 $F(f(x)+t)=F(f(x))$의 서로 다른 실근의 개수이다.

만약 $F(x)$가 극댓값과 극솟값을 가지지 않는 개형이었다면, 양수 t에 대하여 $F(x+t)=F(x)$의 근이 존재하지 않으므로, $F(f(x)+t)=F(f(x))$의 근도 존재하지 않게 되어 모든 양수 t에 대해 $g(t)=0$이 된다.

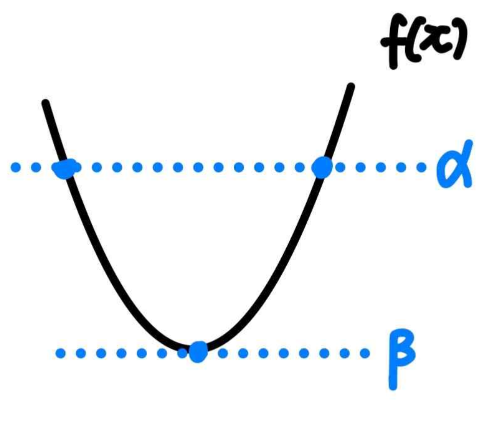
그러므로 $F(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 가지는 개형이다.

1) $g(4)=3$이므로 x에 대한 방정식 $F(f(x)+4)=F(f(x))$의 실근은 3개이다.

즉, $F(x+4)=F(x)$를 만족하는 실근이 α, β, $\cdots$라 하면,

(단, $\alpha>\beta>\cdots$)

$f(x)=\alpha$, β, $\cdots$의 서로 다른 모든 실근의 개수가 3이라는 것이다.



따라서 이차함수 $f(x)$의 극솟값이 β여야 하고,

이때 $F(x)$가 극댓값과 극솟값을 가지므로 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2개여야 하므로 $\beta<0$이다.

x에 대한 방정식 $F(f(x)+t)=F(f(x))$가 실근을 가질 수 있는 경계값은 $f(x)=\beta$인 상황이다.

그러므로 함수 $F(x)$에서 $x=\beta$ 위치가 어디 있는지 위주로 관찰하자.

2) $g(a)=2$인 양수 a의 개수는 1개이다.

즉, $F(x+a)=F(x)$를 만족하는 실근을 x_1, x_2, $\cdots$라 하면,

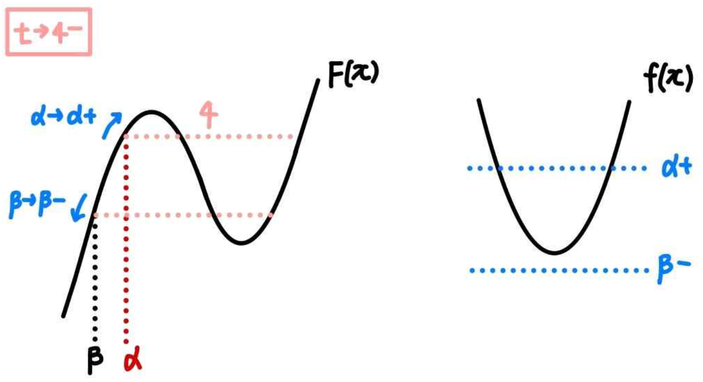
(단, $x_1>x_2>\cdots$)

$f(x)=x_1$, x_2, $\cdots$의 서로 다른 모든 실근의 개수가 2이도록 하는 a가 1개라는 것이다.

만약 β가 $F(x+t)=F(x)$의 근이 나올 수 있는 가장 작은 실근이 아니었다고 가정해보자.

(즉, $F(x)=F(\beta)$의 서로 다른 실근이 3개인 경우)

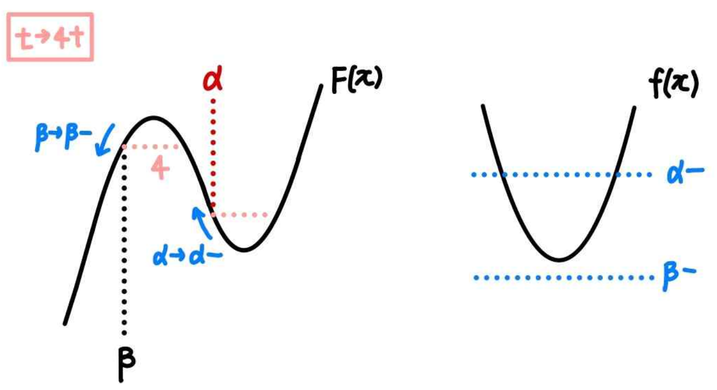
첫 번째,



이 경우 $t \to 4-$일 때 $g(t)=2$이므로, $g(a)=2$인 양수 a의 값이 무수히 많이 나와 모순이다.

(이 경우, $t \to 4+$일 때 $g(t)=4$이다.)

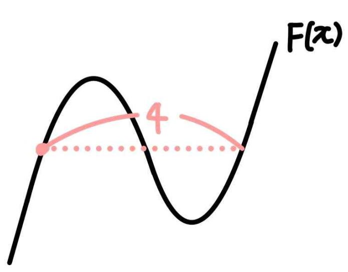
두 번째,



그러나 이 경우 역시 $t \to 4+$일 때 $g(t)=2$가 되므로, $g(a)=2$인 양수 a의 값이 무수히 많이 나와 모순이다.

