수학 1-2등급을 받기 위한

나일 모의고사

고3 대비
3회분

2704 권태영 제작

8. 두 곡선 $y=x^2-1, y=x^3-2x^2-k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

9. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $n(n-a)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라고 하자. (단, a는 상수) $\sum_{k=3}^{8} f(k)$의 값이 짝수가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

10. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

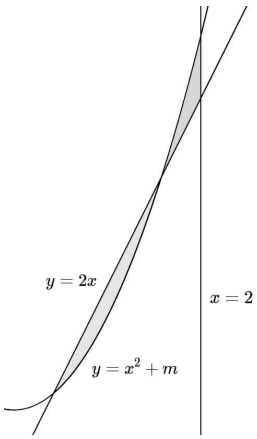
(가) $a_n a_{n+1} \geq 0$
(나) $a_8 = 3$

$a_1 < -10$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① -25 ② -35 ③ -45 ④ -55 ⑤ -65

11. 양의 상수 m에 대하여 곡선 $y=x^2+m$과 직선 $y=2x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라고 하고, 곡선 $y=x^2+m$, 직선 $y=2x$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라고 하자. $A=2B$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<1$) [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



12. 집합 $\left\{x \mid a\pi < x \le 2\pi, x \ne \frac{\pi}{2}, x \ne \frac{3\pi}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x+2$ $(0 \le a \le 1)$와 양의 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 다음 조건을 만족시킨다. (단, b는 상수)

함수 $g(t)$의 치역의 원소는 b뿐이다.

위 조건을 만족시키는 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 모든 $a+b$의 합은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

13. 두 이차함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{x|f(x)-g(x) \geq 0\} = \{x|x \geq 3\}$

(나) 집합 $\left\{t|\lim_{x\to t}\frac{f(x)+g(x)}{x^2}=4\right\}$은 무한집합이다.

$f(2)=4$일 때, $g(4)$의 값은? [4점]

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

14. 중심이 O로 동일하고 반지름이 각각 $2r, r$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 원 C_1 외부의 점 B와 원 C_1 위의 두 점 A, C에 대하여 선분 $\overline{AC}$가 점 O를 지나고, 선분 $\overline{BC}$가 원 C_2과 접한다. 선분 $\overline{BC}$와 원 C_2의 접점을 H라고 하자.

$$\overline{AH} = 2\sqrt{7}, \quad \sin(\angle ABC) = \frac{3}{5}$$

일 때, 선분 $\overline{AB}$의 길이는? [4점]

① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$ ④ 7 ⑤ $\frac{22}{3}$

15. $f'(\alpha)=0$인 실수 α가 존재하는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\lim_{x\to t-}\frac{|f(x)-f(t)|}{x-t}$$

라고 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $g'(k)=g(k)=f(k)$인 실수 k가 존재한다.

$f(\alpha)$의 값은? (단, $\alpha\neq k$) [4점]

① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{20}{3}$ ③ $-\frac{23}{3}$ ④ $-\frac{26}{3}$ ⑤ $-\frac{29}{3}$

단답형

16. 함수 $f(x)=(x-2)(x+3)^2$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

17. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_{22}}{a_{20}}+\frac{a_8}{a_7}=30$$

일 때, $\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_5}{a_3}$의 값은? [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{9} a_n = 50,\ \sum_{n=1}^{8} (n + a_{n+1}) = 20$$

일 때, a_1의 값은? [3점]

19. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 12x + a$이고 $f(3) = 12$일 때, 다음 조건을 만족시킨다.

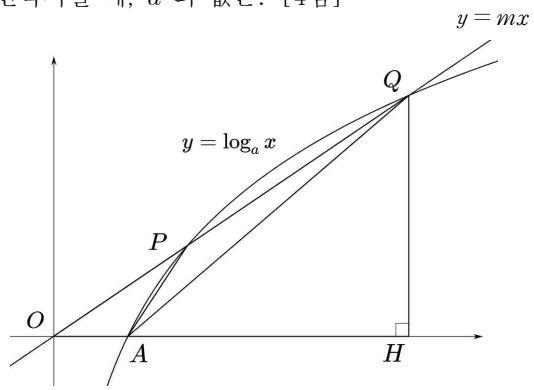
모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 4$이다.

$f(4)$의 최솟값은? [3점]

20. 그림과 같이 양수 m과 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y = \log_a x$와 직선 $y = mx$가 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q에서 x에 내린 수선의 발 H와 점 $A(1,0)$에 대하여 삼각형 AOP, APQ의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 하자. (단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.)

$$2S_1 = S_2,\quad \triangle OHQ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

를 만족시킬 때, a^2의 값은? [4점]



21. 두 양의 실수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x) = a\cos\pi x$, $g(x) = x^3 - 3bx + 7$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(5)$의 최댓값은? [4점]

> $0 < x < 2$에서 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 최솟값은 존재하지 않으며, 최댓값은 23이다.

