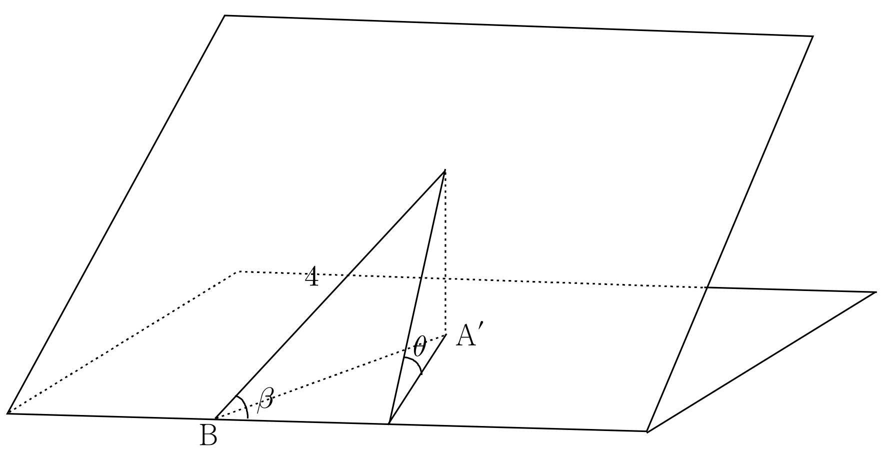
베르테르 모의고사 5회 정답표

1번. ②	2번. ④	3번. ①	4번. ②	5번. ④
6번. ①	7번. ②	8번. ①	9번. ⑤	10번. ⑤
11번. ③	12번. ④	13번. ⑤	14번. ②	15번. ③
16번. ③	17번. ①	18번. ⑤	19번. ③	20번. ③
21번. ④	22번. 3	23번. 80	24번. 232	25번. 8
26번. 15	27번. 135	28번. 28	29번. 10	30번. 72

13번 해설.

평면ABC가 평면α와 이루는 각의 크기를 θ라 합니다. 그리고 평면 α와 평면ABC의 교선을 l이라 하고 교선l과 직선AB가 이루는 각의 크기를 β라 합시다.



$\overline{A'B} = 16\cos^2\beta + 16\sin^2\beta\cos^2\theta = 16 - 16\sin^2\beta(1-\cos^2\theta) = 16 - 16\sin^2\beta\sin^2\theta$

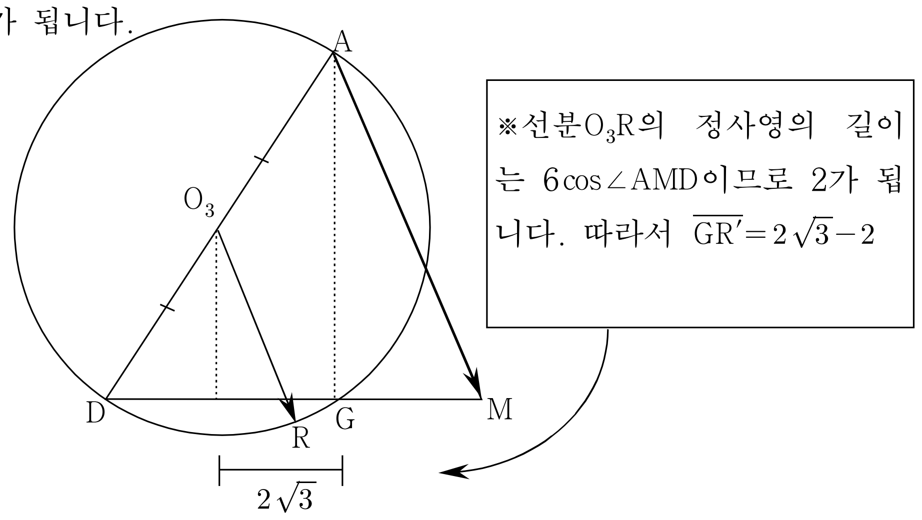
$16 - 16\sin^2\beta\sin^2\theta = 7$이므로 $\sin^2\beta\sin^2\theta = \frac{9}{16}$입니다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 $S\cos\theta = \sqrt{14}$에서 $\cos\theta$의 값이 최대가 되면 됩니다. 즉 $\sin\theta$의 값이 최소이고, $\sin^2\beta$값이 최대가 되면 됩니다. $\sin\theta = \frac{3}{4}$일 때 삼각형 ABC의 넓이가 최소가 이므로, 따라서 $b = 4\sqrt{2}$입니다. 이제 $\overline{BC}$의 최솟값을 구해보면 삼각형넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times \overline{BC} \times \sin\angle ABC = S$이므로 $S\cos\theta = \sqrt{14}$에서 각$\angle ABC$는 θ에 관계없이 모든 $\sin\angle ABC$값을 나타내므로 $\cos\theta$의 값이 최대이면서 $\sin\angle ABC$의 값이 최대이면 $\overline{BC}$의 최솟값을 구할 수 있습니다. $2\overline{BC}\sin\angle ABC\cos\theta = \sqrt{14}$이므로 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$이면서, $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$이 될 때, 최소가 됩니다. 따라서 $a = 2\sqrt{2}$가 됩니다.
정답은 ⑤이 됩니다.

14번 해설.

