

수열의 극한에 대한 기본 성질 (p. 5)

예제

1. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+3}{3a_n-4} = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n+2)$ 의

값은? (단, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq \frac{4}{3}$ 이다.)

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

유제

2. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = (-2)^n$ 일 때, <보기>에서 수렴하는 수열만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

㉠. $\{a_n \times a_{n+1}\}$

㉡. $\{2^{a_{2n-1}}\}$

㉢. $\left\{ \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \right\}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)a_n = 2$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{(4n-1)(a_{2n} + a_{2n+1}) + 2a_{2n+1}\}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수열의 극한값의 계산 (p. 7)

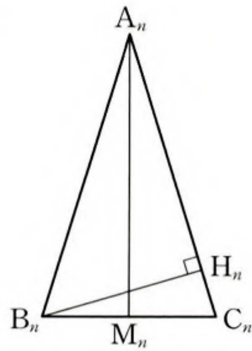
예제

4. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여

$$\overline{A_n B_n} = \overline{A_n C_n} = 4n, \quad \overline{B_n C_n} = 2\sqrt{n}$$

인 이등변삼각형 $A_n B_n C_n$ 이 있다. 선분 $B_n C_n$ 의 중점을 M_n , 점 B_n 에서 선분 $A_n C_n$ 에 내린 수선의 발을 H_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{A_n M_n} - \overline{B_n H_n}^2)$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

유제

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{9 + \frac{2}{n}} - 3 \right)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

6. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$na_n - \frac{n}{2} < 2n^2 b_n < na_n + \frac{n}{2}$$

을 만족시킨다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

등비수열의 극한 (p. 9)

예제

7. 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + 2}{x^{2n} + 1}$ 에 대하여 $f(-\frac{1}{2}) + f(2)$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

유제

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n+1} + 3^{-n-1}}{\frac{1}{2^n} + (\frac{1}{3})^n}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n-1} + a^{-2n+1}}{a^{2n+1} + a^{-2n-1}} = \frac{1}{4}$ 을 만족시키는 모든 양수 a 의 값의

합은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

Level 1. 기초연습 (p. 10)

1. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(3a_n+1)}{n^2}$ 의 값은?
 ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+3}{4n} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an}-n) = b$ 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?
 ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

3. 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \times a_n - 1}{3 \times 2^{n+1}}$$
의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

4. 수열 $\left\{ \left(\frac{x+2}{5} \right)^{2n} \right\}$ 이 수렴하도록 하는 정수 x 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

Level 2. 기본연습 (p. 11)

1. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = n^2(n+1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여
 $5n^2 + 2n < 4na_n + b_n < 5n^2 + 4n + 1$ 이다.

(나) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+4)a_n}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2}$ 의 값은?

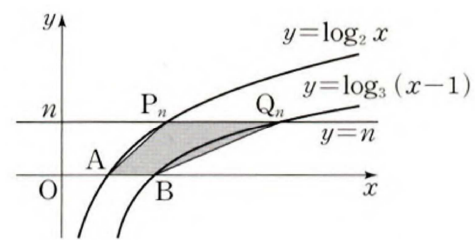
- ① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

3. $0 < k < 1$ 인 상수 k 와 2 이상의 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 원점 O 와 두 점 $A_n(2 - \frac{k}{n}, 0)$, $B_n(2, \frac{1}{n})$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OA_nB_n 의 외접원의 반지름의 길이를 R_n 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{5}{4}$ 일 때, k 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{17}{24}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{19}{24}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

4. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 직선 $y=n$ 이 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_3(x-1)$ 과 만나는 점을 각각 P_n , Q_n 이라 하고, x 축이 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_3(x-1)$ 과 만나는 점을 각각 A , B 라 하자.



사각형 P_nABQ_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{n \times P_nQ_n}$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

Level 3. 실력완성 (p. 12)

1. 양수 m 에 대하여 곡선 $y = x\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 과 직선 $y = mx$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표가 자연수 n 일 때, 곡선 $y = x\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 과 직선 $y = mx$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+1}{S_n}$ 의 값은?
- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2. 모든 항이 실수인 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

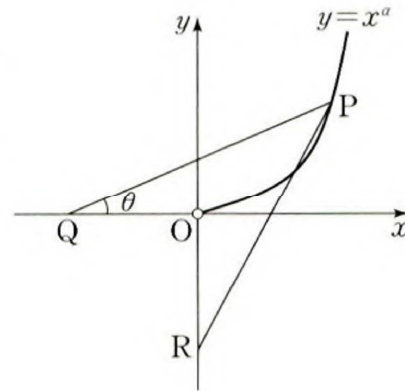
$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = a_n + b_n \times i$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{a_n^2 + b_n^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$ 의 값은?

(단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

3. 그림과 같이 1보다 큰 상수 α 와 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = x^\alpha (x > 0)$ 위의 점 $P(n, n^\alpha)$ 과 점 $R(0, (-\alpha+1)n^\alpha)$ 이 있다.



음의 실수 t 에 대하여 점 $Q(t, 0)$ 이 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 을 만족시킬 때, 직선 PQ 와 x 축이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때, 상수 α 의 값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

급수의 합 (p. 15)

예제

1. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 점 $P_n(n, \sqrt{3}n)$ 과 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 각각

a_n, b_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{a_n b_n}$ 의 값은?