22. 죄송합니다. 문제를 못 만들었어요. ㅠㅠ

8. 4가 아닌 실수 t와 다항함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 t에서 4까지 변할 때의 평균변화율이 $2t+4$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}a_n+\sum_{k=1}^{5}a_{2n}=75$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

10. 집합 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\pi x$ 위의 두 점 $A(\alpha,f(\alpha)), B(\beta,f(\beta))$가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 $P(\beta,f(\alpha))$에 대하여 삼각형 ABP의 넓이는? [4점]

(가) $\overline{AP}=\frac{1}{2}$

(나) $f(\beta)=2$

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ 1

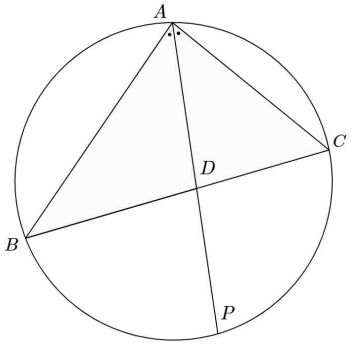
11. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\lim_{x\to t}\frac{1}{(x-4)^2}\int_t^x f(s)ds$$

라고 하자. $g(4)=-2$일 때, $f(6)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=9, \overline{AC}=6$인 삼각형 ABC에서 각 BAC의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라고 하고, 직선 AD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라고 하자. $\overline{AC}=\overline{BD}$를 만족시킬 때, 선분 AP의 길이는? [4점]



① $\sqrt{30}$ ② $\frac{6\sqrt{30}}{5}$ ③ $\frac{7\sqrt{30}}{5}$
④ $\frac{8\sqrt{30}}{5}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{30}}{5}$

13. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2+2at+b,\ v_2(t)=m$$

이다. 출발한 후 점 P와 Q가 두 번 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위가 $4<m<8$일 때, $t=0$부터 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

14. 두 정수 a, b $(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & (x \leq 2) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+b & (x>2) \end{cases}$$

라고 하자. 양의 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

> $g(k) \neq 0$를 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 $g(k) \neq g(k+2)$이다.

$a+b$의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

15. 함수 $f(x)=x(x-a)^2$ $(a>0)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -f'(t)(x-t)+f(t) & (x\geq t) \end{cases}$$

라고 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 t의 집합을 S라고 할 때,

$$S=\{t\,|\,t<b\}\cup\{t\,|\,t>6, t\neq c\}$$

이다. $a+b+c$의 값은? (단, $b<6<c$) [4점]

> 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서만 만나도록 하는 실수 k는 오직 하나만 존재한다.

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

단답형

16. 방정식

$$\log_3(2x-1)=\log_9 3(x+1)$$

을 만족시키는 실수 x의 값은? [3점]

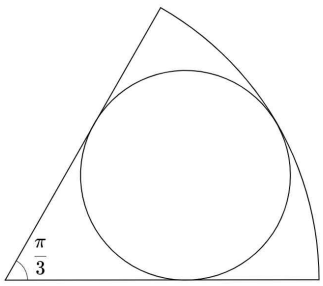
17. 함수 $f(x)=x^3-5x^2+3x+k$의 극솟값이 32일 때, 실수 k의 값은? [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=2n$$

을 만족시킨다. $a_1=3$일 때, a_3+a_4의 값은? [3점]

19. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴이 있다. 이 부채꼴에 내접하는 원의 반지름이 2일 때, 이 부채꼴의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값은? [3점]



20. 함수 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가

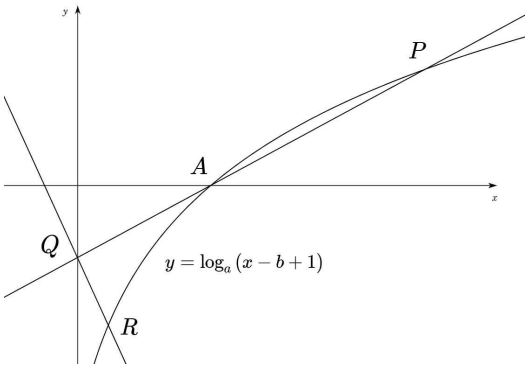
$$|f(x)|=|g(x)|$$

이다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-2)+g(2)+g(5)$의 값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x g(t)dt \le 0$ 이다.

21. 그림과 같이 함수 $f(x)=\log_a(x-b+1)$이 x축과 만나는 점을 A라고 하자. 점 A를 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이 y축과 만나는 점을 Q, 함수 $f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라고 하고, 점 Q를 지나고 기울기가 -2인 직선이 함수 $f(x)$의 그래프와 만나는 점을 R이라고 하자. $\overline{AP}=2\overline{AQ}=4\overline{QR}$을 만족시킬 때, $9\times a^{\frac{5}{6}}\times b$의 값은? (단, $a>1, b\neq 0$) [4점]



22. 공비가 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 모든 a_5의 값의 합은? [4점]

(가) 3보다 큰 자연수 m에 대하여 $a_m=16$인 m이 존재한다.

(나) 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항 중 자연수가 아닌 항의 개수는 2이다.