(이 경우, $t \to 4-$일 때 $g(t)=4$이다.)

세 번째,

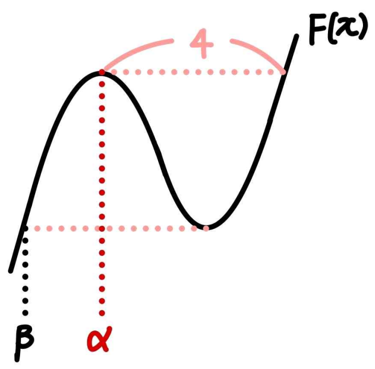


이 경우 $g(4)=3$이 될 수 없다.

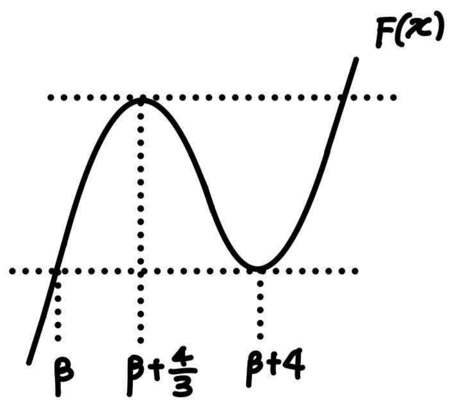
(가능한 $g(4)$의 값은 0, 1, 2)

그러므로 $F(x)=F(\beta)$의 근이 3개인 경우 주어진 조건을 모두 만족시킬 수 없다.

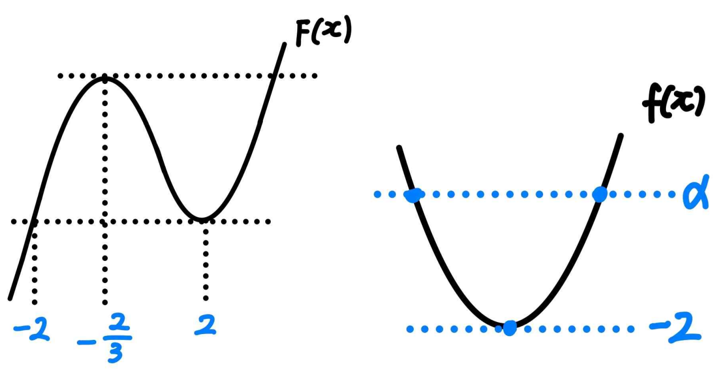
따라서 $F(x+t)=F(x)$의 근이 나올 수 있는 가장 작은 실근은 $x=\beta$이고, 방정식 $F(x)=F(\beta)$는 중근을 가진다.



이때 1)에서 방정식 $F(x+4)=F(x)$의 근이 $x=\beta$이므로 $F(\beta)=F(\beta+4)$이다.



그러므로 $F'(2)=f(2)=0$이므로 $\beta+\frac{4}{3}=2$ 또는 $\beta+4=2$인데, 1)에서 구했듯이 $\beta<0$이므로 $\beta=-2$이다.



$f(x)=p\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-2)$라 하면, $f(x)$의 극솟값은 $\beta=-2$이므로 $f\left(\frac{2}{3}\right)=p\times\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}-2\right)=-2$이고 $p=\frac{9}{8}$이다.

그러므로 $f(x)=\frac{9}{8}\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-2)$이므로,

$f(10)=\frac{9}{8}\times\left(10+\frac{2}{3}\right)\times(10-2)=96$이다.

여담:

$g(4)=3$을 통해 $f(x)$의 극솟값을 알 수 있고, ($f(x)$의 극솟값은 β)

$F(x+t)=F(x)$의 근으로 $\alpha+$, $\beta-$ 혹은 $\alpha-$, $\beta-$가 나오는 상황에서 $g(t)\neq 2$여야 하므로 $F(x)$에서 $x=\beta$와 $x=\beta+4$의 위치를 정해줄 수 있다.

20회 정답

8	③	*9*	⑤	*10*	④	*11*	②	*12*	②
13	④	*14*	③	*15*	④	*20*	351	*21*	56
22	14								

8.

정답: ③

해설:

$x(t)$를 t에 대해 미분하면 $v(t)=3t^2-8t+3$이다.

이때 $v(t)=19$는 방정식 $(3t+4)(t-4)=0$과 같으므로,
$v(t)=19$를 만족하는 양수 t의 값은 $t=4$이다.

따라서 $t=4$일 때 점 P의 위치는,

$x(4)=4\times(4-1)\times(4-3)=12$이다.

여담:

무난한 속도, 위치 문제

9.

정답: ⑤

해설:

$2^x = t$라 하면, $t > 0$이다.

이때 주어진 방정식 $4^x - 2^{x+2} + k = 0$은 방정식 $t^2 - 4t + k = 0$과 같다.

방정식 $t^2 - 4t + k = 0$의 서로 다른 두 실근은 2^α와 2^β이므로,

근과 계수와의 관계를 이용하면 $2^\alpha + 2^\beta = 4$, $2^\alpha \times 2^\beta = k$이다.