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

유제

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \right)$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. 자연수 n 에 대하여 1부터 $(n+2)$ 까지의 자연수가 하나씩 적힌 $(n+2)$ 개의 공 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수를

a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2a_n}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

급수와 수열의 극한 사이의 관계 (p. 17)

예제

4. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2) = 10$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+2} - 2n)$ 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

유제

5. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{3n}{n+2} \right) = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 4) = 5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 6)(b_n + 2)$ 의 값을 구하시오.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2+1}{n^2+2n} = b$ 일 때, 두 상수 a , b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

등비급수의 합 (p. 19)

예제

7. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 6, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{27}{5}$$

일 때, a_4 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

유제

8. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$S_n = 4^n + c$ 일 때, $c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값은? (단, c 는 상수이다.)

- ① $-\frac{5}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

9. 두 자연수 $p, q (p < q)$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 는 첫째항이 p 이고

공비가 $\frac{1}{q}$ 인 등비수열이다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$ 일 때, $p \times q$ 의 값을

구하시오.

Level 1. 기초연습 (p. 20)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - b_n) = 1$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + n^2 - 3n}{2a_n + 3n^2 - n}$ 의

값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{7}{15}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{7^n}$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ $\frac{23}{12}$ ④ 2 ⑤ $\frac{25}{12}$

Level 2. 기본연습 (p. 21)

1. 세 수 $a+13$, $a+1$, $a-2$ 가 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이룰 때, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{2n}$ 의 값은?
- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.
 $a_3 = 11$, $a_6 = 17$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n + 8}$ 의 값은?
- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{7}{24}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

3. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 양수 k 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - ka_n}{a_n} = 1$ 이다.

(나) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + 7a_n^2}{a_n^2 + n^4} = 1$

k 의 값을 구하십시오.

4. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{23}{6}$ ④ 4 ⑤ $\frac{25}{6}$

Level 3. 실력완성 (p. 22~23)

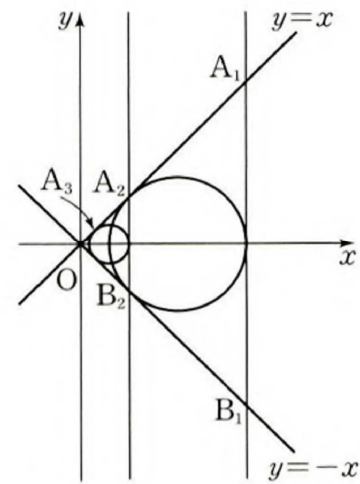
1. 자연수 k 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-k}{5}\right)^n$ 이 수렴하도록 하는

모든 정수 x 의 개수를 $f(k)$ 라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} f(k)$ 의 값은?

- ① 74 ② 78 ③ 82 ④ 86 ⑤ 90

2. 자연수 n 에 대하여 직선 $y=x$ 위의 점 $A_n(x_n, x_n)$ 을 다음 규칙에 따라 정한다

점 $A_n(x_n, x_n)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 직선 $y=-x$ 와 만나는 점을 B_n 이라 할 때, 삼각형 A_nOB_n 에 내접하는 원이 직선 $y=x$ 와 만나는 점이 $A_{n+1}(x_{n+1}, x_{n+1})$ 이다.



$x_1 = 8$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

- ① $8\sqrt{2}-2$ ② $8\sqrt{2}-1$ ③ $8\sqrt{2}$
 ④ $8\sqrt{2}+1$ ⑤ $8\sqrt{2}+2$

3. 3의 배수인 자연수 p 에 대하여 첫째항이 p 이고 공비가 $\frac{3}{4}$ 인

등비수열 $\{a_n\}$ 과 첫째항이 6이고 공비가 $\frac{2p-10}{p-2}$ 인

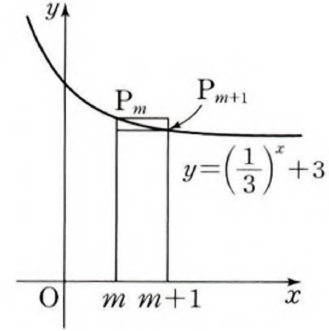
등비수열 $\{b_n\}$ 이 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = q$ 를 만족시킨다. $p+q$ 의 값은?

(단, q 는 상수이다.)

- ① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

4. 그림과 같이 자연수 m 에 대하여 곡선 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ 과

직선 $x = m$ 이 만나는 점을 P_m 이라 하자.



선분 $P_m P_{m+1}$ 을 대각선으로 하고 모든 변이 x 축 또는 y 축과 평행한 직사각형의 넓이를 S_m 이라 할 때,

부등식 $\sum_{n=1}^{\infty} S_{m+2n} > \frac{1}{1200}$ 을 만족시키는 m 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[정답표]

1. 수열의 극한

예제 및 유제	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번
	④	④	④	②	②	②	⑤	④	③
Level 1	1번	2번	3번	4번					
	①	⑤	②	⑤					
Level 2	1번	2번	3번	4번					
	③	①	③	①					
Level 3	1번	2번	3번						
	③	②	①						

2. 급수

예제 및 유제	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번
	①	②	②	④	18	④	③	①	30
Level 1	1번	2번	3번	4번					
	③	④	③	⑤					
Level 2	1번	2번	3번	4번					
	②	②	3	⑤					
Level 3	1번	2번	3번	4번					
	⑤	③	③	④					