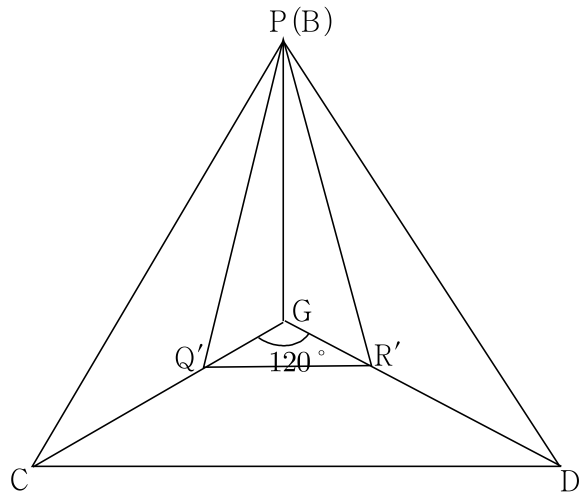
$\overline{BC}$가 최소일 때, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}$이므로 선분BC는 교선$l$과 평행하거나 교선위에 있습니다. 따라서 $\sqrt{7+8} = \sqrt{15}$가 정답이 됩니다. 정답은 ②

15번 해설

선분BC의 중점을 M이라고 평면ADM에서 다음과 같이 단면화로 볼 수 있습니다. 즉 두 벡터O_3R, AM이 그림과 같이 평행할 때 최대가 됩니다.

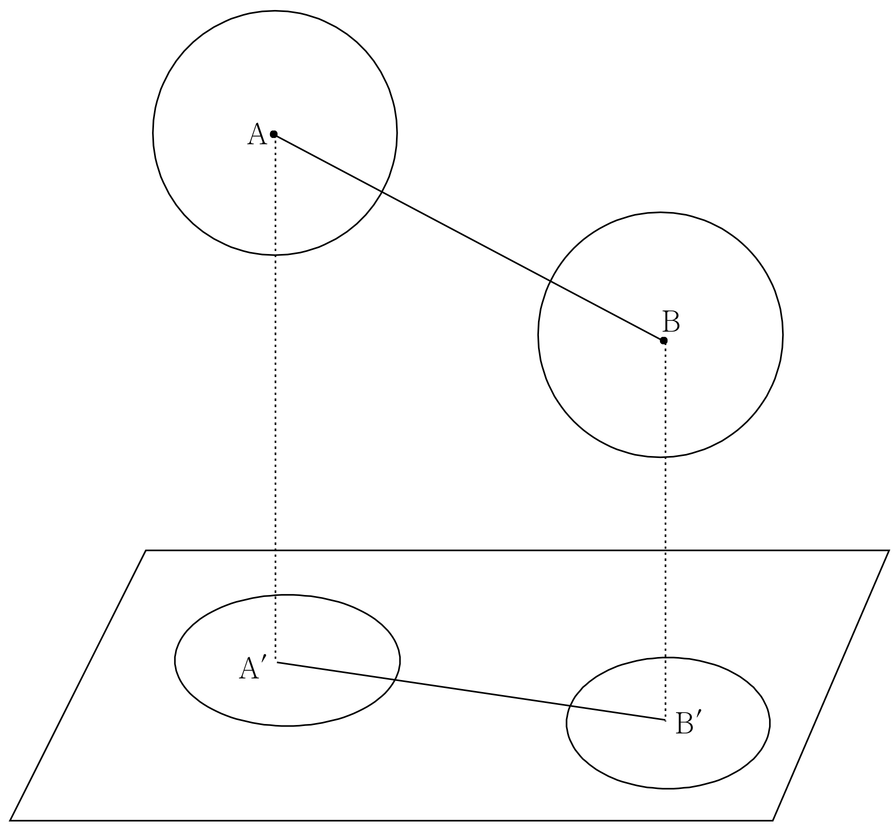


그런데 $\cos\angle AMD = \frac{1}{3}$이므로 점R의 평면BCD위로의 정사영을 R′라 하면 $2\sqrt{3} - 6 \times \frac{1}{3} = \overline{GR'}$이고 $\overrightarrow{O_2Q}$의 경우에도 마찬가지이므로 다시 다음과 같은 평면화를 할 수 있습니다.



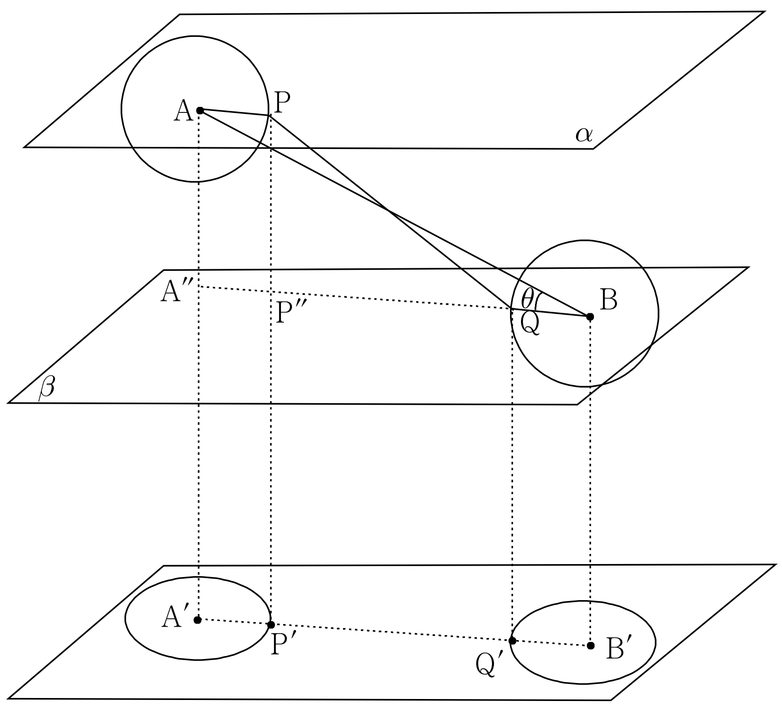
삼각형PQ′R′의 높이가 $4\sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 2)\sin30° = 5\sqrt{3} - 1$이고, $\overline{Q'R'} = 6 - 2\sqrt{3}$이므로 정답은 ③이 됩니다.

