반갑습니다. 퓨에르 (박성현)입니다.

수능이 끝난 지 벌써 11일이 지났습니다.

예비 고3 분들은 '이제 내 차례네!' 하고 설레기도, 두렵기도 하실 겁니다.

앞으로 시작될 기말고사 이후에 '어떻게 공부해야하나' 하고

걱정도 되실 겁니다.

어디 프리패스가 좋다던데, 인강을 들어야 하나? 과외를 해야 하나?

하고 말이죠.

이 와중에 '수학 공부를 어떻게 해야 하는가' 에 대해서 정보를 드리기 위해

부족한 실력이나마 글을 써봅니다.

학생에 따라서 '현재 수학 상태', '다른 과목의 상황', '경제적 상황' 등등

정말로 다양한 환경 때문에 '무조건 몇 점 맞는 전략'

같은 글은 쓰기 조심스럽습니다.

그래서 우선 **교과서를 대하는 태도**에 관한 글을 써보려 합니다.

아무쪼록 편히 읽어주시길 바랍니다.

'제대로 공부해야한다.' '교과서를 반드시 공부해야한다.'

이런 말들을 지겹도록 많이 들었을 것입니다.

그러나 '교과서'를 어떻게 제대로 공부하는지 모르는 학생들이 많을 것 같습니다.

제가 제시하는 방법은

교과서의 목차와 단원별 목표는 반드시 2~3번은 읽자.
(직접 쓰면 더욱 더 좋다.)

그리고, **반드시 증명해보자**입니다.

교과서에는 각 단원별로 제시하는 '이번 단원에서 이루어야할 목표'를 제시합니다.

어떠한 것이 중요한지도 모르는 채, 공식만 외우는 것은 바람직하지 않습니다.

제가 이러한 얘기를 할 때, 자주 드는 예시가 있습니다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{3n^2+2n}=?$$

여러분들께서는 최고차항의 계수를 비교하여 $\frac{1}{3}$ 이라는 답을 쉽게 생각해내실 겁니다.

그런데 교과서에는 이렇게 서술되어 있습니다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ 으로 수렴**할 때** (단, $\beta\neq0$)

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta$

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha-\beta$

$\lim_{n\to\infty}(a_n\times b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\times\beta$

$\lim_{n\to\infty}(a_n\div b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\div\lim_{n\to\infty}b_n$ (단, $\beta\neq0$)$=\alpha\div\beta$

위의 예시를 보면 $a_n=n^2+3n+1$, $b_n=3n^2+2n$ 은 각각 수렴하지 않습니다.
그리고 우리의 교과서는 이렇게 서술합니다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2+3n+1}{n^2}}{\dfrac{3n^2+2n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n}}=\frac{1}{3}$$

왜 굳이 대충 가장 계수가 큰 놈들끼리만 비교하면 되지! 라고 설명하지 않고
n^2으로 나눠 주는 것일까요? 그것은 바로
$1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}=c_n$, $3+\dfrac{2}{n}=d_n$ 으로 취급하면, 이제 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$과 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n$ 은 각각 수렴하기에
박스 안의 내용이 설명이 되기 때문입니다.

하나 더 얘기해볼까요? **함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하면, $f(x)$는 $x=a$에서 연속**이라는 것은 어떻게 증명할까요?

우선, $x=a$에서 미분가능하다는 것은 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 값이 존재한다는 것입니다.
대충, '$f(x)$는 $x=a$에서 접선을 그을 수 있다는 거잖아요!' 라고 얘기하시면 부족합니다.
정확하게, '평균 변화율'의 '극한값' 이 존재한다는 개념으로 받아들이셔야합니다.
어쨌든, 이 값이 존재한다는 것은 $\lim\limits_{x\to a}f(x)-f(a)$의 값이 '0'이라는 것을 의미합니다.
그렇기 때문에, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립하여 '극한값과 함숫값이 같기에 연속'
(교과서를 보세요! 꼭!)

직관적으로 '아 그렇겠지' 하지 마시고, 한 번은 꼭 '논리'적으로 이해하셔야합니다.

조금 과장하여, 이렇게 증명을 써가며 키워가는 습관을 통해

바로 '고난도 문항'을 풀기 위한 논리력을 키울 수 있다고 생각합니다.

그리고 무엇보다도, 위에서 **'~할 때'**를 강조한 이유가 있습니다.

실제 문제를 다룰때는
① '하지 않을 때'를 함정으로 내거나
② '그 조건을 만족함을 보이고 (확인하고)'
문제를 풀어야 합니다. 그렇지 않으면 위험한 상황이 발생할 수 있습니다.