8. 양의 실수 b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x+3) & (x \geq a) \\ b & (x < a) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 19 이하의 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n + a_{20-n} = 2n,\ \sum_{n=1}^{19} a_n = 80$$

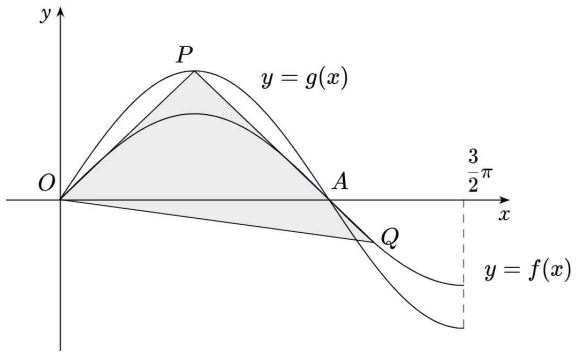
을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

10. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=a^{-2x}$ $(a>1)$에 대하여 점 $A(4,f(4))$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 B라고 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $C(2,f(2))$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 36일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

11. 그림과 같이 열린구간 $\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$에서 정의된 두 함수 $f(x)=\sin x$, $g(x)=k\sin x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $g(x)$가 만나는 점을 A라고 하자. 곡선 $y=g(x)$위의 점 $P\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$에 대하여 선분 PA를 4:1로 외분하는 점을 Q라 할 때, 점 Q는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 삼각형 OPQ의 넓이는? (단, O는 원점이고, $k>1$이다.) [4점]



① $\frac{3}{4}\pi$ ② $\frac{7}{8}\pi$ ③ π ④ $\frac{9}{8}\pi$ ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

12. 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} 4x^3-12x & (|x|>2) \\ f(x) & (|x|\le 2) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^1 g(x)dx$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하자. $M+m$의 값은? [4점]

함수 $g(x)$의 역함수가 존재한다.

① $\frac{22}{3}$ ② $\frac{23}{3}$ ③ 8 ④ $\frac{25}{3}$ ⑤ $\frac{26}{3}$

13. 공차가 4이고 모든 항이 0이 아닌 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여

$$\sum_{n=1}^{8}(|a_n a_{n+1}| - a_n a_{n+1}) = 6$$

을 만족시킨다. $a_3 a_5 < 0$일 때, 위 등식을 만족시키는 모든 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① -48 ② -40 ③ -32 ④ -24 ⑤ -16

14. 최고차항의 계수가 -1인 일차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x) = \frac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2}$$

라고 하자. 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3) = g(3), f'(3) = g'(3)$
(나) 함수 $h(x)$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.

$g(2) = 7$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

15. 최고차항의 계수가 -4인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

> 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$는 $x=0, x=4$에서 최댓값을 가지고, $g(0)=g(4)$이다.

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-4)=\log_4(x+6)$$

을 만족시키는 실수 x의 값은? [3점]

17. 함수 $f(x)=(x-3)(x+4)^2$에 대하여 $f'(3)$의 값은? [3점]

18. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가

$$v(t)=2t-a$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 a의 값은? [3점]

19. 100 이하의 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=2\log_3 x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. 삼각형 OPQ의 넓이가 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? (단, O는 원점이다.) [3점]

20. 두 다항함수 $f(x), g(x)$가

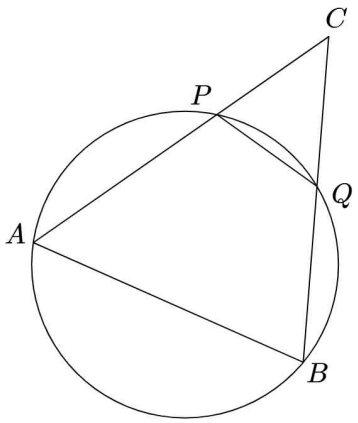
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-\{g(x)\}^2}{f(x)\{g(x)\}^2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+2x}{(x-2)^3 g(x)}=\frac{1}{8}$$

을 만족시킨다. $f(6)+g(6)$의 값은? [4점]

21. 그림과 같이 예각삼각형 ABC에 대하여 선분 AC 위의 한 점 P는 $\overline{CP}=3$을 만족시킨다. 삼각형 ABP의 외접원이 선분 BC와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 Q라고 하자.

$$\overline{PQ}=2,\ \overline{AB}=6,\ \triangle ABC=\frac{27\sqrt{15}}{4}$$

를 만족시킬 때, $\overline{AC}\times\overline{CQ}$의 값은? [4점]



22. 첫째항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-n & (a_n\geq n)\\ a_n+n & (a_n<n)\end{cases}$$

이다.

(나) $a_2\times a_3\times a_4\times a_5=0$

수학 영역

풀어주셔서 진심으로 감사합니다!
겨울방학 동안 짬 시간동안 열심히 만든 문제들입니다.

다음에는 3월 모의고사 대비 미적분 '수열의 극한' (도형)
대비문제를 제작해볼 예정입니다.
앞으로도 열심히 활동하겠습니다!

수학 1등급을 받을수 있도록
파이팅입니다 !!