# 약점보완 테스트 3회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

**1.** 두 수 $a$, $b$가 집합 $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$의 원소일 때, 두 집합 $A=\{x|(a^2-2a)x=a\}$, $B=\{x|(b^2-b-2)x=b+1\}$에 대하여 집합 $A$가 집합 $B$의 진부분집합이 되도록 하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

① 7개 ② 9개 ③ 11개 ④ 13개 ⑤ 15개

**2.** 함수 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^5}{10}}\div x^{\log x}$이 최댓값을 가질 때의 $x$의 값은?

① $\sqrt[3]{10^2}$ ② $\sqrt[3]{10^4}$ ③ $\sqrt[6]{10^5}$ ④ $\sqrt{10^7}$ ⑤ $\sqrt[7]{10^6}$

**3.** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2009년 교육청]

<보 기>

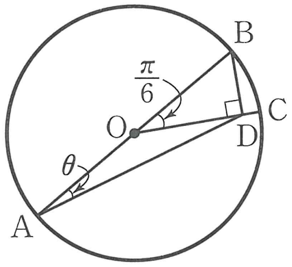
ㄱ. 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$일 때, $f(x)$가 미분가능하면 $f'(-x)=f'(x)$이다.

ㄴ. 임의의 실수 $x$에 대하여 $|f(x)|\le Mx^2$이면 $f'(0)=0$이다. (단, $M$은 양의 상수이다.)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}=0$이면 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 아래 그림에서 선분 $AB$는 원 $O$의 지름이다. 선분 $OB$와 선분 $OC$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이고, 점 $D$는 점 $B$에서 선분 $OC$에 내린 수선의 발이다. $\angle OAD = \theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하시오.




5. 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>0$인 함수 $f(x)$에 대하여
$f(2x)\{1+2f'(2x)\}=\{f(2x)\}'\{1+f(2x)\}$
가 성립한다. $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값은?

① $\sqrt{e}$ ② $e$ ③ $2e$
④ $e^2$ ⑤ $e^3$

## 정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) 답 ①

[해설] $(a^2-2a)x=a$에서 $a(a-2)x=a$

$(b^2-b-2)x=b+1$에서 $(b+1)(b-2)x=b+1$

이 때, 집합 $A$가 집합 $B$의 진부분집합이므로

( i ) $n(A)=0$, $n(B)=1$일 때,

$a(a-2)x=a$의 해가 존재하지 않아야 하므로 $a=2$

$(b+1)(b-2)x=b+1$의 해가 1개 존재해야 하므로

$b=-2,\ 0,\ 1$ ($\because b\neq 2,\ b\neq -1$)

따라서 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ -2)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$로 3개이다.

(ii) $n(A)=0$, $B$가 실수 전체의 집합일 때,

$a(a-2)x=a$의 해가 존재하지 않아야 하므로 $a=2$

$(b+1)(b-2)x=b+1$의 해가 무수히 많아야 하므로 $b=-1$

따라서, 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ -1)$로 1개이다.

(iii) $n(A)=1$, $B$가 실수 전체의 집합일 때,

$a(a-2)x=a$의 해가 1개 존재해야 하므로

$a=-2,\ -1,\ 1$ ($\because a\neq 0,\ a\neq 2$)

$(b+1)(b-2)x=b+1$의 해가 무수히 많아야 하므로 $b=-1$

따라서, 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(-2,\ -1)$, $(-1,\ -1)$, $(1,\ -1)$로 3개이다.

그러므로 ( i ), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 7개이다.

2) 답 ③

[해설]

$y=\sqrt[3]{\dfrac{x^5}{10}}\div x^{\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log y=\log\left(\sqrt[3]{\frac{x^5}{10}}\div x^{\log x}\right)=\frac{1}{3}\log\frac{x^5}{10}-\log x^{\log x}$$

$$=\frac{1}{3}(5\log x-1)-(\log x)^2$$

$$=-(\log x)^2+\frac{5}{3}\log x-\frac{1}{3}$$

$$=-\left(\log x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{13}{36}$$

이때, $f(y)=\log y$는 증가함수이므로 $\log y$가 최대일 때 $y$도 최댓값을 갖는다.