16번 해설.
두 구의 중심을 각각 A,B라 합시다. 다음 그림과 같습니다.



점A를 포함하고 평면$3x+2\sqrt{2}y+2\sqrt{2}z=0$과 평행한 평면을 α라 하고, 점B를 포함하고 평면α와 평행한 평면을 β라 하면 다음과 같습니다.선분AB와 평면β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{1+4+4}\times\sqrt{9+8+8}}=\frac{1}{5},\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$ 이므로



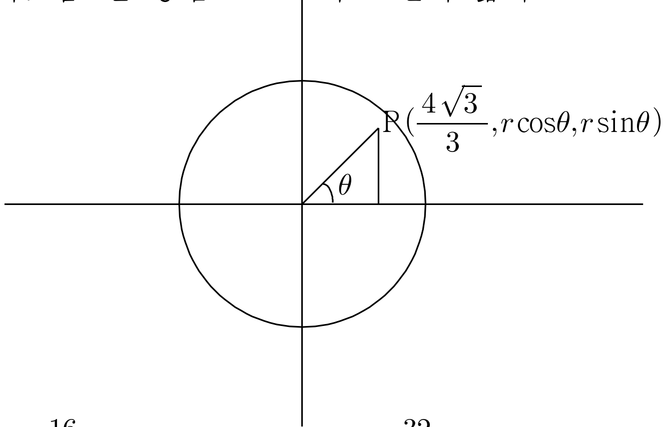
위의 그림과 같이 $\overline{P''Q}\equiv\overline{P'Q'}=\overline{A'B'}-2\sqrt{6}$이고,

$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta=\frac{12\sqrt{6}}{5},\ \overline{PP''}=\overline{AA''}=\overline{AB}\sin\theta$입니다.

따라서 $\overline{P''Q}=\frac{2\sqrt{6}}{5},\ \overline{PP''}=\frac{6}{5}$이므로 $\overline{PQ}^2=\frac{12}{5}$가 됩니다. 정답은 ③이 됩니다.

17번 해설

원C의 중심의 x좌표가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$이므로 일단 원의 중심을 P라 할 때, 점P는 평면$x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$와 구가 만나서 생기는 단면의 내부에 있습니다. 즉 평면$x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$과 구가 만나서 생기는 단면으로 단면화하면 다음과 같습니다. 점P는 반지름의 길이가 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$인 원의 내부에 있습니다. $0\le r\le\frac{4\sqrt{6}}{3}$라 하면 P$(\frac{4\sqrt{3}}{3},r\cos\theta,r\sin\theta)$라고 할 수 있습니다. 점P를 중심으로 하는 원의 넓이는



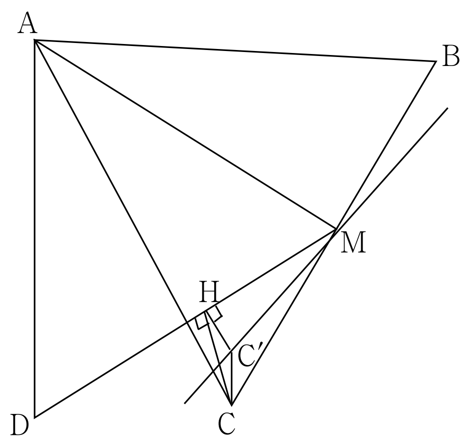
$(16-(\frac{16}{3}+r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)))\pi=(\frac{32}{3}-r^2)\pi$ 입니다. 원C를 포함하는 평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{OP}$이고, xy평면의 법선벡터는 $\vec{h}=(0,0,1)$라 두면 $S\cos\beta=S'$에서 정사영의 넓이는 $(\frac{32}{3}-r^2)\pi\times\frac{r|\sin\theta|}{\sqrt{\frac{16}{3}+r^2}}$이고,

$|\sin\theta|$의 값에 상관없이 $0\le r\le\frac{4\sqrt{6}}{3}$이므로 ($\sin\theta$의 값에 상관없이 $f(r)$이 독립적인 값을 가지므로)
최대가 되려면

$|\sin\theta|=1$이고, $f(r)=\frac{r(\frac{32}{3}-r^2)\pi}{\sqrt{\frac{16}{3}+r^2}}$의 최댓값을 구하면 됩니다.

즉, $f(r)=\sqrt{\frac{r^2(\frac{32}{3}-r^2)^2}{\frac{16}{3}+r^2}}\pi$의 최댓값을 구하면 되므로 $r^2=t$로 치환하면 $g(t)=\frac{t(\frac{32}{3}-t)^2}{\frac{16}{3}+t}\ (0\le t\le\frac{32}{3})$가 $t=\frac{8}{3}$에서 최대가 되므로 정답은 ①이 됩니다.