또한 $8^\alpha + 8^\beta = 22$이므로
$2^{3\alpha} + 2^{3\beta} = (2^\alpha + 2^\beta)^3 - 3 \times 2^{\alpha+\beta} \times (2^\alpha + 2^\beta) = 4^3 - 3 \times k \times 4 = 22$이고,
정리하면 $k = \frac{7}{2}$이다.

여담:

곱셈공식의 변형을 적극적으로 활용하는 문제.

방정식 $t^2 - 4t + k = 0$의 두 근은 α와 β가 아니라, 2^α와 2^β라는 점 주의하기.

10.

정답: ④

해설:

양수 a에 대하여 $1 + a \neq 1 - a^2$이므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 불연속이고, 함수 $f(x-b)$는 $x = 1 + b$에서 불연속이다.

즉, 함수 $f(x) \times f(x-b)$가 $x = 1$에서 연속이려면
$f(1-b) = 0$이어야 하고,

함수 $f(x) \times f(x-b)$가 $x = 1 + b$에서 연속이려면
$f(1+b) = 0$이어야 한다.

따라서 $f(1-b) = (1-b) + a = 0$, $f(1+b) = (1+b) - a^2 = 0$이므로 $(b-1)^2 = 1 + b$이고, 정리하면 양수 b의 값은 $b = 3$이며 양수 a의 값은 $a = b - 1 = 2$이다.

그러므로 $a + b = 3 + 2 = 5$이다.

여담:

함수 $f(x)$의 불연속점은 $x = 1$이고, 함수 $f(x-b)$의 불연속점은 $x = 1 + b$라는 점 놓치지 말기.

11.

정답: ②

해설:

step1 $f(f(x))=9f(x)-18$ **해결하기**

$f(x)=t$라 하면,

방정식 $f(f(x))=9f(x)-18$은 방정식 $f(t)=9t-18$과 같다.

이때 $f(t)=t^3-3t-2=9t-18$의 실근은,
$t^3-12t+16=(t-2)^2(t+4)=0$의 실근과 같다.

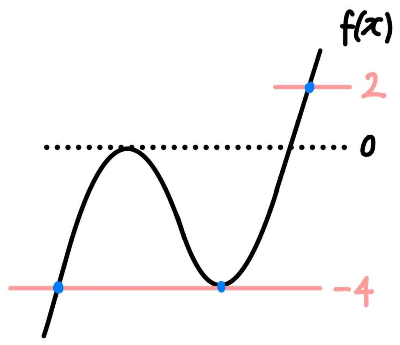
따라서 $f(t)=9t-18$의 서로다른 실근은 $t=2$, $t=-4$이다.

step2 $f(x)=2$, $f(x)=-4$**의 실근의 개수 찾기**

$f'(x)=3x^2-3$이므로,

$f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=0$이고,

$f(x)$의 극솟값은 $f(1)=-4$이다.



따라서 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 1,

$f(x)=-4$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로

$f(f(x))=9x-18$의 서로 다른 실근의 개수는 3개이다.

여담:

$f(f(x))=9f(x)-18$이라는 주어진 방정식의 형태를 보고, $f(x)$를 치환할 생각을 했다면 무난하게 해결할 수 있었을 것이다.

12.

정답: ②

해설:

step1

a_n, b_n이 모두 등비수열이므로, a_nb_n 또한 등비수열이다.

이때 $2a_3b_6 \neq 2a_3b_6+16$이므로 a_nb_n의 값은 두 개 뿐이고,

따라서 수열 a_nb_n의 공비는 -1이다.

1) a_n의 공비를 r이라 하면, b_n의 공비는 $-\frac{1}{r}$이다.

2) $(2a_3b_6)\times(-1)=2a_3b_6+16$이므로, $a_3b_6=-4$이다.

3) $\{a_nb_n \mid n \geq 1\}=\{-8, 8\}$이다.

step2

$a_1=1$, $b_1>0$이므로 $a_1b_1=8$이고, $b_1=8$이다.

이때 a_n의 공비는 r이므로 $a_3=a_1\times r^2=r^2$이고,

b_n의 공비는 $-\frac{1}{r}$이므로 $b_6=b_1\times\left(-\frac{1}{r}\right)^5=8\times\left(-\frac{1}{r^5}\right)$이다.

또한 2에서 구했듯이 $a_3b_6=-4$이므로,

$r^2\times\left\{8\times\left(-\frac{1}{r^5}\right)\right\}=-4$이고 $r^3=2$이다.

그러므로 $a_{13}=a_1\times r^{12}=1\times 2^4=16$이고,
$b_4=b_1\times\left(-\frac{1}{r}\right)^3=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$이므로,

$a_{13}+b_4=16+(-4)=12$이다.

여담:

a_nb_n 또한 등비수열임에 주목하자.

$a_n=a_1\times a^{n-1}$, $b_n=b_1\times b^{n-1}$이라 하자.

(단, a_1, b_1, a, b의 값은 0이 아니다.)

