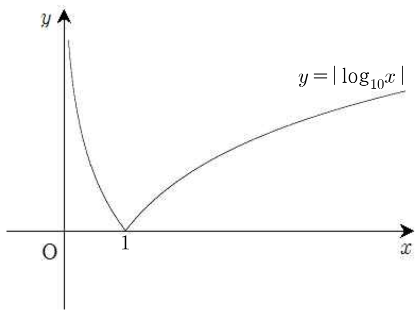
약점보완 테스트 13회

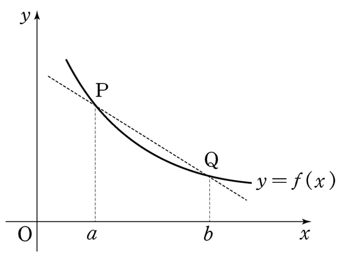
학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 아래 그림은 함수 $y=|\log_{10}x|$의 그래프이다. x에 대한 방정식 $|\log_{10}x|=ax+b$의 세 실근의 비가 $1:2:3$일 때, 세 실근의 합은?



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

2. 다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 이 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 나타낸 것이다.



함수 $F(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

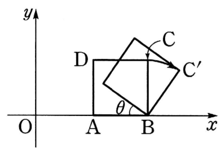
ㄱ. 함수 $F(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 증가한다.

ㄴ. $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$는 직선 PQ의 기울기와 같다.

ㄷ. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-f(b)\}\,dx \le \frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(2, 0)을 잇는 선분을 한 변으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 이 정사각형을 꼭짓점 B를 중심으로 시곗바늘이 도는 방향으로 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$만큼 회전시켰을 때, 점 C가 이동한 점을 $\mathrm{C}'(x,\ y)$라 하자. 점 C′의 자취의 방정식을 매개변수 θ로 나타낼 때, $\sin\theta=\frac{1}{3}$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값을 p라 하자. 이때 $\frac{1}{p^2}$의 값을 구하시오.



4. 최고차항의계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

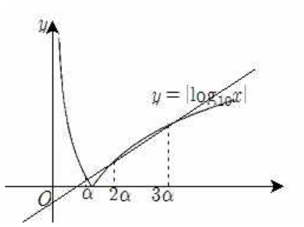
5. 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^{x}$이 직선 $x=t$ $(t \geq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2 \leq a \leq 10$, $2 \leq b \leq 10$
(나) $t \geq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 10$이다.

정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) [정답] ②

함수 $y=|\log_{10}x|$와 $y=ax+b$의 그래프를 방정식 $|\log_{10}x|=ax+b$의 세 실근의 비가 $1:2:3$가 되도록 그려보면 아래와 같다.



세 실근의 비가 $1:2:3$이므로 세 실근을 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha\ (\alpha>0)$라 하자.
α는 $y=-\log_{10}x$와 $y=ax+b$의 교점의 x좌표이고,
2α와 3α는 $y=\log_{10}x$와 $y=ax+b$의 교점의 x좌표들이다.
따라서 $-\log_{10}\alpha=a\alpha+b\cdots$①,
$\log_{10}2\alpha=2a\alpha+b\cdots$②,
$\log_{10}3\alpha=3a\alpha+b\cdots$③을 얻을 수 있다.
②-① : $\log_{10}2\alpha^2=a\alpha\cdots$④
③-① : $\log_{10}3\alpha^2=2a\alpha\cdots$⑤
④와 ⑤에서 $2\log_{10}2\alpha^2=\log_{10}3\alpha^2$을 얻을 수 있다.
따라서 $4\alpha^4=3\alpha^2$이 된다.
$\alpha>0$이므로 $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이 된다.
$\therefore$세 실근은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이므로, 그 합은 $3\sqrt{3}$ 이다.