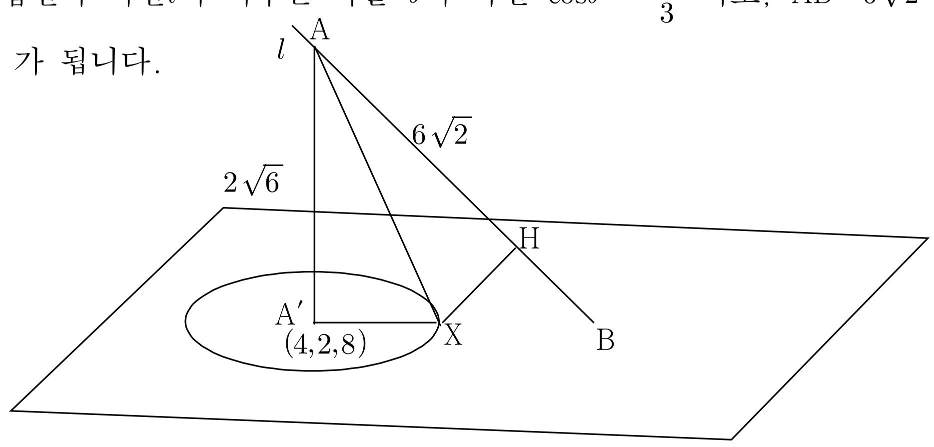
18번 해설



점C의 평면ADM위로의 정사영을 C′, 점C의 직선DM에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CC'}=2,\ \overline{C'H}=\overline{C'M}\sin30^\circ=2\sqrt{2}\sin30^\circ=\sqrt{2}$입니다. 따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{C'H}}{\overline{CH}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$이므로 정답은 ⑤이 됩니다.

19번 해설

$(4,2,8)$을 지나고 평면$x+2y+z=16$과 수직인 직선이 직선l과 만나는 점이 구의 중심이 됩니다. 따라서 계산해주면, 구의 중심은 $(6,6,10)$이 됩니다. 구의 중심A와 평면 사이의 거리가 $2\sqrt{6}$이므로 다음과 같습니다. 직선l의 방향벡터가 $\vec{d}=(5,4,-3)$이므로 평면의 법선과 직선l이 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고, $\overline{AB}=6\sqrt{2}$가 됩니다.

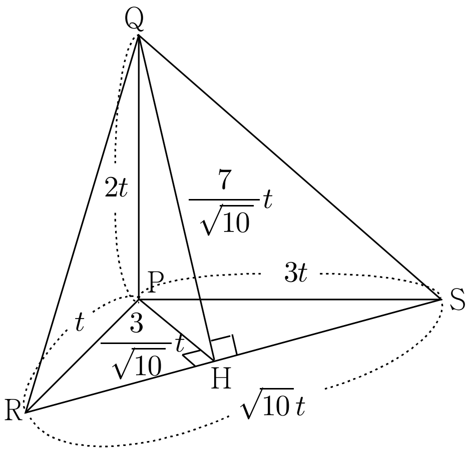


$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$가 최대가 될 때, $\overline{PH}$의 값이 최소가 됩니다.
즉, $\overrightarrow{A'P}\cdot\overrightarrow{A'B}$가 최대가 되야되므로 이 때의 점P를 X라 하면,
$\overline{XH}=\overline{XB}\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$이므로 정답은 ③이 됩니다.

20번 해설.

점$\mathrm{P}(t,3t,2t)$에 대하여 사면체의 부피는 t^3이 됩니다.

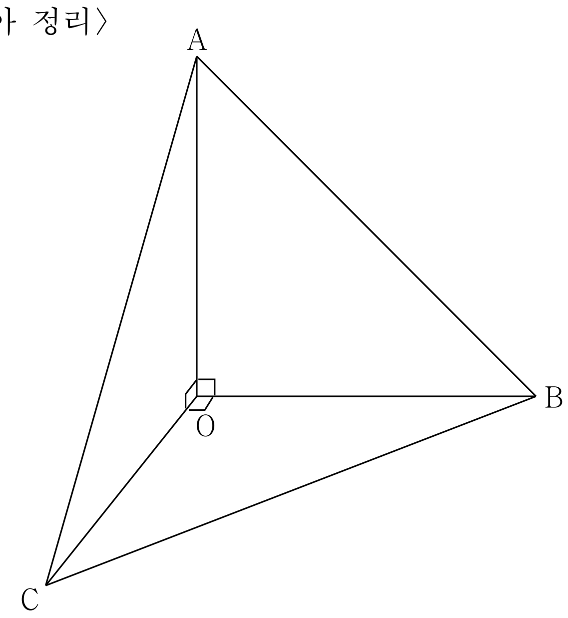
여기서 삼각형QRS의 넓이를 구하면 $\frac{7}{2}t^2$이 됩니다.



따라서 $t^3=\frac{r}{6}(2t^2+3t^2+6t^2+7t^2)$ 이므로 $t=3r$이고 $r=2$이므로 점 P의 좌표는 $(6,18,12)$입니다. 따라서 구의 중심의 좌표는 $(6-2,18-2,12-2)$이므로 정답은 ③이 됩니다.

(※참고)여기서 삼각형QRS의 넓이를 계산이 깔끔하게 떨어지도록 의도했습니다. 그 이유는 고교과정으로도 큰 시간 손실 없이 쉽게 풀리도록 하기 위함입니다. 수선을 내리는 방법이 가장 기초적이고, 교과서적이기 때문입니다. 다만 여기서 삼각형QRS의 넓이를 구하는 방법으로써 고교 외 과정의 드 구아의 정리를 참고로 덧붙이겠습니다.