$a_nb_n=a_1b_1\times(ab)^{n-1}$이므로 a_nb_n은 공비가 ab인 등비수열이다.

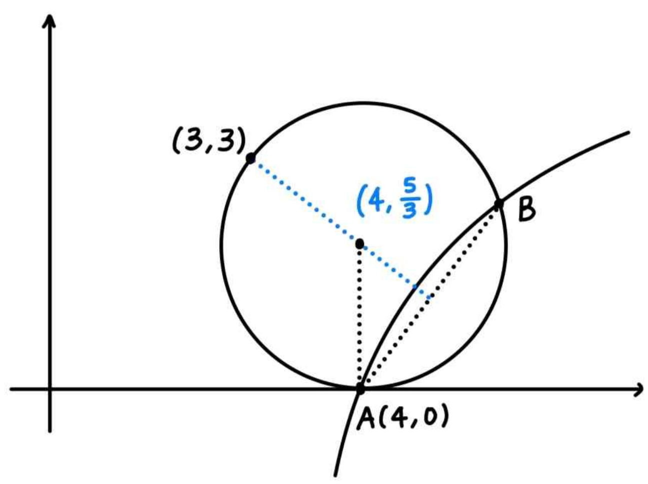
또한 등비수열의 항의 값이 2개 뿐이라면, 초항은 0이 아니고 공비는 -1이어야 한다.

13.

정답: ④

해설:

step1 원의 중심의 좌표, 반지름의 길이 구하기



주어진 원의 반지름의 길이를 r이라 하면, 원의 중심의 좌표는 $(4, r)$이다.

이때 원의 중심과 원 위의 점 $(3, 3)$ 사이의 거리도 r이므로, $\sqrt{(4-3)^2+(r-3)^2}=r$이고, 정리하면 $r=\frac{5}{3}$이다.

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(4, \frac{5}{3}\right)$, 반지름의 길이는 $\frac{5}{3}$이다.

step2 점 B의 좌표 구하기

선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{\frac{5}{3}-3}{4-3}=-\frac{4}{3}$이므로,

선분 AB의 기울기는 $\frac{3}{4}$이다.

따라서 점 B의 좌표를 $(4+4t, 0+3t)$라 하면, (단, $t \neq 0$)

원의 중심과 점 B 사이의 거리는 $r=\frac{5}{3}$이므로,

$\sqrt{\{(4+4t)-4\}^2+\left\{(0+3t)-\frac{5}{3}\right\}^2}=\frac{5}{3}$이고,

정리하면 $t=\frac{2}{5}$이다.

그러므로 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\frac{28}{5}, \frac{6}{5}\right)$이다.

step3

점 B는 곡선 $y=\log_k\left(\frac{x}{4}\right)$ 위의 점이므로,

$\frac{6}{5}=\log_k\left(\frac{7}{5}\right)$이고 $k^{\frac{6}{5}}=\frac{7}{5}$이다.

따라서 $k=\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ 이다.

여담:

그림으로 대략적인 개형을 파악하면 식 세우기도 좀 더 무난할 것이다.

선분 AB의 기울기를 이용해 점 B의 좌표를 설정한 방법 알아두고 넘어가자.

14.

정답: ③

해설:

step1

$\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)}{f(x)}$의 극한값은 $f(x)$가 x를 인수로 최대 몇 개 가지고 있는지를 의미한다. (자세한 설명은 여담 참고)

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{1}{S}<3$이므로 $f(x)$가 x를 1개 또는 2개 가지고 있다.

만약 $f(x)$가 x를 1개 가지고 있다면 $S=1$이고, $f(x)$가 x를 2개 가지고 있다면 $S=\frac{1}{2}$이다.

$f(x)$의 최고차항의 차수를 n이라 하자. (단, n은 자연수)

주어진 조건에서 $f(x)$의 최고차항 계수가 2임을 알 수 있으므로,

$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\times2x^n}{x\times2nx^{n-1}}=\frac{2}{n}=S$이다.

또한 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=S$이므로 $f(1)=0$이고, $f'(1)=S$이다.

정리하면,

1) $f(x)$가 x를 1개 가지고 $S=1$이거나, $f(x)$가 x를 2개 가지고 $S=\frac{1}{2}$이다.

2) $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이고, $f(x)$의 최고차항의 차수를 n이라 하면, $\frac{2}{n}=S$이다.

3) $f(1)=0$, $f'(1)=S$이다.

step2

1) $S=1$인 경우

$f(x)$가 x를 1개 가지고, $n=2$이며, $f(1)=0$이고 $f'(1)=1$이다.

$f(x)=2x(x-1)$라 하면, $f'(1)=2\neq1$이기 때문에 모순이다.

2) $S=\frac{1}{2}$인 경우

$f(x)$가 x를 2개 가지고, $n=4$이며, $f(1)=0$이고 $f'(1)=\frac{1}{2}$이다.

$f(x)=2x^2(x-1)(x-p)$라 하면,

$f'(1)=2\times1^2\times(1-p)=\frac{1}{2}$이므로 $p=\frac{3}{4}$이고,

$f(x)=2x^2(x-1)\left(x-\frac{3}{4}\right)$이다.