28. 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$은 수렴한다.

ㄴ. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\neq 0$이다.

ㄷ. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

이번엔 2007학년도 6월 수리 (나)형 영역 28번입니다.

우리는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이라는 것만 알고 있습니다.

즉, ㄱ에서, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이므로

주어진 급수는 수렴한다는 것을 알 수 있습니다.

ㄴ 에서는 급수가 '발산' 한다는 것만 알고 있습니다.

그러나, 명제에서 $p \to q$ 가 참이라고 해서 $\sim p \to \sim q$가 참인 것은 아닙니다.

즉, 급수가 수렴하면 → 수열의 극한은 '0' 이다. 가 참이라고 해서

급수가 수렴하지 않으면(발산하거나 진동하면) → 수열의 극한은 '0'이 아니다. 라는 명제가 참인 것은 아닙니다. (명제가 참이라고, 이가 참은 아님 : 수II)

(ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \neq 0$ 이지만, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 입니다.)

즉, 각각의 급수가 발산하더라도, $a_n = 1$, $b_n = -1$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$입니다.

ㄷ에서는 $\lim_{n\to\infty} a_n^3$, $b_n^3 = 0$ 임을 알려주었기 때문에

$\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ 도 각각 0으로 수렴함을 알 수 있습니다.

결국 모든 풀이는 교과서적으로 할 수 있습니다.

(ㄴ선지 또한 교과서의 명제 부분을 통해 '논리적으로 의심하는 법'을 배울 수 있습니다.)

20. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예를 들어, 이번 2017학년도 수능 (가)형 20번 문제입니다.

ㄱ과 ㄴ과 ㄷ은 서로 유기적인 관계가 있습니다.

이것이 바로 위에서 말한 ②번과 같은 내용입니다.

발문과, ㄱ선지를 통해서 **논리적으로** ㄴ과 ㄷ을 풀어나가야 한다는 것이지요.

우선, $f(x)$를 관찰함으로써 주어진 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 연속이고

열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 미분 가능한 함수라는 것을 파악해야합니다.

ㄱ을 통해 $f(\sqrt{x})>0$임을 확인해야하고 (대입)

누가 시키지 않아도 해야 하는 $f(0)=0$ 라는 정보를

통해서, 우리는 $\dfrac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}=f'(c)>0$를 만족시키는 c가

열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$ 에 존재함을 확인할 수 있습니다. (분모, 분자 모두 0보다 크기 때문)

그 이후, $f'(x)=-e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt+e^{-x}\sin(x^2)$의 식에 $\sqrt{\pi}$를 대입하여

$f'(\sqrt{\pi})<0$ 을 찾아냈습니다. 그렇다면, ㄴ에서 찾아낸 $f'(a)>0$ 이고 $f'(\sqrt{\pi})<0$

이므로 열린 구간 $(a,\ \sqrt{\pi})$에 $f'(c)=0$를 만족하는 c가 존재한다는 것을 알 수 있습니다.

이번 2017학년도 수능을 봤던 가르친 학생들 중 대부분은

'평균값 정리' 에 관한 내용은 제대로 모르고 있었습니다.

대충 점과 점을 잇고, '어? 같은 기울기가 어딘가 있는 것 같아!' 정도로 그치더군요.

부랴부랴 사태의 심각성을 깨닫고 몇 번이고 수업을 했습니다.

평균값 정리뿐 아니라, 롤의 정리, 근의 존재성 파악하는 법 등등..

이과 수업보다 문과 수업 때 강조한 내용이라 조금은 아쉽지만

위의 풀이는 ②의 예시입니다. ㄱㄴㄷ 선지를 통해 확인할 수 있지요

교과서에서 항상 달고 사는 '~할 때'를 유심히 보세요.

물론 시험장에서는 온전히 교과서의 논리가 아니라, 위의 예시에서

'최고차항의 계수' 만을 보고 바로바로 답을 내는 것들이 필요하지요.

하지만 실전이 아니라, 우리가 연습할 때는

반드시 '교과서의 논리' 로 풀어가는 것을 연습해야합니다.

그렇지 않으면, '안정적인 점수'를 받기는 어려울 것이라 생각합니다.

수능 만점자들의 '교과서로 공부했어요.' 라는 말은

교과서로'만' 공부했다는 뜻은 아닐 것이라고 생각합니다.

하지만 그 정도로 교과서적으로 공부하셔야 한다고 생각합니다.

기회가 되면 등급별로 '이렇게 공부했으면 좋겠다.'를 써보려 합니다.

특별히 원하시는 주제가 있으시면 댓글 달아주시면

관련 내용으로 써보겠습니다.

감사합니다.