〈드 구아 정리〉



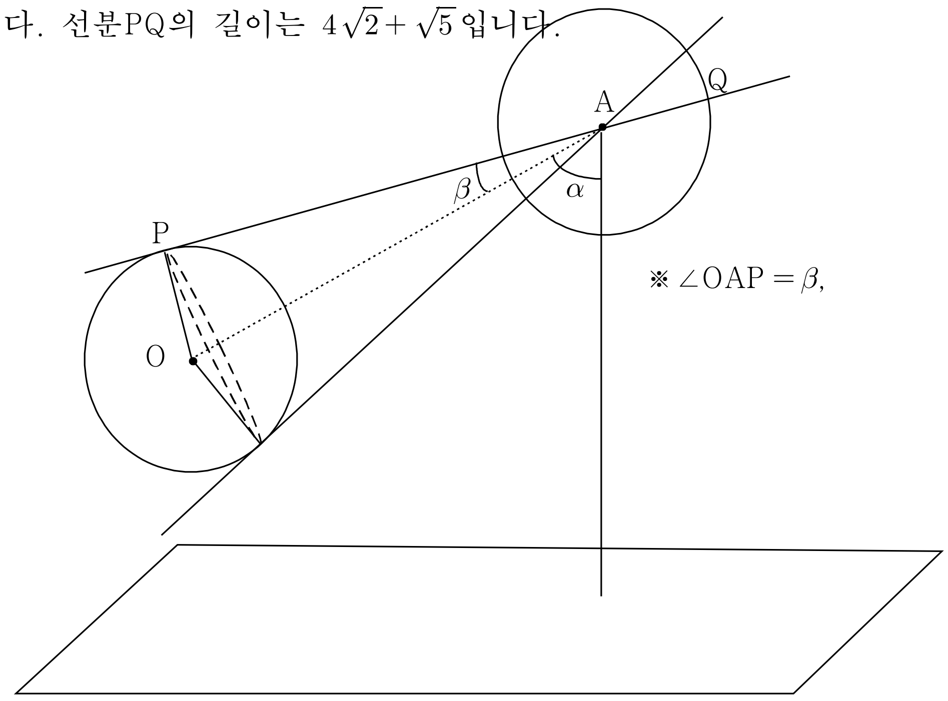
다음과 같은 직각 사면체OABC에 대하여

$(\triangle\mathrm{ABC})^2=(\triangle\mathrm{OAB})^2+(\triangle\mathrm{OBC})^2+(\triangle\mathrm{OCA})^2$가 성립한다.

이 정리를 이용하여 위 문제의 삼각형 QRS의 넓이를 구할 수 있습니다.

21번 해설.

점A를 지나면서 구에 접하는 접선위에 점Q가 다음과 같이 있습니다. 선분PQ의 길이는 $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$입니다.



선분PQ의 xy평면위로의 정사영의 길이가 최대가 되면

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}|^2$의 값이 최소가 됩니다.

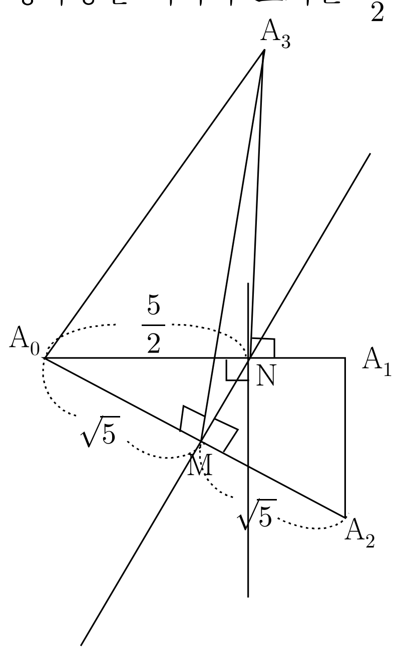
즉 직선OA와 xy평면의 법선이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}^2\cos^2(\alpha+\beta)$가 정답이 됩니다. ($xy$평면의 법선벡터를 $\vec{h}$라 하면 두 벡터의 내적의 절대값의 최솟값이 $\cos\theta\,(0<\theta<\frac{\pi}{2})$값의 최솟값이 됩니다.)

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos(\alpha+\beta)=(4\sqrt{2}+\sqrt{5})\times\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}=\frac{32-5}{9}=3$이므로 제곱은 9가 되고 정답은 ④번이 됩니다.

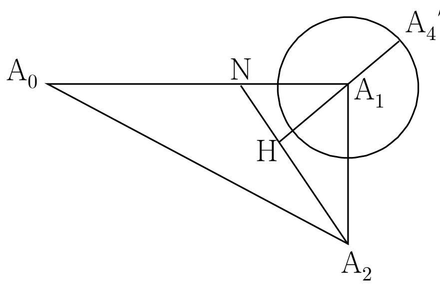
26번 해설

$k=1,2,3$을 대입하면 $|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}|=4$, $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}=16$, $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}=10$을 얻습니다. 벡터 내적의 기하적인 의미를 생각해보면 점$\mathrm{A_2}$에서 선분$\mathrm{A_0A_1}$에 내린 수선의 발이 $\mathrm{A_1}$이라는 뜻입니다.(정사영한 벡터의 크기의 곱) 즉, $|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}|\times\frac{5}{2}=4\times\frac{5}{2}=10$이므로 선분$\mathrm{A_0A_3}$의 선분$\mathrm{A_0A_1}$ 위로의 정사영한 벡터의 크기는 $\frac{5}{2}$입니다. 마찬가지로



$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}$이므로 점$\mathrm{A_3}$에서 선분$\mathrm{A_0A_2}$에 내린 수선의 발은 선분$\mathrm{A_0A_2}$의 중점이 됩니다. 즉, 점$\mathrm{A_3}$의 평면$\mathrm{A_0A_1A_2}$위로의 정사영은 그림의 점M을 지나고 선분$\mathrm{A_0A_2}$와 수직인 직선과 점N을 지나면서 선분$\mathrm{A_0A_1}$과 수직인 직선의 교점 위에 있습니다. 그 교점은 그림과 같이 점N이 됩니다.