따라서 $f(2)=2\times2^2\times(2-1)\times\left(2-\frac{3}{4}\right)=10$이다.

여담:

13회 15번 참고하기

$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$의 극한값은 $f(x)$가 $(x-a)$를 인수로 최대 몇 개 가지고 있는지를 의미한다.

다항함수 $f(x)$가 있을 때, $f(x)=(x-a)^n\times Q(x)$라 하자.

(단, $Q(a)\neq0$, n은 0 이상의 정수)

1) $n=0$일 때, $f(x)=Q(x)$이고, $Q(a)\neq0$이므로

$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)Q'(x)}{Q(x)}=0$이다.

따라서 $n=0$일 때 $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=n=0$이 성립한다.

2) n이 자연수일 때, $f(x)=(x-a)^n\times Q(x)$이고 $Q(a)\neq0$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\{n(x-a)^{n-1}Q(x)+(x-a)^nQ'(x)\}}{(x-a)^nQ(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{n+\frac{(x-a)Q'(x)}{Q(x)}\right\}=n$$이다.

따라서 n이 자연수일 때 $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=n$이 성립한다.

그러므로 $f(x)$가 다항함수일 때 $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$의 극한값은 $f(x)$가 $(x-a)$를 인수로 최대 몇 개 가지고 있는지를 의미한다.

15.

정답: ④

해설:

step1

주어진 수열을 관찰해보자.

1) $a_5=0$인 경우, 모든 자연수 n에 대해 $a_{n+1}=a_n-2$이므로 자연수 k에 대해 $a_{k+6}=a_6-2k<a_6+5$이다. 따라서 $a_5=0$인 경우는 불가능하다.

2) a_5가 음수라면 $a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n & \left(a_n \geq -\dfrac{k^2}{a_5}\right) \\ a_n-2 & \left(a_n < -\dfrac{k^2}{a_5}\right) \end{cases}$ 일 것이고,

이때 $-\dfrac{k^2}{a_5}>0$이다.

이 경우 $a_5<0<-\dfrac{k^2}{a_5}$이고, $a_n<-\dfrac{k^2}{a_5}$인 경우 $a_{n+1}=a_n-2<a_n$이므로

$n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n-2$일 것이다.

그러나 이렇게 될 경우 $a_{k+6}=a_6-2k$이므로 자연수 k에 대하여 $a_{k+6}=a_6+5$을 만족시킬 수 없으므로, a_5는 양수이다.

3) a_5가 양수라면 $a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n & \left(a_n \leq -\dfrac{k^2}{a_5}\right) \\ a_n-2 & \left(a_n > -\dfrac{k^2}{a_5}\right) \end{cases}$ 일 것이고,

이때 $-\dfrac{k^2}{a_5}<0$이다.

이 경우 a_n은 n이 증가함에 따라

2씩 계속 감소하다가,

일정 숫자에서 -2배가 되고 (이때 a_n은 음수이고, -2배 후 a_{n+1}은 양수가 된다)

다시 2씩 계속 감소하다 -2배가 되는 것을 반복할 것이다.

또한, $n=6$과 $n=k+5$ 사이에 $a_{n+1}=-2a_n$을 만족하는 n이 존재해야 한다.

($n=6$과 $n=k+5$ 사이 모든 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n-2$라면, $a_{k+6}=a_6+5$는 불가능하다. a_5가 음수인 상황과 같은 논리로 불가능하다 이해하면 된다.)

step2

$a_5=a$라 하자. (단, $a>0$)

$a_6=a-2$이고, $a_{k+6}=a_6+5$이므로 $a_{k+6}=(a-2)+5=a+3$이다.

또한 step1에서 살펴봤듯이,

$m+5 \leq k+5$, 즉 $m \leq k$인 자연수 m에 대하여

$a_{m+5}=a_5-2\times m=a-2m$, $a_{m+6}=-2a_{m+5}=-2(a-2m)$을 만족하는 자연수 m이 존재할 것이다.

($6 \leq n \leq k+5$에서 a_n이 2씩 계속 감소하다가, 일정 숫자에서 -2배가 되는 순간을 $m+5$라고 한 것이다.)

이때 $a_{m+5}=a-2m$, $a_{m+6}=-2(a-2m)$이려면 $a_{m+5}\times a_5 \leq -k^2$이어야 하고, 따라서 $(a-2m)\times a+k^2 \leq 0$이고 정리하면 $a^2-2ma+k^2 \leq 0$이어야 한다.

위 부등식을 풀어보면, $m-\sqrt{m^2-k^2} \leq a \leq m+\sqrt{m^2-k^2}$인데, 이를 만족하는 실수 a의 값이 존재하려면 자연수 m과 자연수 k에 대하여 $m \geq k$여야 한다.

따라서 $m \leq k$와 $m \geq k$를 동시에 만족시키려면 $m=k$여야 하고, 이를 부등식 $m-\sqrt{m^2-k^2} \leq a \leq m+\sqrt{m^2-k^2}$에 대입하면 $a=m=k$이다.

즉, $a_{m+6}=a_{k+6}=-2(a-2k)=2k$이고, $a_6=a-2=k-2$이다.