2) ③

ㄱ. 구간 $[a, b]$에서 $F'(x)=f(x)>0$이므로 함수 $F(x)$는 증가함수이다. (참)

ㄴ. 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (거짓)

ㄷ. 점 Q에서 직선 PA에 내린 수선의 발을 R라 놓으면

$\dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}=\triangle\mathrm{PQR}$

$\displaystyle\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(b)dx$

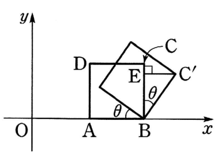
$\displaystyle=\int_a^b f(x)dx-\square QRAB$

$\displaystyle\therefore\ \int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx\le\frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3) 정답 8

오른쪽 그림과 같이 점 C′에서 $\overline{\mathrm{CB}}$에 내린 수선의 발을 E라 하면 점 C′의 x좌표는



$x=2+\overline{\mathrm{C'E}}$
$\quad=2+\overline{\mathrm{C'B}}\sin\theta$
$\quad=2+\sin\theta$

점 C′의 y좌표는

$y=\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{C'B}}\cos\theta=\cos\theta$

따라서 $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$이므로

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

한편 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$일 때

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\quad=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\because\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$-\frac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

즉 $p=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이므로

$\dfrac{1}{p^2}=8$

4) [정답] 42

$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 등차수열이므로 네점을 연결하는 직선을 $y=mx+n$이라고 하자.
그러면 $f(x)-(mx+n)=x(x+1)(x-1)(x-2)$라고 할수 있다.
$f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)+mx+n$이라고 하면
$f'(-1)=m-6$, $f'(2)=m+6$, $f(-1)=-m+n$, $f(2)=2m+n$이다.
-1에서의 접선은 $y=(m-6)(x+1)-m+n$
2에서의 접선은 $y=(m+6)(x-2)+2m+n$
$(k, 0)$에서 두 접선이 만나므로
$0=(m-6)(k+1)-m+n$,
$0=(m+6)(k-2)+2m+n$
두식을 k에 관하여 정리하면
$k=\dfrac{m-n}{m-6}-1$,
$k=-\dfrac{2m+n}{m+6}+2$
연립하면 $m+2n=18$
$m=-2n+18$을 $k=\dfrac{m-n}{m-6}-1$에 대입하면 $k=\dfrac{1}{2}$가 나온다.
따라서 $f(2k)=f(1)=m+n=20$이므로 $m=22$, $n=-2$가 된다.
$f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)+22x-2$
$f(4k)=f(2)=42$

5) [정답] 39

$f(x)=a^{x+1}-b^x$라 하자.
$f(x)=b^x\left\{a\left(\dfrac{a}{b}\right)^x-1\right\}$이므로, $a\ge b$이면 $x\ge1$에서 $f(x)$는 증가함수
ⅰ) $a\ge b$일 때,
  $x\ge1$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이고

$f(1)=a^2-b \ge a^2-a>0$이므로

$\therefore\ a^2-b \le 10$

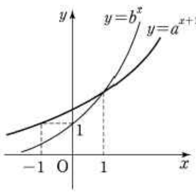
가능한 경우는 $a=2$일 때 $b=2$

$a=3$일 때 $b=2,\ 3$

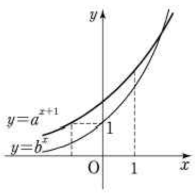
$a \ge 4$이면 $a^2-b \ge a^2-a \ge 12$

가능한 경우는 $(2,\ 2)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$의 3가지

ⅱ) $a<b$일 때



[그림 1]



[그림 2]

$f(x)=0$의 근을 α라 하자.

$a<1$이면 [그림 1]에서 $|f(x)|$의 최솟값은 $f(1)$

$a \ge 1$이면 [그림 2]에서 $|f(x)|$의 최솟값은 0

$\therefore\ f(1)<0$이면 $-10 \le f(1)<0$이어야 하고,

$f(1) \ge 0$이면 항상 성립한다.

$\therefore\ f(1) \ge -10$이면 항상 성립한다.

$2 \le a<b \le 10$에서 $(a,\ b)$의 순서쌍은 ${}_9\mathrm{C}_2=36$(개)

따라서, ⅰ), ⅱ)에서 구하는 순서쌍은 $3+36=39$(개)이다.