따라서 점A_4의 평면$A_0A_1A_2$위로의 정사영A_4'의 자취는 다음과 같습니다. 고로 반지름의 길이가 1인 원의 둘레 또는 내부위의 점A_4'



와 직선A_2N사이의 최대거리를 구하면 삼각형의 높이가 최대가 되므로 정사영의 넓이의 최댓값을 구할 수 있습니다. $\overline{A_1H}=\frac{6}{5}$이므로 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{11}{4}$가 됩니다. 정답은 15가 됩니다.

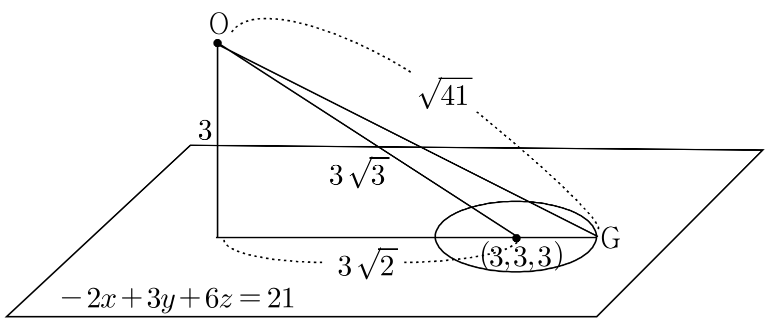
27번 해설

정삼각형의 무게중심을 G라고 하면 다음과 같습니다.

$\sum_{k=1}^{3}(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_k})\cdot(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OA_k})=\sum_{k=1}^{3}|\overrightarrow{OA_k}|^2-4=-12+\sum_{k=1}^{3}|\overrightarrow{OA_k}|^2$ 이므로

$\sum_{k=1}^{3}|\overrightarrow{OA_k}|^2=\sum_{k=1}^{3}|\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_k}|^2=3|\overrightarrow{OG}|^2+24$가 됩니다. 따라서

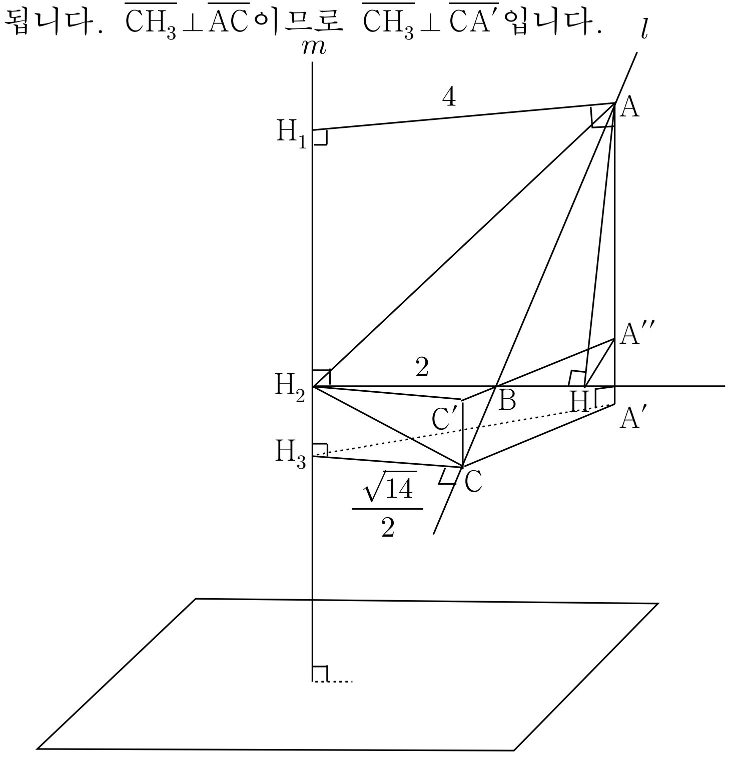
$3|\overrightarrow{OG}|^2+24-12$의 최댓값을 구하면 됩니다. 점G의 자취는 점$(3,3,3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원판입니다. 이 원판을 포함하는 평면은 직선$\frac{-x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}$과 수직이면서 점$(3,3,3)$을 지나므로 평면의 방정식은 $-2x+3y+6z=21$입니다.



따라서 $|\overrightarrow{OG}|$의 최댓값은 $\sqrt{41}$이 되므로 정답은 135가 됩니다.

28번 해설

점A의 점C를 포함하고 직선m과 수직인 평면 위로의 정사영을 A'라 하면 다음 그림과 같습니다. $m//\overline{AA'}$이므로 $\overline{AH_1}=\overline{A'H_3}=4$가 됩니다. $\overline{CH_3}\perp\overline{AC}$이므로 $\overline{CH_3}\perp\overline{CA'}$입니다.