그러므로 $a_{k+6}=a_6+5$이므로 $2k=(k-2)+5$이고, $k=3=a_5$이다.

step3

$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n & (a_n \leq -3) \\ a_n-2 & (a_n>-3) \end{cases}$ 이므로

$a_5=3$, $a_6=3-2=1$, $a_7=1-2=-1$, $a_8=-1-2=-3$, $a_9=-2\times(-3)=6$, $a_{10}=6-2=4$이다.

또한 $a_n=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}a_{n+1} & (a_{n+1} \geq 6) \\ a_{n+1}+2 & (a_{n+1}>-5) \end{cases}$ 이므로,

$a_4=3+2=5$, $a_3=5+2=7$이다.

이때 $a_2=-\dfrac{1}{2}\times 7=-\dfrac{7}{2}$ 또는 $a_2=7+2=9$인데

만약 $a_2=-\dfrac{7}{2}$라면 $a_1=-\dfrac{7}{2}+2=-\dfrac{3}{2}$일 것이고,

$a_2=9$라면 $a_1=-\frac{1}{2}\times 9=-\frac{9}{2}$ 또는 $a_1=9+2=11$일 것이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_n$의 최솟값은

$-\frac{3}{2}+\left(-\frac{7}{2}\right)+7+5+3+1+(-1)+(-3)+6+4=17$이다.

여담:

수열의 관찰, 식 세우기, 역추적 모두 배워갈 점이 있는 문제.

20.

정답: 351

해설:

$g(x)=x^3+\cdots$라고 하면 $g'(x)=3x^2+\cdots$이므로,

$f(x)=3x^4+\cdots$일 것이다.

이때 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 0을 가지므로 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이고, $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2$라고 하자.

$f(x)$가 $x=0$에서 극값 0을 가지려면, $a=b=0$이거나 $b\neq 0$이어야한다.

1) $a=b=0$, $f(x)=3x^4$인 경우

$(x-1)f(x)=(x-1)\times 3x^4$이므로 $g'(x)g(x)=3(x-1)x^4$이다.

만약 $g'(x)=3(x-1)x$라면 $g(x)=x^3$일 것이고,

$g'(x)=3x^2$라면 $g(x)=(x-1)x^2$일 것이다.

이 두 경우 모두 $g(x)$를 x에 대해 미분하면 $g'(x)$가 나오지 않으므로, $a=b=0$인 경우는 불가능하다.

2) $b\neq 0$, $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2$인 경우

$(x-1)f(x)=(x-1)\times x^2(3x^2+ax+b)$이므로
$g'(x)g(x)=(x-1)x^2\times(3x^2+ax+b)$이다.

만약 $g(x)$가 x^2을 인수로 가지고 있다면,

$g'(x)$가 x를 인수로 가지게 되므로

$g'(x)g(x)$가 x^3을 인수로 가지고 있어

$g'(x)g(x)=(x-1)x^2\times(3x^2+ax+b)$을 만족하지 않는다.

또한 $g(x)$와 $g'(x)$가 각각 x를 인수로 가지고 있다면,

$g'(0)=0$, $g(0)=0$이므로 $g(x)$가 x^2을 인수로 가지게 되어

$g'(x)g(x)$가 x^3을 인수로 가지게 되고,

$g'(x)g(x)=(x-1)x^2\times(3x^2+ax+b)$을 만족하지 않는다.

따라서 $g'(x)$가 x^2을 인수로 가지고 있으므로,

$g'(x)=3x^2$, $g(x)=(x-1)\times\frac{1}{3}(3x^2+ax+b)$이고,

이때 $g'(x)=3x^2$이고 $g(1)=0$이므로 $g(x)=x^3-1$이다.

그러므로 $g'(x)g(x)=3x^2(x^3-1)=(x-1)f(x)$이므로

$f(x)=3x^2(x^2+x+1)$이고,

$f(3)=3\times3^2\times(3^2+3+1)=351$이다.

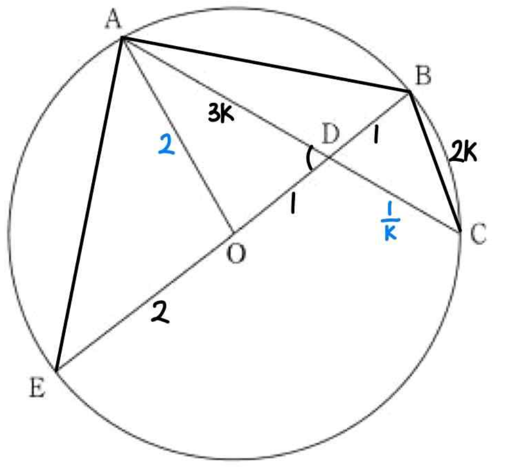
여담:

$f(x)$가 $x=0$에서 극값 0을 가지는 상황은, $f(0)=0$과 $f'(0)=0$을 만족시키는 상황 중 일부로 제한된다는 점을 놓치지 말기.

21.