따라서 $y$는 $\log x=\dfrac{5}{6}$일 때, 최댓값을 갖는다.

$\therefore x=10^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{10^5}$

3) **정답** ③

ㄱ. $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-f(-x-h)+f(-x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=f'(-x)\ (\text{참})$$

ㄴ. $|f(x)|\le Mx^2$에 $x=0$을 대입하면

$|f(0)|\le M\times 0^2=0$에서 $f(0)=0$이므로

$$|f'(0)|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right|$$

$$\le\lim_{h\to 0}\frac{Mh^2}{|h|}=\lim_{h\to 0}M|h|=0$$

$\therefore\ f'(0)=0$ (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x+1 & (x>0)\end{cases}$ 일 때,

$f(0+h)+f(0-h)-2f(0)=f(h)+f(-h)$이므로

$h>0$이면 $f(h)+f(-h)=(h+1)+(-h-1)=0$

$h<0$이면 $f(h)+f(-h)=(h-1)+(-h+1)=0$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h}=0$$

그런데 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

4) 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$

[해설] $\overline{BD}=a$라 하면 $\triangle ODB$가 직각삼각형이고 $\angle BOD=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\overline{OB}=2a$, $\overline{OD}=\sqrt{3}a$이다.

이때, $\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{AB}=2\overline{OB}=2\times 2a=4a$

이므로 $\triangle ADB$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^{\,2}=(4a)^2+a^2-2\times 4a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=16a^2+a^2-2\times 4a\times a\times\frac{1}{2}=13a^2$$

$\therefore\overline{AD}=\sqrt{13}a\ (\because\overline{AD}>0)$

또한, $\triangle ADB$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(4a)^2+(\sqrt{13}a)^2-a^2}{2\times 4a\times\sqrt{13}a}=\frac{16a^2+13a^2-a^2}{8\sqrt{13}a^2}$$

$$=\frac{7}{2\sqrt{13}}$$

$$\therefore\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{2\sqrt{13}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-\frac{49}{52}}=\sqrt{\frac{3}{52}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

$$\therefore\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}}{\frac{7}{2\sqrt{13}}}=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

**서울대 선배들의 강추문제** 1등급 비법 노하우

삼각형에 대한 조건이 몇 가지 주어지고 미지수를 구하는 문제는 내신이나 수능에서 계산형 문제로 자주 출제된다. 이때, 주어진 조건으로 얻을 수 있는 것이 무엇인지 확인하고 답을 구하는데 필요한 것을 차근히 계산하면 쉽게 해결할 수 있다. 이 문제에서는 $\angle\mathrm{BOD}=\frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=2$, $\overline{\mathrm{BD}}=1$로 놓아도 일반성을 잃지 않는다. 즉, $\overline{\mathrm{AB}}=4$이고, $\triangle\mathrm{ADB}$에서 $\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{3}$이므로 코사인법칙을 이용하면 $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이를 구할 수 있다. 마지막으로 $\triangle\mathrm{ADB}$에서 코사인법칙의 변형을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구하면 $\sin\theta$, $\tan\theta$의 값도 각각 구할 수 있다.

5) **정답** ①

$f(2x)\{1+2f'(2x)\}=\{f(2x)\}'\{1+f(2x)\}$에서

$f(2x)+2f(2x)f'(2x)=2f'(2x)+2f'(2x)f(2x)$

$f(2x)=2f'(2x)$

# 4

이때 $2f'(2x)=\{f(2x)\}'$ 이므로

$f(2x)=\{f(2x)\}'$

$\frac{\{f(2x)\}'}{f(2x)}=1$

따라서 $\int \frac{\{f(2x)\}'}{f(2x)}dx=\int 1dx$ 이므로

$\ln f(2x)=x+C$ (단, $C$는 적분상수)

$f(0)=1$ 이므로 $x=0$ 을 대입하면

$\ln f(0)=\ln 1=0+C$, $C=0$

따라서 $\ln f(2x)=x$ 이므로 $f(2x)=e^x$

즉 $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$ 이므로 $f(1)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$