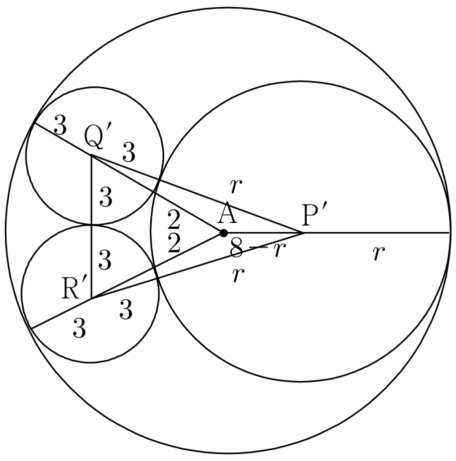


따라서 선분CA'의 길이는 $\sqrt{16-\frac{7}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$가 됩니다.

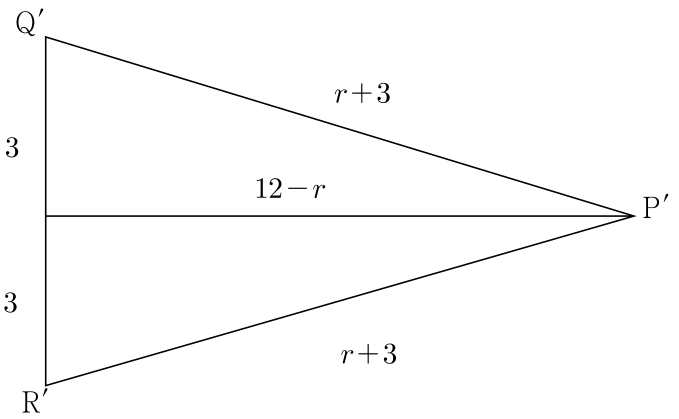
마찬가지로 두 점A,C의 점B를 포함하고 직선m과 수직인 평면 위로의 정사영을 각각 A″, C′라 하겠습니다. 선분BC′의 길이는 $\sqrt{\overline{BH_2}^2-\overline{C'H_2}^2}=\sqrt{4-\frac{14}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$가 됩니다. $\overline{BA''}$의 길이는 $\frac{5\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$가 되므로 점B는 선분CA를 1:4로 내분하는 점이 됩니다. 그런데 삼각형CAH_2의 넓이가 5이므로 삼각형BAH_2의 넓이는 4가 됩니다. 따라서 점A에서 직선BH_2에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=4$입니다. $\angle A''BH=\angle H_2BC'$(맞꼭지각)이므로 $\overline{A''B}\sin\angle C'BH_2=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\overline{A''H}=\sqrt{7}$가 됩니다.

$\cos\theta=\frac{\overline{A''H}}{\overline{AH}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로 정답은 $64\cos^2\theta=28$

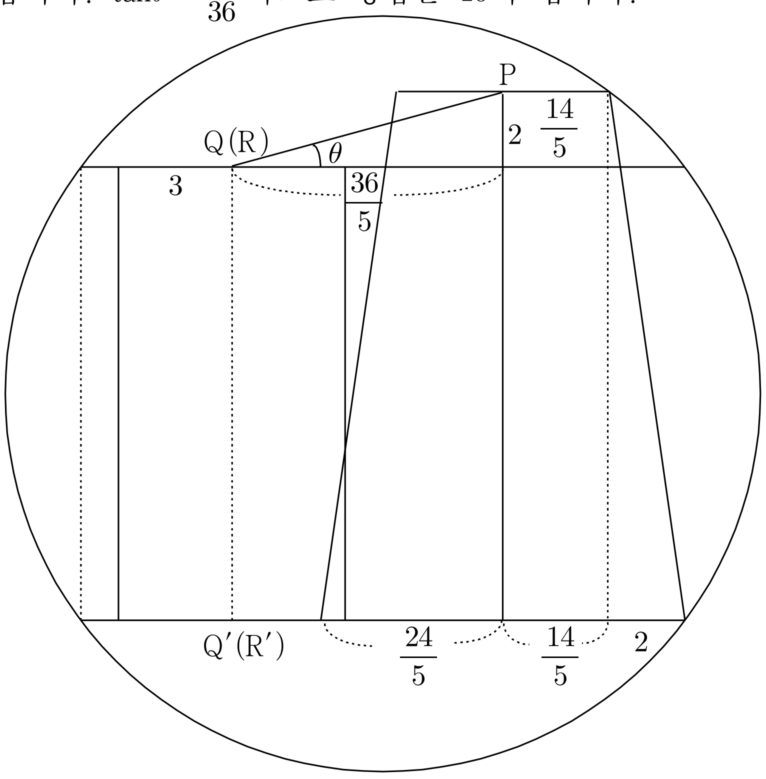
29번 해설



반지름의 길이가 8인 원의 중심을 A라 하고 이 원에 내접하는 세 원은 위의 그림과 같습니다.

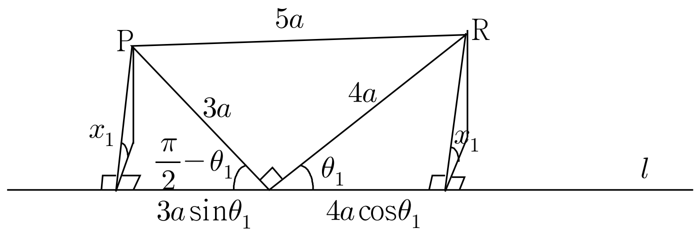


$(r+3)^2-(12-r)^2=9$이므로 $r=\frac{24}{5}$입니다. 따라서 다음과 같이 단면화합니다. $\tan\theta=\frac{10}{36}$이므로 정답은 10이 됩니다.