정답: 56

해설:



직선 OB가 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하면,
점 D는 선분 OB의 중점이므로 $\overline{DE}=3$, $\overline{BD}=\overline{OD}=1$이다.
또한, 삼각형 ADE와 삼각형 BDC는 닮음 관계에 있다.
따라서 $\overline{AD}\times\overline{CD}=\overline{BD}\times\overline{DE}$이다.
주어진 조건에 의해 $\overline{AD}=3k$, $\overline{BC}=2k(k>0)$라 둘 수 있다.
이때 $\overline{AD}\times\overline{CD}=\overline{BD}\times\overline{DE}$이므로 $3k\times\overline{CD}=1\times3$이고 정리하면
$\overline{CD}=\dfrac{1}{k}$이며, $\overline{OA}=\overline{OE}=(\text{반지름})=2$, $\overline{OD}=1$, $\overline{AD}=3k$이다.
삼각형 AOD에서 코사인법칙을 적용하면,
$\cos(\angle ADO)=\dfrac{(\overline{AD})^2+(\overline{DO})^2-(\overline{AO})^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{DO}}=\dfrac{(3k)^2+1^2-2^2}{2\times3k\times1}$이므로,
$\cos(\angle ADO)$을 k를 이용하여 나타낸 것은 (가)$=\dfrac{3k^2-1}{2k}$이다.
또한, 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해
$2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle BDC)=(\overline{BD})^2+(\overline{CD})^2-(\overline{BC})^2$이다.
이때 $\angle ADO=\angle BDC$이므로,
$\cos\angle BDC=\cos\angle ADO=\dfrac{3k^2-1}{2k}$이고,
$2\times1\times\dfrac{1}{k}\times\dfrac{3k^2-1}{2k}=1^2+\left(\dfrac{1}{k}\right)^2-(2k)^2$이므로 $k=$(나)$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.
삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle BCD)=\frac{(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2-(\overline{BD})^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{CD}}=\frac{(2k)^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2-1}{2\times2k\times\frac{1}{k}}=\frac{3}{4}$$

이므로 $\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$이고,
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해
$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=4$이므로, $\overline{AB}=4\sin(\angle ACB)=4\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}$이다.
그러므로 $f(k)=\dfrac{3k^2-1}{2k}$이므로 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$이고, $p=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$p^2=\frac{1}{2}$이며, $q=\sqrt{7}$이므로 $q^2=7$이다.

따라서 $-\frac{q^2}{p^2\times f\left(\frac{1}{2}\right)}=56$이다.

여담:

주어진 보기만 잘 따라가면 답이 나온다.

22.

정답: 14

해설:

$h(t)=f(t)+|f(t)|$라 하자.

$h(t)=f(t)+|f(t)|=\begin{cases}2f(t) & (f(t)\geq 0)\\ 0 & (f(t)<0)\end{cases}$ 이다.

즉, 모든 실수 t에 대해 $h(t)\geq 0$이다.

또한, $g(x)=\int_{x-a}^{2x}h(t)dt$이므로 $g(x)=0$의 실근 중 $x-a=2x$를 만족시키는 x값인 $x=-a$가 무조건 존재한다. (위끝과 아래끝이 동일한 순간)

따라서 $b-2$, b, $b+3$ 중에 $-a$가 존재한다.

이때 $b=-a$인 경우, a와 b가 모두 양수라는 조건을 만족하지 않고, $b+3=-a$인 경우 역시 a와 b가 모두 양수라는 조건을 만족하지 않는다.

그러므로 $b-2=-a$이고, 방정식 $g(x)=0$의 세 실근은 $-a$, $2-a$, $5-a$이다.

즉,

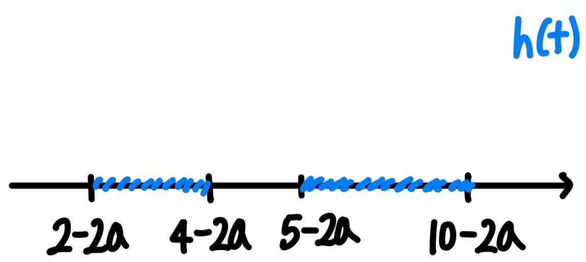
$g(-a)=\int_{-2a}^{-2a}h(t)dt=0$이고,

$g(2-a)=\int_{2-2a}^{4-2a}h(t)dt=0$이며,

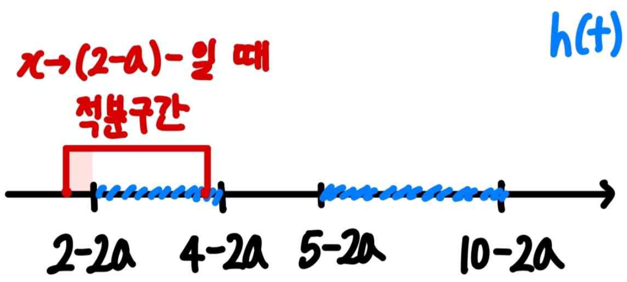
$g(5-a)=\int_{5-2a}^{10-2a}h(t)dt=0$이다.

이때 실수 전체 t에 대해 $h(t)\geq 0$인 $h(t)$를 $2-2a$부터 $4-2a$까지 적분한 값이 0이므로, 구간 $[2-2a, 4-2a]$에서 $h(t)=0$이어야 하고,

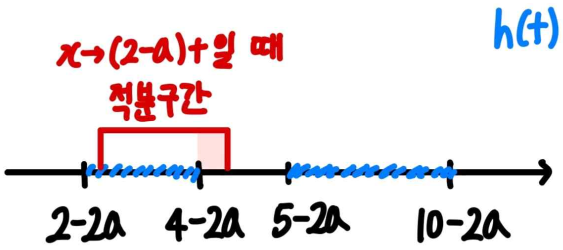
$h(t)$를 $5-2a$부터 $10-2a$까지 적분한 값이 0이므로 구간 $[5-2a, 10-2a]$에서 $h(t)=0$이어야 한다.



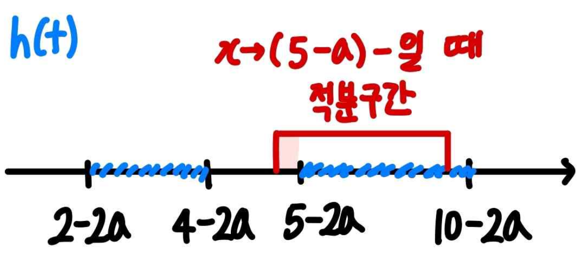
또한 $x\to(2-a)-$일 때 $g(x)\neq 0$이므로, $x\to(2-2a)-$일 때 $h(t)>0$이며,



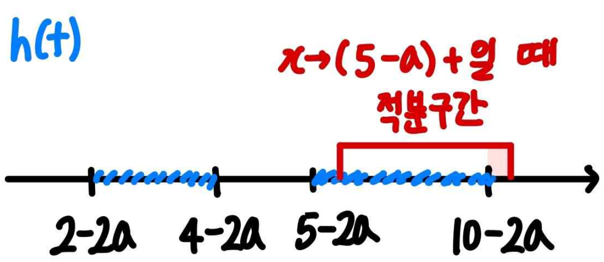
$x\to(2-a)+$일 때 $g(x)\neq 0$이므로, $x\to(4-2a)+$일 때 $h(t)>0$이고,



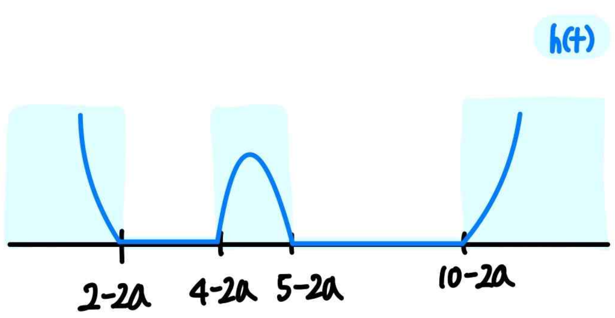
$x\to(5-a)-$일 때 $g(x)\neq 0$이므로, $x\to(5-2a)-$일 때 $h(t)>0$이며,



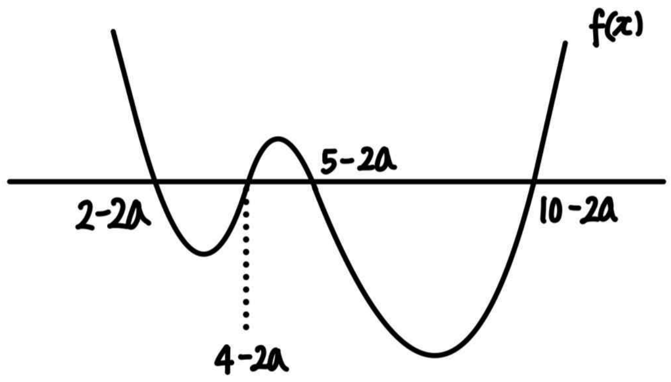
$x\to(5-a)+$일 때 $g(x)\neq 0$이므로, $x\to(10-2a)+$일 때 $h(t)>0$이다.



(아래: $h(t)$의 그래프)



(아래: $f(x)$의 그래프)



따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $2-2a$, $4-2a$, $5-2a$, $10-2a$이므로

(나) 조건에 의해 $(2-2a)+(4-2a)+(5-2a)+(10-2a)=9$이고, 정리하면 $a=\dfrac{3}{2}$이다.

그러므로 방정식 $f(x)=0$의 실근은 -1, 1, 2, 7이므로
$f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-7)$이라 할 수 있고,
$f(0)=(0+1)\times(0-1)\times(0-2)\times(0-7)=-14$이므로
$|f(0)|=14$이다.

여담:

방정식 $g(x)=0$의 근 중 무조건 $2x=x-a$를 만족시키는 x값인 $x=-a$가 존재하고, a와 b가 모두 양수라는 점을 통해 (가) 조건을 해석할 수 있다.

이를 통해 $f(x)=0$의 서로 다른 모든 실근을 찾을 수 있고, (나) 조건을 통해 그 실근들의 값을 구할 수 있다.

기출 다시보기: 2019학년도 9월 모의평가 나형 21번

21. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x\geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2은 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

답: 4번

2025학년도 수능 대비

지인선 N제

Season 1

instagram: inseon._.math

youtube: 지인선

Email: jis7711@gmail.com

지인선 지음