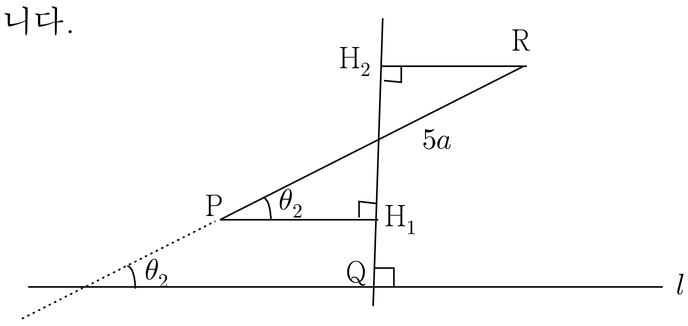


30번 해설

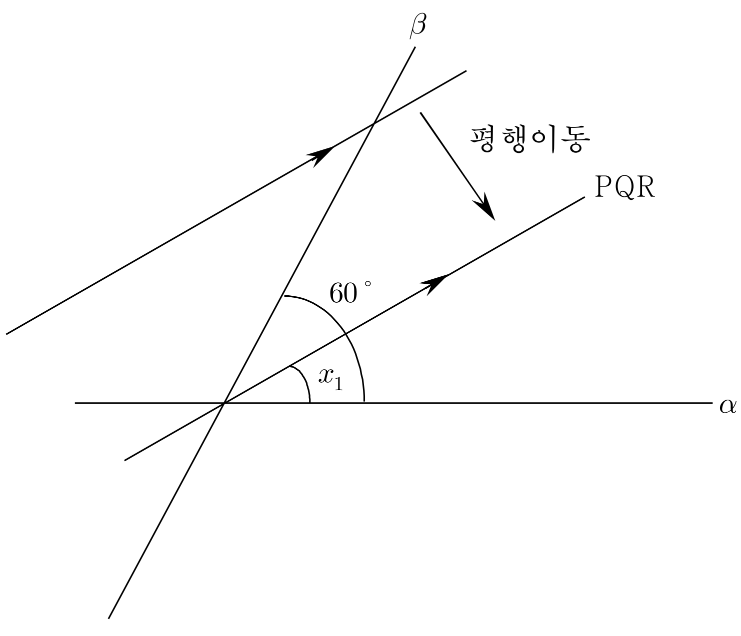
$4|\overrightarrow{PQ}|=3|\overrightarrow{QR}|$이므로 $|\overrightarrow{PQ}|=3a$이라 하면 $|\overrightarrow{QR}|=4a$, $|\overrightarrow{RP}|=5a$가 됩니다. 즉, $|\overrightarrow{RP}|$의 크기가 가장 크므로 구의 지름과 같거나 작아야 됩니다. 따라서 $0<5a\le10$이 됩니다. 평면PQR이 평면α와 만나서 생기는 교선을 l, 평면β와 만나서 생기는 교선을 m이라고 하면, (나)조건에 의해서 두 직선 l, m은 서로 평행하거나 일치합니다. 그러므로 선분QR이 직선l과 이루는 각의 크기를 θ_1라 하면, 선분QR이 직선m과 이루는 각의 크기 역시 θ_1이 됩니다.
선분RP가 직선l과 이루는 각의 크기를 θ_2라 하고,
평면PQR이 평면α와 이루는 각의 크기를 x_1이라고 합시다.
$|\overrightarrow{Q_1R_1}|^2=a^2(16-16\sin^2\theta_1\sin^2x_1)$, $|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2=a^2(9-9\cos^2\theta_2\sin^2x_1)$,



$|\overrightarrow{R_1P_1}|^2=a^2(25-25\sin^2\theta_2\sin^2x_1)$입니다. 여기서 $25a^2\sin^2\theta_2$는 선분RP의 점Q를 지나고 직선l과 수직인 직선 위로의 정사영의 길이가 됩니다.



$25a^2\sin^2\theta_2=(\overline{H_1H_2})^2=|4a\sin\theta_1-3a\cos\theta_1|^2$이므로
$a^2(25-25\sin^2\theta_2\sin^2x_1)=a^2(25-(4\sin\theta_1-3\cos\theta_1)^2\sin^2x_1)$
$|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2+|\overrightarrow{Q_1R_1}|^2-|\overrightarrow{R_1P_1}|^2=-24a^2\sin^2x_1\sin\theta_1\cos\theta_1=-12a^2\sin2\theta_1\sin^2x_1$
평면PQR이 평면β와 이루는 각의 크기를 x_2라 하면
$\sum_{k=1}^{2}|\overrightarrow{P_kQ_k}|^2+|\overrightarrow{Q_kR_k}|^2-|\overrightarrow{R_kP_k}|^2=-12a^2\sin2\theta_1(\sin^2x_1+\sin^2x_2)$이므로,
최대이려면 $0<a\le2$에서 $a=2$이고 $\sin2\theta_1=-1$이어야 하고,
$48(\sin^2x_1+\sin^2x_2)$의 최댓값을 구하면 됩니다.
여기서 두 평면α,β의 교선을 n이라 하면 평면PQR을 교선 n을 포함하면서 움직이는 평면으로 생각해도 무방합니다. (평면을 평행이동하여도 이루는 각의 크기는 변하지 않으므로)



따라서 계산해주시면 $\sin^2x_1+\sin^2x_2\le\frac{3}{2}$이므로 $48\times\frac{3}{2}=72$가 정답이 됩니다.